

# MATHEMA Lösungen

April 2020

## Lösungen Mini-Trio (Mallas):

- a) Für den Nachweis, dass eine Darstellung als Trio-Term in dem rechts abgebildeten Trio-Feld möglich ist, genügt die Angabe eines Beispiels. Zur einfacheren und eindeutigen Beschreibung verwenden wir die in der Tabellenkalkulation übliche Bezeichnungsweise mit Angabe der Spalte durch Buchstaben sowie der Zeilennummer. Zum Ergebnis 1 gibt es vier Trio-Terme.

|   | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 4 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 9 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 7 | 3 | 8 |
| 4 | 6 | 2 | 6 | 5 |

|          |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <b>1</b> | $B1 * C1 - D1 = 4 * 1 - 3$ | <b>4</b>                   | $A2 * B2 - C2 = 1 * 9 - 5$ | <b>7</b>                   | $B1 * C1 + D1 = 4 * 1 + 3$ |
|          | $B1 - C1 * D1 = 4 - 1 * 3$ |                            | $B2 - A2 * C2 = 9 - 1 * 5$ |                            | $C1 * D1 + B1 = 1 * 3 + 4$ |
|          | $A2 * B3 - C4 = 1 * 7 - 6$ |                            | $B4 * D4 - C4 = 2 * 5 - 6$ |                            | $B4 * C4 - D4 = 2 * 6 - 5$ |
|          | $B3 - A2 * C4 = 7 - 1 * 6$ |                            | <b>5</b>                   |                            | $A3 * C3 - B3 = 4 * 3 - 7$ |
| <b>2</b> | $C1 * C2 - C3 = 1 * 5 - 3$ | $B2 - A3 * C1 = 9 - 4 * 1$ |                            | $C1 * C2 + C3 = 1 * 5 + 3$ |                            |
|          | $C2 - C1 * C3 = 5 - 1 * 3$ | $B2 * C1 - A3 = 9 * 1 - 4$ |                            | $C1 * C3 + C2 = 1 * 3 + 5$ |                            |
|          | $A4 - A2 * A3 = 6 - 1 * 4$ | $B3 * B4 - B2 = 7 * 2 - 9$ |                            | <b>9</b>                   | $B4 * D2 - C3 = 2 * 6 - 3$ |
|          | $A2 * A4 - A3 = 1 * 6 - 4$ | <b>6</b>                   | $A4 * B4 - C4 = 6 * 2 - 6$ |                            | $C2 * C3 - C4 = 5 * 3 - 6$ |
| <b>3</b> | $A1 * C1 - B1 = 7 * 1 - 4$ |                            | $B4 * C4 - A4 = 2 * 6 - 6$ |                            |                            |
|          | $A1 - B1 * C1 = 7 - 4 * 1$ | $C3 * D4 - B2 = 3 * 5 - 9$ |                            |                            |                            |
|          | $A1 * A2 - A3 = 7 * 1 - 4$ |                            |                            |                            |                            |
|          | $A1 - A2 * A3 = 7 - 1 * 4$ |                            |                            |                            |                            |

blau und rot geschriebene Zellbezüge siehe e) Seite 4

- b) In der gleichen Form geben wir alle mit dieser Anordnung von Zahlenkarten möglichen Terme mit Ergebnissen von 10 bis 39 sowie von 41 bis 49 an.

|                |                            |           |                            |           |                            |
|----------------|----------------------------|-----------|----------------------------|-----------|----------------------------|
| <b>10</b>      | $D1 * D2 - D3 = 3 * 6 - 8$ | <b>11</b> | $A1 * A2 + A3 = 7 * 1 + 4$ | <b>13</b> | $B1 * D1 + C1 = 4 * 3 + 1$ |
|                | $A2 * A3 + A4 = 1 * 4 + 6$ |           | $A2 * A3 + A1 = 1 * 4 + 7$ |           | $B3 * C3 - D3 = 7 * 3 - 8$ |
|                | $A2 * A4 + A3 = 1 * 6 + 4$ |           | $B2 * B4 - B3 = 9 * 2 - 7$ |           | $A2 * B3 + C4 = 1 * 7 + 6$ |
| <b>11</b><br>↓ | $A1 * C1 + B1 = 7 * 1 + 4$ | <b>12</b> | $A1 * C3 - B2 = 7 * 3 - 9$ | <b>13</b> | $A2 * C4 + B3 = 1 * 6 + 7$ |
|                | $B1 * C1 + A1 = 4 * 1 + 7$ |           | $B1 * C2 - D3 = 4 * 5 - 8$ |           | $A3 * C1 + B2 = 4 * 1 + 9$ |
|                | $B1 * D1 - C1 = 4 * 3 - 1$ |           | $B4 * C3 + D2 = 2 * 3 + 6$ |           | $B2 * C1 + A3 = 9 * 1 + 4$ |

|     |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|-----|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| ↑13 | $C3 * C4 - C2 = 3 * 6 - 5$ | 24                         | $C3 * D4 + B2 = 3 * 5 + 9$ | 35                         | $A3 * B2 - C1 = 4 * 9 - 1$ |                            |                            |                            |
| 14  | $A2 * B2 + C2 = 1 * 9 + 5$ | 25                         | $B3 * C3 + A3 = 7 * 3 + 4$ | 36                         | $A3 * B2 - C1 = 4 * 9 - 1$ |                            |                            |                            |
|     | $A2 * C2 + B2 = 1 * 5 + 9$ |                            | $A3 * B3 - C3 = 4 * 7 - 3$ |                            | $C2 * D3 - B1 = 5 * 8 - 4$ |                            |                            |                            |
|     | $C2 * C3 - C1 = 5 * 3 - 1$ |                            | $A3 * A4 + A2 = 4 * 6 + 1$ |                            | 37                         | $B1 * D3 + C2 = 4 * 8 + 5$ |                            |                            |
| 15  | $B4 * D2 + C3 = 2 * 6 + 3$ | $B2 * B4 + B3 = 9 * 2 + 7$ | $A3 * B2 + C1 = 4 * 9 + 1$ |                            |                            |                            |                            |                            |
| 16  | $B4 * D4 + C4 = 2 * 5 + 6$ | 26                         | $B3 * D1 + C2 = 7 * 3 + 5$ | 38                         | $A4 * C2 + B3 = 6 * 5 + 7$ |                            |                            |                            |
|     | $B3 * D1 - C2 = 7 * 3 - 5$ |                            | $D1 * D2 + D3 = 3 * 6 + 8$ |                            | $A4 * B3 - C2 = 6 * 7 - 5$ |                            |                            |                            |
|     | $C3 * D2 - B4 = 3 * 6 - 2$ | 27                         | $A1 * B1 - C1 = 7 * 4 - 1$ |                            | $B1 * B3 + B2 = 4 * 7 + 9$ |                            |                            |                            |
|     | $C2 * C3 + C1 = 5 * 3 + 1$ |                            | $B1 * D3 - C2 = 4 * 8 - 5$ |                            | $A4 * C4 + B4 = 6 * 6 + 2$ |                            |                            |                            |
| 17  | $B3 * C3 - A3 = 7 * 3 - 4$ | 28                         | $A1 * A3 - A2 = 7 * 4 - 1$ | 39                         | $B3 * C2 + D1 = 7 * 5 + 3$ |                            |                            |                            |
|     | $C3 * D3 - B3 = 3 * 8 - 7$ |                            | $C2 * C4 - C3 = 5 * 6 - 3$ |                            | $D2 * D4 + D3 = 6 * 5 + 8$ |                            |                            |                            |
|     | $B4 * C4 + D4 = 2 * 6 + 5$ |                            | $C4 * D4 - B4 = 6 * 5 - 2$ |                            | $C2 * D2 + B2 = 5 * 6 + 9$ |                            |                            |                            |
| 18  | $A4 * B4 + C4 = 6 * 2 + 6$ | 29                         | $B1 * C2 + D3 = 4 * 5 + 8$ | 40                         | <b>keine Darstellung</b>   |                            |                            |                            |
|     | $B4 * C4 + A4 = 2 * 6 + 6$ |                            | $C4 * D4 - B4 = 6 * 5 - 2$ |                            | 41                         | $B3 * C4 - A2 = 7 * 6 - 1$ |                            |                            |
|     | $D1 * D3 - D2 = 3 * 8 - 6$ |                            | $B1 * C2 + D3 = 4 * 5 + 8$ |                            |                            | $B3 * C2 + A4 = 7 * 5 + 6$ |                            |                            |
|     | $A4 * B4 + C4 = 6 * 2 + 6$ |                            | 30                         |                            | $A1 * B1 + C1 = 7 * 4 + 1$ | 42                         | $B2 * D4 - C3 = 9 * 5 - 3$ |                            |
|     | $B4 * C4 + A4 = 2 * 6 + 6$ |                            |                            |                            | $B3 * C3 + D3 = 7 * 3 + 8$ |                            | 43                         | $B3 * C4 + A2 = 7 * 6 + 1$ |
|     | $D1 * D3 - D2 = 3 * 8 - 6$ |                            |                            |                            | $A1 * A3 + A2 = 7 * 4 + 1$ |                            |                            | $B1 * B2 + B3 = 4 * 9 + 7$ |
| 19  | $A3 * C3 + B3 = 4 * 3 + 7$ | $B1 * B2 - B3 = 4 * 9 - 7$ |                            | 44                         | $D2 * D3 - D4 = 6 * 8 - 5$ |                            |                            |                            |
|     | $B1 * B3 - B2 = 4 * 7 - 9$ | $A1 * C3 + B2 = 7 * 3 + 9$ | 45                         |                            | $B2 * C2 - A2 = 9 * 5 - 1$ |                            |                            |                            |
| 20  | $B2 * C3 - A1 = 9 * 3 - 7$ | 31                         |                            | $D1 * D3 + D2 = 3 * 8 + 6$ | 46                         | $C2 * D3 + B1 = 5 * 8 + 4$ |                            |                            |
|     | $C3 * D2 + B4 = 3 * 6 + 2$ |                            | $A3 * B3 + C3 = 4 * 7 + 3$ | 47                         |                            | $D2 * D3 - D1 = 6 * 8 - 3$ |                            |                            |
| 21  | $C2 * D2 - B2 = 5 * 6 - 9$ | 32                         | $C3 * D3 + B3 = 3 * 8 + 7$ |                            | 48                         | $B2 * C2 + A2 = 9 * 5 + 1$ |                            |                            |
|     | $C2 * C3 + C4 = 5 * 3 + 6$ |                            | $C4 * D4 + B4 = 6 * 5 + 2$ | 49                         |                            | $D3 * D4 + D2 = 8 * 5 + 6$ |                            |                            |
| 22  | $B2 * C3 - D4 = 9 * 3 - 5$ | 33                         | $B2 * C3 + D4 = 9 * 3 + 5$ |                            | 50                         | <b>keine Darstellung</b>   |                            |                            |
|     | $C2 * D1 + B3 = 5 * 3 + 7$ |                            | $B3 * C2 - D1 = 7 * 5 - 3$ | 48                         |                            | $A4 * B3 + C2 = 6 * 7 + 5$ |                            |                            |
|     | $D2 * D4 - D3 = 6 * 5 - 8$ |                            | $C2 * C4 + C3 = 5 * 6 + 3$ |                            |                            | $B2 * D4 + C3 = 9 * 5 + 3$ |                            |                            |
| 23  | $A4 * C2 - B3 = 6 * 5 - 7$ | 34                         | $A4 * C4 - B4 = 6 * 6 - 2$ | 50                         | $B2 * D2 - C2 = 9 * 6 - 5$ |                            |                            |                            |
|     | $A3 * A4 - A2 = 4 * 6 - 1$ |                            | $B2 * C3 + A1 = 9 * 3 + 7$ |                            | 49                         | <b>keine Darstellung</b>   |                            |                            |
|     | $B3 * B4 + B2 = 7 * 2 + 9$ |                            | $D3 * D4 - D2 = 8 * 5 - 6$ |                            |                            |                            |                            |                            |
|     | $C3 * C4 + C2 = 3 * 6 + 5$ |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |

c) Der Nachweis, dass das Ergebnis 50 nicht darstellbar ist, erfordert größeren Aufwand. „Ich habe lange gesucht und nichts gefunden“ genügt als Begründung nicht. Es gibt zahlreiche Darstellungen der Zahl 50 als Trio-Term. Wir müssen nachweisen, dass keine einzige davon mit der vorgegebenen Anordnung der 16 Zahlenkarten möglich ist.

Als Summenterm sind die Darstellungen  $50 = 49 + 1 = 48 + 2 = 45 + 5 = 42 + 8$  möglich. Dabei müssen  $49 = 7 \cdot 7$ ,  $48 = 6 \cdot 8$ ,  $45 = 5 \cdot 9$  und  $42 = 6 \cdot 7$  Produkte aus zwei einstelligen Faktoren sein.

Andere Darstellungen wie  $48 = 4 \cdot 12$  sind nicht möglich, da die Trio-Zahlenkarten für das kleine Einmaleins nur von 1 bis 9 gehen. Damit sind die Summen  $50 = 46 + 4 = 44 + 6$  ausgeschlossen, die die zweistelligen Faktoren 23, 22 bzw. 11 enthalten müssen. Die Summen  $50 = 47 + 3 = 43 + 7 = 41 + 9$  sind nicht möglich, da der erste Summand keine zweistellige Primzahl sein darf.

Aus den gleichen Gründen sind nur die Differenzen  $50 = 56 - 6 = 54 - 4$  möglich. Aus diesen Überlegungen folgt, dass für eine Darstellung des Ergebnisses 50 eines der folgenden Zahlentripel unmittelbar benachbart in einer Reihe horizontal, vertikal oder diagonal auftreten muss:  $(7, 7, 1)$ ,  $(8, 6, 2)$ ,  $(9, 5, 5)$ ,  $(8, 6, 7)$ ,  $(9, 6, 4)$ . Dabei müssen die drei Zahlen nicht in dieser Reihenfolge auftreten, sie können auch anders angeordnet sein. Tatsächlich kommt keine Dreierreihe mit diesen Ziffern in der vorgegebenen Anordnung der 16 Zahlenkarten vor.

Man könnte auch als Argument anführen, dass für die Erstellung der Tabellen zu **a)** und **b)** alle Trio-Terme systematisch durchprobiert wurden, eine etwas mühselige Fleißarbeit, die die MA-THEMA-Redaktion an den Computer delegiert hat.

**d)** Das zweite nicht mögliche Ergebnis ist 40. Analog zu der Argumentation aus **c)** muss die Darstellbarkeit der Summen  $40 = 36 + 4 = 35 + 5 = 32 + 8$  sowie der Differenzen  $40 = 49 - 9 = 48 - 8 = 45 - 5 = 42 - 2$  untersucht werden. Die Zahlentripel  $(6, 6, 4)$ ,  $(9, 4, 4)$ ,  $(7, 5, 5)$ ,  $(8, 8, 4)$ ,  $(7, 7, 9)$ ,  $(8, 8, 6)$ ,  $(9, 5, 5)$ ,  $(7, 6, 2)$  kommen in dieser oder auch in vertauschter Reihenfolge nirgends als Dreierreihe horizontal, vertikal oder diagonal in der vorgegebenen Anordnung der 16 Zahlenkarten vor.

**e)** Die Abbildung zeigt die beiden Möglichkeiten, alle Ergebnisse von 1 bis 50 darstellen zu können, außerdem die Reduzierung auf je ein fehlendes Ergebnis.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 2 | 6 | 5 |

40 und 50 fehlen

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 5 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 2 | 6 | 5 |

alle Ergebnisse von 1 bis 50 darstellbar

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 2 | 7 | 5 |

36 fehlt

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 1 | 3 |
| 1 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 2 | 6 | 5 |

50 fehlt

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 7 | 6 | 5 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 8 | 2 | 6 | 5 |

40 fehlt

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 6 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 2 | 6 | 5 |

50 fehlt

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 8 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 2 | 6 | 5 |

40 fehlt

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 9 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 2 | 6 | 5 |

40 fehlt

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 1 | 3 |
| 2 | 9 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 3 | 8 |
| 6 | 2 | 6 | 5 |

50 fehlt

Die beiden fehlenden Ergebnisse 40 und 50 sind mit dem Tripel (5, 9, 5) darstellbar. Dieses entsteht als horizontale Dreierreihe, wenn die Zahl 1 in A2 durch die Zahl 5 ersetzt wird. Nach a) ist man auf die Zahl 1 in A2 für die Darstellung des Ergebnisses 1 nicht angewiesen, denn außer der Dreierreihe A2, B3, C4, gibt es noch die Darstellung mit B1, C1, D1 als  $4 \cdot 1 - 3$  oder  $4 - 3 \cdot 1$ .

Ändert man die Zahl in A2, fallen damit ausschließlich solche Ergebnisse weg, für die es mindestens eine weitere Darstellung gibt, in der A2 nicht vorkommt. **Der Zellbezug A2** ist in den Tabellen zu a) und b) blau gekennzeichnet. Ersetzt man die Zahl in A2 durch 2, 6, 8 oder 9, reduziert dies immerhin die Anzahl fehlender Ergebnisse von 2 auf 1, siehe unten.

Alternativ könnte das Tripel (9, 5, 5) erzeugt werden, indem man die Zahl 6 in D2 zu einer 5 abändert. Das ist jedoch keine gute Idee, da die 6 in D2 für die Ergebnisse 15, 45 und 49 benötigt wird, für die jeweils nur eine einzige Darstellung existiert.

Ersetzt man aber die Zahl 6 in C4 durch die Zahl 7, sind ebenfalls alle Ergebnisse von 1 bis 50 darstellbar. Das Ergebnis 40 erhält man aus der horizontalen Dreierreihe A4, B4, C4 mit dem Term  $6 \cdot 7 - 2$ , den Wert 50 mit der diagonalen Dreierreihe A2, B3, C4 und dem Term  $7 \cdot 7 + 1$ .

Ändert man die Zahl in C4, fallen dadurch überwiegend solche Ergebnisse weg, für die es mindestens eine weitere Darstellung gibt, in der C4 nicht vorkommt. **Der Zellbezug C4** ist in den Tabellen zu a) und b) rot gekennzeichnet. Lediglich für das Ergebnis 33 gibt es nur eine einzige Darstellung. Mit der Zahl 6 in C4 ist dies die vertikale Dreierreihe C2, C3, C4 mit dem Term  $5 \cdot 6 + 3$ . Ersetzt man die Zahl in C4 durch eine 7, kann statt dessen die horizontale Dreierreihe B4, C4, D4 für die Darstellung  $5 \cdot 7 - 2$  verwendet werden.

Bei der Suche ist es nicht abwegig, weitere Veränderungen zu prüfen, z. B.

| Änderung | Tripel für 50              | Tripel für 40            | fehlt                       |
|----------|----------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| 7 in B1  | horizontal $7 \cdot 7 + 1$ | vertikal $7 \cdot 7 - 9$ | 36 diagonal $5 \cdot 8 - 4$ |
| 7 in B4  | —                          | vertikal $7 \cdot 7 - 9$ | 50                          |
| 8 in A4  | horizontal $6 \cdot 8 + 2$ | —                        | 40                          |
| 6 in A2  | —                          | vertikal (6, 4, 6)       | 50                          |
| 8 in A2  | diagonal $7 \cdot 8 - 6$   | —                        | 40                          |
| 9 in A2  | vertikal $9 \cdot 6 - 4$   | —                        | 40                          |
| 2 in A2  | —                          | $7 \cdot 6 - 2$          | 50                          |

Dies sind alle Möglichkeiten, die Anzahl fehlender Ergebnisse von 2 auf 1 zu reduzieren. Alle anderen Veränderungen sind dagegen echte Verschlimm-besserungen oder belassen es bei zwei fehlenden Ergebnissen – dies müssen aber nicht immer 40 und 50 sein.