Schleswig-Holstein
Der echte Norden

Schleswig-Holstein
Ministerium für Allgemeine und Berufliche Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur

Mündliche Abiturprüfung und Präsentationsprüfung

im Fach

Mathematik

auf grundlegendem Niveau (P4, P5)

Hinweise
und Beispielaufgaben

September 2023

Vorbemerkungen

Im Zuge der Oberstufenreform werden im Fach Mathematik neben Kursen auf erhöhtem Niveau auch wieder Kurse auf grundlegendem Niveau angeboten. Diese Differenzierung in Niveaustufen bringt es mit sich, dass neben den auf erhöhtem Niveau zentral gestellten schriftlichen Abiturprüfungen das Fach Mathematik ab dem Abitur 2024 auch als P4- bzw. P5-Prüfungsfach, auf grundlegendem Niveau, an Bedeutung gewinnen kann.

Die Schülerinnen und Schüler können dabei wählen, ob sie die P4- bzw. P5-Prüfung als klassische mündliche Prüfung gemäß § 24 der OAPVO oder als Präsentationsprüfung gemäß § 27 OAPVO ablegen möchten. Während mündliche Prüfungen zumindest als Zusatzprüfungen auf erhöhtem Anforderungsniveau bekannt sind, gibt es mit Präsentationsprüfungen im Fach Mathematik an den Gymnasien und Gemeinschaftsschulen mit Oberstufe bislang keine Erfahrungen.

Diese Handreichung soll für Mathematik-Lehrkräfte an Gymnasien und Gemeinschaftsschulen mit Oberstufe auf zwei Ebenen Orientierung bieten. So sind zum einen die Rechtsgrundlagen mit ergänzenden Hinweisen zusammengestellt. Zum anderen bieten exemplarisch ausgearbeitete Aufgaben konkrete Orientierung hinsichtlich der Planung und Durchführung der mündlichen Prüfungen bzw. Präsentationsprüfungen auf grundlegendem Niveau. Die Aufgaben sind exemplarisch und als Anregung zu verstehen. Nicht jede Aufgabe muss in genau dieser Form formuliert sein.

Grundsätzlich sollte beachtet werden, dass ein differenzierter Erwartungshorizont bei klassischen mündlichen Prüfungen auch zur Entlastung des Fachausschusses dient, um in angemessener Zeit die Beurteilung der Prüfungsleistung vornehmen zu können.

Bei Präsentationsprüfungen erstellt die Lehrkraft einen Erwartungshorizont erst nach Vorlage der konkreten Dokumentation durch den Prüfling. Die in dieses Dokument aufgenommenen Tabellen zur „erwarteten Bearbeitung“ der jeweiligen Aufgabe dienen lediglich der Orientierung für die Lehrkräfte, womit ein Prüfling sich bei der Aufgabenstellung befassen könnte oder sollte. Sie sind noch kein Erwartungshorizont.

Mündliche Abiturprüfungen im Fach Mathematik (grundlegendes Niveau)

I Rechtsgrundlagen

§ 24 OAPVO (2021)

(1) Die mündliche Prüfung wird als Einzelprüfung durchgeführt. Sie dauert in der Regel 20 Minuten. Ist Sport mündliches Prüfungsfach, umfasst die Prüfung einen fachpraktischen und einen theoretischen (mündlichen) Teil. Im Fach Darstellendes Spiel umfasst die mündliche Prüfung einen fachpraktischen Teil mit Ergebnispräsentation und kurzem Gespräch und einen theoretischen (mündlichen) Teil. Der fachpraktische Teil kann jeweils zeitlich vorgezogen werden.

(2) Die mündliche Prüfung besteht aus zwei Aufgaben, die dem Prüfling zur Vorbereitung schriftlich vorgelegt werden. Die Aufgaben für die mündliche Prüfung stellt die Prüferin oder der Prüfer im Einvernehmen mit der oder dem Vorsitzenden des Fachausschusses. Die oder der Vorsitzende des Fachausschusses kann eine Änderung der Aufgabenstellung verlangen. Die Aufgaben, die unterrichtlichen Voraussetzungen und die sich daraus ergebenden fachlichen Anforderungen der Aufgaben werden den Mitgliedern des Fachausschusses drei Unterrichtstage vor der mündlichen Prüfung ausgehändigt. Die fachlichen Anforderungen richten sich nach den Fachanforderungen für die Oberstufe. Die mündliche Prüfung darf keine inhaltliche Wiederholung der schriftlichen Leistungsnachweise der Qualifikationsphase oder der schriftlichen Prüfung sein. Sie darf sich nicht auf Sachgebiete eines Schulhalbjahres beschränken. Für die Durchführung von Nachteilsausgleich und die Gewährung von Notenschutz gelten § 16 Absatz 3 SchulG und die aufgrund von § 16 Absatz 3 Satz 4 und Absatz 4 SchulG erlassenen Rechts- und Verwaltungsvorschriften.

(3) Die Prüflinge bereiten sich unter Aufsicht einer Lehrkraft vor. Zur Vorbereitung darf der Prüfling nur das von der Schule gestellte Papier und die genehmigten Hilfsmittel benutzen. Die Vorbereitungszeit beträgt 30 Minuten. Mit Genehmigung der Abiturprüfungskommission darf die Vorbereitungszeit auf höchstens eine Zeitstunde verlängert werden, wenn dies für experimentelle oder gestalterische Aufgaben notwendig ist. Bei experimentellen Aufgaben übernimmt eine fachkundige Lehrkraft die Aufsicht und achtet auf die Einhaltung der Sicherheitsbestimmungen.

(4) Der Prüfling behandelt die ihm gestellten Aufgaben in selbst gewählter Reihenfolge zunächst in freiem Vortrag, bei dem er seine während der Vorbereitungszeit angefertigten Aufzeichnungen benutzen kann. In einem anschließenden Prüfungsgespräch soll er ergänzende oder weitergehende Kenntnisse und Fähigkeiten nachweisen.

(5) Die oder der Vorsitzende des Fachausschusses sowie im Falle des § 23 Absatz 1 Satz 3 die oder der Vorsitzende der Abiturprüfungskommission und die Schulleiterin oder der Schulleiter können in die Prüfung eingreifen. Sie achten darauf, dass beide Aufgaben in angemessenem Umfang geprüft werden. Wenn der Verlauf der Prüfung es nahelegt, kann die oder der Vorsitzende des Fachausschusses zulassen, dass sich auch andere Mitglieder am Prüfungsgespräch beteiligen.

§ 25 OAPVO (2021)

(1) Nach jeder mündlichen Prüfung berät der Fachausschuss über Note und Punktwert. Die Prüferin oder der Prüfer schlägt zunächst eine Note vor, die protokolliert wird. Andere fachkundige Lehrkräfte, die bei der mündlichen Prüfung anwesend sind, können von der oder dem Vorsitzenden des Fachausschusses über ihre Beurteilung der mündlichen Leistung befragt werden. Nach der Beratung gibt jedes Mitglied, beginnend mit der Prüferin oder dem Prüfer, seine endgültige Bewertung in Note und Punktzahl an.

(2) Das Ergebnis der mündlichen Prüfung ist der nach Absatz 1 Satz 4 mit Mehrheit der Mitglieder festgesetzte Punktwert. Kommt diese für einen bestimmten Punktwert nicht zustande, setzt die oder der Vorsitzende des Fachausschusses unter Berücksichtigung der genannten Punktzahlen und der vorgetragenen Argumente das Ergebnis der Prüfung fest.
(3) Im Ausnahmefall können dem Prüfling auf Vorschlag des Fachausschusses und mit Zustimmung der oder des Vorsitzenden der Abiturprüfungskommission oder auf deren oder dessen Vorschlag neue Aufgaben gestellt werden.

Fachanforderungen Mathematik, Kapitel III 6.2 „Die mündliche Abiturprüfung“

Die mündliche Prüfung bezieht sich auf mindestens zwei der Sachgebiete Analysis, analytische Geometrie und Stochastik. Die Prüfungsaufgabe ist so zu gestalten, dass mehrere Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen berücksichtigt werden, so dass mathematisches Arbeiten in der Oberstufe hinreichend erfasst wird.

Die Aufgabenstellung muss einen einfachen Einstieg erlauben und so angelegt sein, dass unter Beachtung der Anforderungsbereiche, die auf der Grundlage eines Erwartungshorizontes den Aufgabenteilen zugeordnet werden, grundsätzlich jede Note erreichbar ist.

Die Aufgabenstellung für die mündliche Prüfung unterscheidet sich von der für die schriftliche Prüfung. Umfangreiche Rechnungen und zeitaufwändige Konstruktionen sind zu vermeiden. Vielmehr sollen die Prüflinge mathematische Sachverhalte im freien Vortrag darstellen und im Gespräch zu mathematischen Fragen Stellung nehmen.

Die Prüferin oder der Prüfer legt dem Prüfungsausschuss vor der Prüfung einen schriftlichen Erwartungshorizont vor, in dem die erwarteten inhaltlichen Ergebnisse skizziert werden. Dabei ist anhand der untenstehenden Kriterien im Hinblick auf die vorgelegte Aufgabenstellung zu konkretisieren, wann Leistungen mit

„ausreichend“ und wann sie mit „gut“ bis „sehr gut“ bewertet werden sollen. Darüber hinaus werden im Erwartungshorizont Aussagen zu den unterrichtlichen Voraussetzungen und zur Selbstständigkeit der Prüfungsleistung getroffen.

Bei der Bewertung sollen vor allem folgende Kriterien berücksichtigt werden:

- Umfang und Qualität der nachgewiesenen mathematischen Kompetenzen,
- sachgerechte Gliederung und folgerichtiger Aufbau der Darstellung, Beherrschung der Fachsprache, Verständlichkeit der Darlegungen, adäquater Einsatz der Präsentationsmittel und die Fähigkeit, das Wesentliche herauszustellen,
- Verständnis für mathematische Probleme sowie die Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen und darzustellen, mathematische Sachverhalte zu beurteilen, auf Fragen und Einwände einzugehen und gegebene Hilfen aufzugreifen,
- Kreativität, Reflexionsfähigkeit und Selbstständigkeit im Prüfungsverlauf.

Kommt ein Prüfling im Verlauf der mündlichen Prüfung nicht über die reine Reproduktion gelernten Wissens hinaus, so kann die Note nicht besser als „ausreichend (4 Punkte)“ sein. Soll die Leistung mit „sehr gut“ beurteilt werden, so muss dem Prüfungsgespräch ein eigenständiger Vortrag vorausgehen. Im Vortrag oder im Verlauf des Gesprächs müssen auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

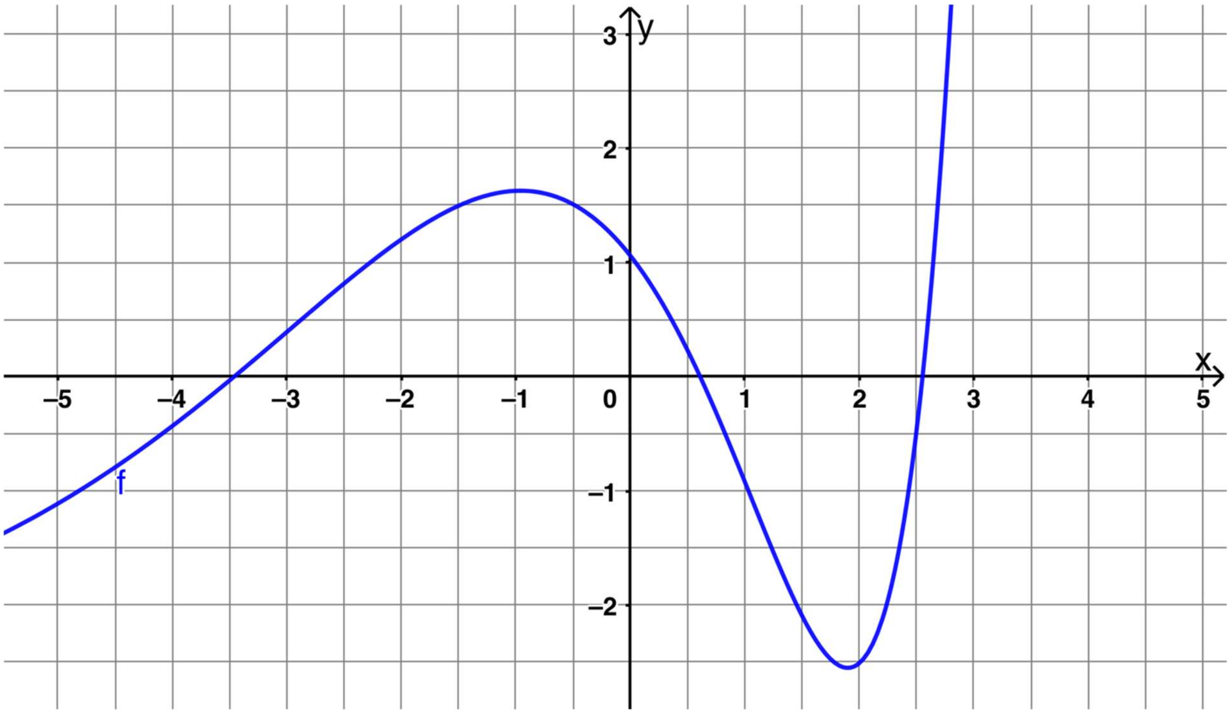
II Hinweise

- In mündlichen Prüfungen verwendete Aufgaben dürfen an der Schule im jeweils folgenden Jahr nicht wiederverwendet werden.
- Bei der Formulierung der Aufgaben sind die in den Fachanforderungen vorgegebenen Operatoren zu verwenden.
- Anregungen für das Erstellen von mündlichen Prüfungsaufgaben findet man z. B. bei den hilfsmittelfreien Aufgaben der zentralen Abiturprüfungen aus den vergangenen Jahren.
- Die Aufgabenteile sollten inhaltlich aufeinander aufbauen, um mehrfaches Eindenken in Kontexte zu vermeiden. Zugleich sollten die Aufgabenteile möglichst unabhängig voneinander lösbar sein.
- Das Einbeziehen von Skizzen und Diagrammen ist ausdrücklich zu empfehlen, weil es die Verständlichkeit der Darlegungen unterstützen kann.
- Das Prüfungsgespräch soll nicht aus einer bloßen Reihung von kleinschrittigen Fragen oder Impulsen bestehen. Es kann inhaltlich an den Vortrag anknüpfen.

III Beispielaufgaben

Beispiel für eine Aufgabe zum mündlichen Abitur auf grundlegendem Niveau
(Sachgebiet Analysis)

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Bestimmen Sie mithilfe des Graphen näherungsweise $f'(0)$ und geben Sie näherungsweise eine Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ an.

b) F ist eine Stammfunktion von f.
Erläutern Sie qualitativ den Verlauf des Graphen von F für $x > 0$.

c) Ermitteln Sie näherungsweise $\int_{-3,5}^{0} f(x)\, dx$.
Prüfen Sie mithilfe der Abbildung, ob es eine positive reelle Zahl a gibt, für die gilt:
$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$.

Hinweis:
In der Prüfung steht Ihnen eine Dokumentenkamera zur Verfügung, so dass Sie Ihre Ausführungen auch visualisieren können.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th></th><th>Erwartete Leistung des Prüflings</th><th>Unterrichtliche Voraussetzungen</th><th>AFB</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Skizze der Tangente im Punkt $P(0|f(0))$ und Ablesen der Steigung: $f'(0) \in (-1{,}5;\ -1)$
(Genauer gilt: $f'(0) \approx\ -1{,}27$)

Mögliche Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$:
$x_0 \approx -1$ oder $x_0 \approx 1{,}9$</td><td>Anwendung etablierten Grundlagenwissens zum Ableitungsbegriff

siehe oben</td><td>I

I</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Eigenschaften des Graphen von F:
Zwischen $x = 0$ und $x \approx 0{,}6$ ist der Graph von F monoton wachsend (f hat positive Werte).
F hat ein lokales Maximum bei $x \approx 0{,}6$ (Nullstelle von f; VZW von + nach - beim Graphen von f)
Zwischen $x \approx 0{,}6$ und $x \approx 2{,}6$ ist der Graph von F monoton fallend (f hat negative Werte).
F hat einen Wendepunkt an der Stelle $x \approx 1{,}9$ (Minimum von f, also Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve).
F hat ein lokales Minimum bei $x \approx 2{,}6$ (Nullstelle von f; VZW von - nach + beim Graphen von f)
Für $x > 2{,}6$ ist der Graph von F monoton wachsend.</td><td>Übertragung aus dem Unterricht bekannter, komplexer Zusammenhänge auf einen vergleichbaren Sachverhalt</td><td>II</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Kästchenzählen ergibt: $A \approx \frac{14}{4} = 3{,}5$
(genauer: $\int_{-3{,}5}^{0} f(x)\,dx \approx 3{,}82$)

Für jede positive, reelle Zahl a gilt:
$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx > 0$
Begründung über die anschauliche Betrachtung des orientierten Flächeninhalts, zum Beispiel mittels Fallunterscheidung:

$a \in [0; 0{,}6]$: $f(x) > 0$ für $x \in [-0{,}6; 0{,}6]$
(Annäherung an die Fragestellung)
$a \in (0{,}6; 2{,}6]$: $\left|\int_{-a}^{0{,}6} f(x)\ dx\right| > \left|\int_{0{,}6}^{a} f(x)\ dx\right|$
Für $a > 2{,}6$ wächst der Wert des Integrals mit a stark an, da für $x > 3{,}5$ gilt: $f(x) \gg |f(-x)|$</td><td>bekanntes, aber ungewohntes Vorgehen

Übertragung des bekannten Konzepts des orientierten Flächeninhalts auf eine unbekannte Situation, dynamische Betrachtung erforderlich, sprachlich anspruchsvoll</td><td>II

III</td></tr>
</table>

Bewertung:
Eine ausreichende Leistung erfordert, dass Aufgabenteil a) weitgehend korrekt bearbeitet wird und dass (ggfs. im Prüfungsgespräch) ein grundlegendes Verständnis der Zusammenhänge zwischen Funktion, Ableitungsfunktion und Stammfunktion erkennbar wird.
Für eine gute Leistung sollten darüber hinaus die Aufgabenteile zum AFB II weitgehend vollständig und korrekt unter Verwendung einer adäquaten Fachsprache vorgetragen werden.
Für eine sehr gute Leistung werden außerdem überzeugende Überlegungen zu dem Aufgabenteil im AFB III und die sinnvolle Auseinandersetzung mit mindestens einer weiterführenden, vertiefenden Frage erwartet.

Mögliche Anschlussfragen für das Prüfungsgespräch:

- Untersuchen Sie, ob es sich bei der zugrundeliegenden Funktion um eine ganzrationale Funktion dritter Ordnung handeln kann.

- Skizzieren Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $p(x) = (x + 1)^2 - 1{,}5$ (oder die Gerade mit der Funktionsgleichung $p(x) = -0{,}5\,x$) in das Koordinatensystem.
  Die Graphen von p und f schließen eine Fläche ein. Beschreiben Sie ein rechnerisches Vorgehen, um den Flächeninhalt dieser Fläche zu ermitteln.

Beispiel für eine Aufgabe zum mündlichen Abitur auf grundlegendem Niveau
(Sachgebiet Analysis)

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung

Was wir über das Insektensterben wissen – und was nicht

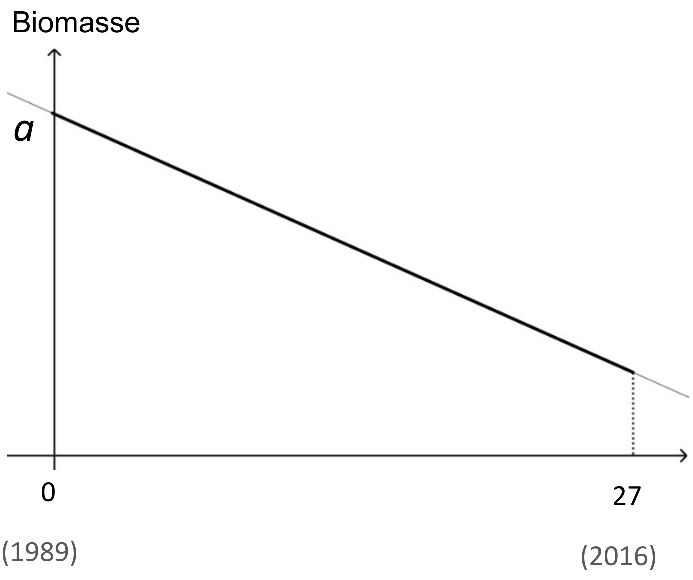
Hobbybiologen des entomologischen Vereins Krefeld lieferten mit ehrenamtlichen Untersuchungen wichtige Daten zum Nachweis des Insektenschwunds in Deutschland. Über 27 Jahre hinweg registrierten sie in Naturschutzgebieten verschiedener Bundesländer regelmäßig die Biomasse systematisch eingefangener Insekten. Dabei kamen insgesamt mehrere Millionen Tiere mit einer Gesamtmasse von 54 kg zusammen.

Das stille Sterben

Das Insektensterben ist längst traurige Realität: Einer Studie aus Krefeld zufolge ist von 1989 bis 2016 die Insekten-Biomasse um rund 76% zurückgegangen.

„Wir haben ein echtes Problem“, stellte der Biologe fest.

a) Aus den oben abgebildeten Medien geht nicht hervor, welche Insektenmasse im ersten Jahr der Untersuchung registriert wurde. Dies lässt sich mit einem mathematischen Modell rekonstruieren:
Die jährlich registrierte Biomasse wird durch eine lineare Funktion angenähert.
Erläutern Sie die Darstellung der Situation in dem abgebildeten Diagramm und interpretieren Sie folgende Gleichung im Sachzusammenhang:
$\int_0^{27}\left(a - \frac{0{,}76}{27} a \cdot t\right)\, dt = 54$ (*)



b) Bestimmen Sie den Parameter a aus der Gleichung (*).

c) Begründen Sie, warum zumindest auf lange Sicht eine fallende lineare Funktion im beschriebenen Kontext kein passendes Modell sein kann und skizzieren Sie einen Verbesserungsvorschlag.

Erwartungshorizont

	Erwartete Leistung des Prüflings	**Unterrichtliche Voraussetzungen**	**AFB**
a)	In dem Diagramm ist die registrierte Biomasse eines Jahres in Abhängigkeit der Jahre seit 1989 aufgetragen. Die registrierte Biomasse im Jahr 1989 ist unbekannt und wird hier mit a bezeichnet. Die Gesamtmasse von 54 kg entspricht im Kontext dem Gesamtbestand von 1989 bis 2016 und mathematisch dem Flächeninhalt zwischen der Geraden und der *x*-Achse im Intervall [0; 27].	Das Erfassen und Strukturieren von Informationen aus Texten und Darstellungen ist eine geübte Teilkompetenz des mathematischen Kommunizierens.	I
	Dieser Flächeninhalt kann mit dem Integral berechnet werden. Bei linearem Änderungsverhalten der Biomasse ergibt sich für jedes Jahr ein Rückgang um $\frac{1}{27}$ von 76% des Anfangswerts a, also hat die Gerade die Steigung $-\frac{0{,}76}{27}\cdot a$.	Die Flächeninterpretation des Integrals ist aus dem Unterricht bekannt und geübt. Rückgriff auf Kenntnisse aus der Sek I	II
b)	$\int_0^{27}\left(a-\frac{0{,}76}{27}\cdot a\cdot t\right)dt = 54$ $\left[a\cdot\left(t-\frac{0{,}76}{27}\cdot 0{,}5\cdot t^2\right)\right]_0^{27} = 54$ $\frac{837}{50}\cdot a = 54$ $a \approx 3{,}23$	bekanntes Verfahren in ungewohntem Zusammenhang	II
c)	Eine lineare Funktion mit negativer Steigung würde auch negative Werte annehmen. Es ist jedoch nicht möglich, Insekten mit negativer Biomasse einzufangen. Alternativ: Eine konstante negative Änderungsrate bedeutet, dass der jährliche (konstante) Rückgang der registrierten Biomasse im Verhältnis zum (sinkenden) Bestand einen zunehmend größeren Anteil ausmacht. Das erscheint unrealistisch.	Transfer erforderlich	III
	Besser: exponentielles Wachstum ansetzen → Graph im Diagramm skizzieren → Aussage über den Bestandsgraphen treffen → Bestandsgraphen skizzieren		II

Bewertung:
Für eine ausreichende Leistung wird eine weitgehend korrekte Beschreibung der Graphik in Teilaufgabe a) und ggf. auf Nachfrage eine Beschreibung des rechnerischen Integrierens (zu Aufgabenteil b)) erwartet.
Eine gute Leistung erfordert korrekte Darstellungen zu den Aufgaben a) und b) in überwiegend eigenständigem Vortrag unter Verwendung adäquater Fachsprache.
Für eine sehr gute Leistung müssen außerdem die Transferaufgabe im AFB III und mindestens eine vertiefende Frage nachvollziehbar beantwortet werden.

Mögliche Fragen und Impulse für das Prüfungsgespräch:

- Üblicherweise ist es nicht möglich, ohne „Startwert“ von einer Änderungsrate auf einen Bestand zu schließen. Erläutern Sie, warum es hier dennoch gelingt.

- Falls die Gleichung in Aufgabenteil b) komplett mit dem Taschenrechner gelöst wurde:
  Erläutern Sie die ersten Schritte einer hilfsmittelfreien Lösung von Aufgabenteil b).

- Kritiker behaupten, dass das Ergebnis der Studie weniger aufsehenerregend gewesen wäre, wenn ein Jahr später mit den Untersuchungen begonnen worden wäre. Erläutern Sie mögliche mathematische Zusammenhänge, die dieser Behauptung zugrunde liegen könnten.

- Geben Sie ein Beispiel für einen Kontext, bei dem tatsächlich ein lineares negatives Wachstum vorliegt.

Hinweis:
Die vorliegende Aufgabe entstand auf der Grundlage des Artikels *Insektenschwund* von Heinz Böer aus der ISTRON-Schriftenreihe GRAFENHOFER / MAAß: *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6*, SpringerSpektrum 2019

Beispiel für eine Aufgabe zum mündlichen Abitur auf grundlegendem Niveau
(Sachgebiet Analytische Geometrie)

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung

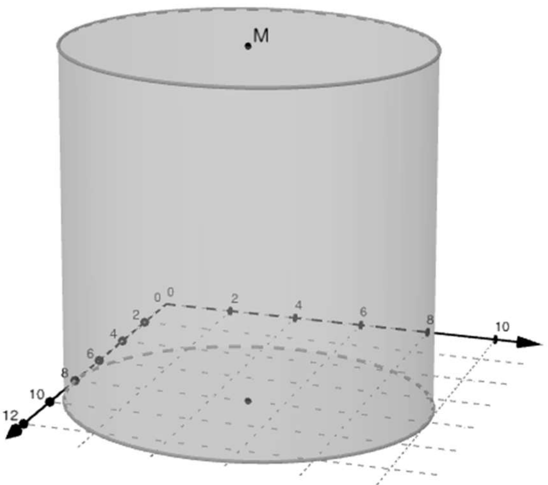
In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius $5\ LE$ und der Höhe $10\ LE$ gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt. $M(8|\ 5|\ 10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

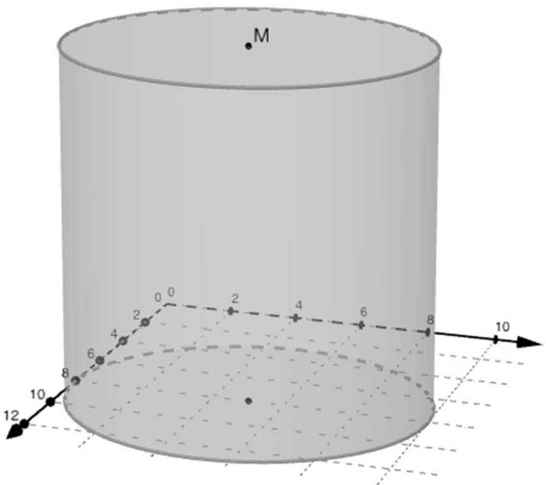
Hinweis: Visualisieren Sie Ihre Überlegungen an einem der abgebildeten Zylinder (s. u.). Sie können Ihre Skizze(n) in der Prüfung über die Dokumentenkamera präsentieren.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(5|\ 1|\ 10)$ auf dem Rand der Deckfläche liegt und die Verbindungsgerade von S und M durch den Punkt $T(11|\ 9|\ 10)$ verläuft.

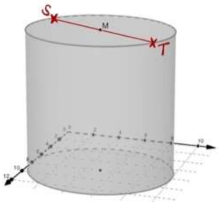
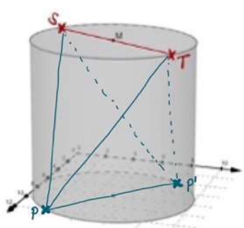
b) Der Punkt $P(12|\ 2|\ 0)$ liegt auf dem Rand der Grundfläche.
Stellen Sie eine Parametergleichung für die Ebene E_1 auf, in der das Dreieck TSP liegt. Weisen Sie nach, dass die Ebene E_1 und die Ebene E_2: $8\,x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 34$ einen gemeinsamen Normalenvektor haben.

c) Zeichnen Sie von Punkt P aus einen Durchmesser durch die Grundfläche des Zylinders. Bewegen Sie gedanklich den Punkt P entlang dieses Durchmessers, bis er im Punkt P' wieder auf den Rand der Grundfläche trifft.
Geben Sie an, welcher Körper durch die Punkte T, S, P und P' gegeben ist.





Erwartungshorizont

	Erwartete Leistung des Prüflings	Unterrichtliche Voraussetzungen	AFB
a)	S hat die x_3-Koordinate 10, liegt also in der Ebene der Deckfläche des Zylinders. $\lvert\overrightarrow{SM}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{3^2+4^2} = 5,$ d. h. der Abstand von S zu M entspricht dem Zylinderradius. 	Grundlagenwissen über Kreise aus der Sek. I und Anwenden geübter Arbeitstechniken	I, II
	$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \mu \cdot \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mu \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu = 2$ Also läuft die Gerade durch den Punkt T.	geübte Arbeitstechnik	I
b)	Ebenengleichung aufstellen, z. B.: $E_1\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PS} + \mu \cdot \overrightarrow{PT}\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ also $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	Umsetzung direkter Aufforderung mit Standardverfahren	I
	Normalenvektor aus der Koordinatenform von E_2 ablesen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ Überprüfen der Orthogonalität von $\vec{n}$ zu den Richtungsvektoren von E_1 mittels Skalarprodukt	Selbstständiges Auswählen und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten	II
c)	Darstellung in der Skizze:  Es entsteht eine schiefe Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. *(4 Ecken, 6 Kanten, 4 Dreiecksflächen)*	Herstellen von Zusammenhängen	II, III

Bewertung:
Für eine ausreichende Leistung wird eine weitgehend korrekte Bearbeitung des Aufgabenteils a) sowie des reproduktiven Anteils von Aufgabenteil b) erwartet.
Eine gute Leistung erfordert darüber hinaus neben den Aufgabenteilen im AFB II einen eigenständigen Vortrag der vorbereiteten Überlegungen unter Verwendung adäquater Fachsprache.
Für eine sehr gute Leistung müssen außerdem die Transferaufgabe im AFB III und mindestens eine vertiefende Frage nachvollziehbar beantwortet werden.

Mögliche Fragen und Impulse für das Prüfungsgespräch:

- Interpretieren Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe b) (die Ebenen haben einen gemeinsamen Normalenvektor) geometrisch.

- Beschreiben Sie ein mögliches Vorgehen, um herauszufinden, ob die Ebenen E_1 und E_2 identisch sind.

- Betrachten Sie noch einmal die Parameterdarstellung von E_1. Leiten Sie mithilfe Ihrer Skizze anschaulich Bedingungen dafür her, dass ein Punkt dieser Ebene tatsächlich im Dreieck liegt.

- Vergleichen Sie allgemein die Parameter- und die Koordinatendarstellung für Ebenen hinsichtlich Anschaulichkeit und Nützlichkeit beim Rechnen.

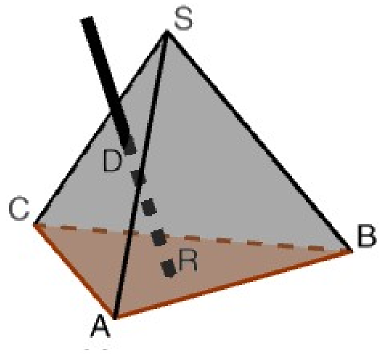
- Das Dreieck TSP ist gleichschenklig. Beschreiben Sie ein Vorgehen, um die Winkelgrößen zu bestimmen.

Hinweis:
Die vorliegende Aufgabe entstand auf der Grundlage der HMF-Aufgabe 4 der schriftlichen Abiturprüfung in Schleswig-Holstein aus dem Jahr 2020.

Beispiel für eine Aufgabe zum mündlichen Abitur auf grundlegendem Niveau (Sachgebiet Analytische Geometrie)

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner

Die Firma *Moonkist* verkauft Säfte für Kinder in kleinen Verpackungen, in die ein Trinkhalm gesteckt werden kann. Die Verpackung kann näherungsweise durch eine Dreieckspyramide beschrieben werden.



Zu Werbezwecken soll auf dem Firmengelände eine XXL-*Moonkist*-Pyramide auf einem Gerüst montiert werden.

B

Zur Planung der Konstruktion wird ein mathematisches Modell in einem Koordinatensystem angefertigt, dessen Ursprung eine Ecke des Firmengebäudes darstellt. Als Ecken der Pyramidengrundfläche werden die Punkte A(4|0|6), B(2|4|4) und C(0|2|8) gewählt. Die Spitze der Pyramide liegt bei S(4,5|4,5|8,5).

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Natur.

Aufgaben:

a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene E auf, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.

b) Ein langes Rohr soll den Trinkhalm darstellen. Es durchstößt eine Seitenfläche der Pyramide (im Modell Punkt D) und soll auf der Grundfläche (im Punkt R) befestigt werden. Im Inneren der Pyramide verläuft senkrecht zur Grundfläche ein weiteres Rohr durch die gegenüberliegende Spitze (Punkt S).
Beschreiben Sie einen Lösungsweg, um die gegenseitige Lage der beiden Rohre im Modell zu untersuchen. (Dabei können Sie die Dicke der Rohre vernachlässigen.)

c) Auf dem Firmengelände steht ein Fahnenmast, dessen Spitze im Modell durch den Punkt P(3|3|4) beschrieben werden kann.
Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene E liegt und begründen Sie, dass der Fahnenmast beim Bau der Pyramide dennoch nicht stört.

(Falls Sie in Aufgabenteil a) keine Ebenengleichung aufgestellt haben, verwenden Sie
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R}.$*)*

Erwartete Leistung		**Unterrichtliche Voraussetzungen**	**AFB**
a)	Eine Parametergleichung der Ebene lautet: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$	bekanntes Verfahren	I
b)	Zwei Geradengleichungen müssen aufgestellt werden. Für das zweite Rohr muss ein Normalenvektor zu E als Richtungsvektor gefunden werden. Das Gleichsetzen der Geradengleichungen führt zu einem LGS. Falls das LGS • keine Lösung hat, liegen die Geraden parallel oder windschief zueinander, so dass sich die Rohre (bei ausreichendem Abstand) nicht stören. • eine eindeutige Lösung hat, haben die Geraden einen Schnittpunkt, so dass die Installation der Rohre so nicht möglich ist. Die Identität der Geraden kann aufgrund des Sachzusammenhangs ausgeschlossen werden.	für andere Aufgaben-beispiele behandelt sinnvolle Bezüge zum Sach-zusammenhang müssen hergestellt werden	I,II
c)	Punktprobe: Ausgehend von der Ebenengleichung aus Teil a) des EWH ist folgendes LGS zu lösen: $3=4-4r-2s$ $3=0+2r+4s$ $4=6+2r-2s$ Der Taschenrechner liefert mit den Parametern $r=-\frac{1}{6}$ und $s=\frac{5}{6}$ eine eindeutige Lösung, also liegt der Punkt P in der Ebene E. Der Punkt B hat die z-Koordinate 4, d.h. die Pyramide befindet sich hier 4 m über dem Boden. Da die x- und y-Koordinaten von Punkt B aber nicht mit denen von Punkt P übereinstimmen, berührt der Mast die Pyramide in diesem Punkt nicht. Die z-Koordinaten der Punkte A und C sind jeweils größer als 4. Die Dreiecksfläche ABC hat also im Punkt B mit 4 m Höhe ihren niedrigsten Punkt und der Mast steht unterhalb der Dreiecksfläche. *Alternativ:* Begründung über den negativen Wert des Parameters r bei der Punktprobe (s.o.).	Transfer und souveräner Umgang mit dem Modell erforderlich Überlegung war kein Unterrichtsinhalt	I,II III

Bewertung:

Eine ausreichende Leistung erfordert die weitgehend korrekte Bearbeitung von Aufgabenteil a) und des ersten Teils von b).

Für eine gute Leistung sollten darüber hinaus die Aufgabenteile zum AFB II weitgehend vollständig und korrekt unter Verwendung einer adäquaten Fachsprache gelöst werden.

Für eine sehr gute Leistung werden außerdem zielführende Ansätze zu dem Aufgabenteil im AFB III und mindestens eine weiterführende, vertiefende Überlegung erwartet.

Mögliche Anschlussfragen und Impulse für das Prüfungsgespräch:

- Geraden zu den Rohren skizzieren lassen
- Lösungsweg beschreiben lassen, um das Grundflächendreieck auf Gleichseitigkeit zu überprüfen
- Ansatz zur Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks *ABC* nennen lassen
- Normalenform der Ebenengleichung bestimmen
- Wo müsste der Mast stehen, damit er als Stützpfeiler dienen könnte?
- In Aufgabenteil b) wurde die Dicke des Rohrs vernachlässigt.
  → Konsequenzen aufzeigen (Modellkritik)
  → Modell verbessern

Beispiel für eine Aufgabe zum mündlichen Abitur auf grundlegendem Niveau

(Sachgebiet Stochastik)

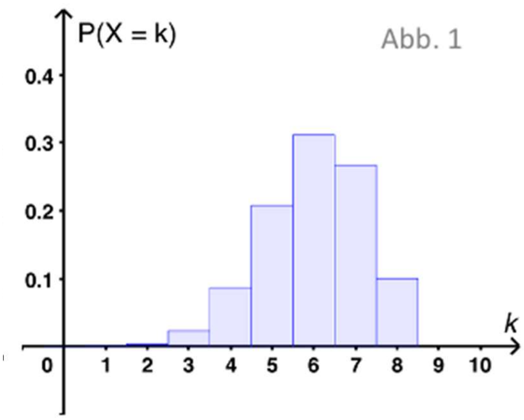
Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung

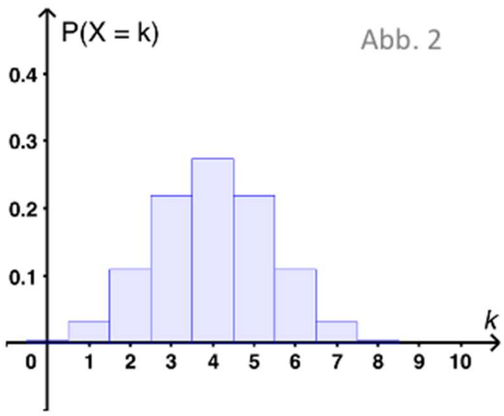
Beim Wurf einer Münze sind die Ergebnisse „Wappen“ oder „Zahl“ möglich. Im Folgenden geht es um eine gezinkte Münze, bei der das Ergebnis „Wappen“ auf lange Sicht dreimal so oft vorkommt wie das Ergebnis „Zahl“.

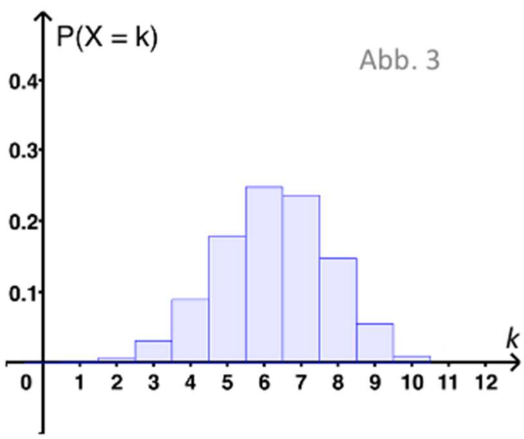
a) Wählen Sie aus den unten angegebenen Abbildungen eine solche aus**,** die zu dem Zufallsexperiment eines achtfachen Wurfes mit der gezinkten Münze passen kann.
Erläutern Sie das Diagramm und begründen Sie Ihre Entscheidung.

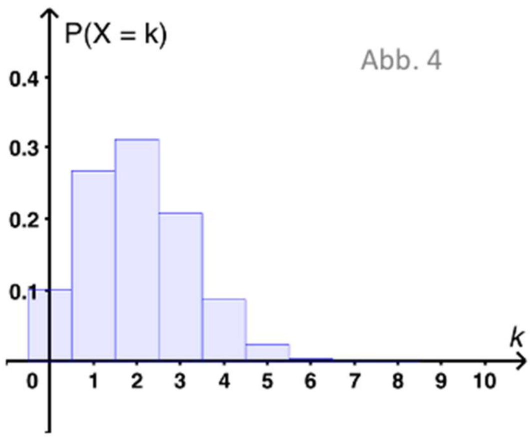
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Münze bei acht Würfen mindestens sechsmal „Wappen“ zeigt.

c) Neben der gezinkten Münze steht nun eine weitere, äußerlich identische Münze zur Verfügung, die jedoch fair ist. Felix nimmt zufällig eine der beiden Münzen und wirft „Wappen“. Er fragt sich, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass er dieses Resultat mit der gezinkten Münze erzielt hat.
Formulieren Sie das Problem mathematisch und skizzieren Sie einen möglichen Lösungsweg.









Erwartungshorizont

	Erwartete Leistung des Prüflings	Unterrichtliche Voraussetzungen	AFB
a)	Beim einfachen Münzwurf tritt das Ergebnis „Wappen“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,75 auf und das Ergebnis „Zahl“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,25. Abb. 1 und Abb. 4 sind geeignet. In Abb. 1 beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der „Wappen“ bei 8 Würfen, in Abb. 4 dagegen die Anzahl der Ausgänge mit dem Ergebnis „Zahl“. Mögliche Aspekte der Erläuterung und Begründung: - Bedeutung der auf den Achsen aufgetragenen Größen - Summe aller Werte muss 1 ergeben - Wertemenge der Zufallsgröße - Erwartungswert - Symmetriebetrachtungen	Der Umgang mit Histogrammen ist aus dem Unterricht vertraut.	I, II
b)	$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}6785$	geübtes Verfahren	I
c)	Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass Felix eine gezinkte Münze zieht unter der Bedingung, dass „Wappen“ fällt. Mögliche Herangehensweisen: Vierfeldertafel, Baumdiagramm, … Einführen von Ereignissen, z. B.: G: Die Münze ist gezinkt. F: Die Münze ist fair. W: Die Münze zeigt „Wappen“. Z: Die Münze zeigt „Zahl“ $P_W(G)$ = 0,6 *(nicht gefordert)*	Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit selbstständiger Deutung Verfahren zum Ermitteln bedingter Wahrscheinlichkeiten an anderen Beispielen geübt	III II

Bewertung:

Für eine ausreichende Leistung werden ein korrekter Ansatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil b) sowie eine sinnvolle Beschreibung von Histogrammen unter Berücksichtigung der oben aufgeführten Aspekte erwartet.

Eine gute Leistung erfordert darüber hinaus den Nachweis eines verständigen Umgangs mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und die Verwendung adäquater Fachsprache.

Für eine sehr gute Leistung müssen außerdem die Transferaufgabe im AFB III und mindestens eine vertiefende Frage nachvollziehbar beantwortet werden.

Mögliche Fragen und Impulse für das Prüfungsgespräch:

- Begründen Sie die Modellierung, die Ihrer Rechnung in Aufgabenteil b) zugrunde liegt.
- Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen Ihrer Rechnung in Aufgabenteil b) und dem gewählten Histogramm aus Aufgabenteil a) her.
- Betrachten Sie noch einmal das Histogramm aus Aufgabenteil a) und beschreiben Sie die Veränderung, wenn die Münze viel häufiger geworfen wird.

Präsentationsprüfungen im Fach Mathematik (grundlegendes Niveau)

I Rechtsgrundlage

§ 27 OAPVO (2021)

(1) Eine Präsentation ist ein medienunterstützter Vortrag mit anschließendem Kolloquium; auch naturwissenschaftliche Experimente sowie musikalische oder künstlerische Darbietungen sind mögliche Bestandteile. Die Präsentation kann eine fachübergreifende Themenstellung umfassen, muss aber den Schwerpunkt in dem von der Schülerin oder dem Schüler gewählten Fach haben.

(2) Die Schülerin oder der Schüler erhält die Aufgabe für die Präsentation so, dass sie oder er vier Schulwochen Zeit zur Bearbeitung hat. Die Präsentationsprüfung wird als Einzelprüfung durchgeführt. Spätestens zehn Tage vor dem Kolloquium muss eine schriftliche Dokumentation über den geplanten Ablauf der Präsentation mit allen Präsentationsinhalten der Prüferin oder dem Prüfer übergeben werden. Sie ist nicht Grundlage der Beurteilung, sondern dient der Vorbereitung des Kolloquiums. Das Kolloquium findet vor dem Fachausschuss statt.

(3) Die Präsentationsprüfung gliedert sich in die selbstständige Präsentation durch die Schülerin oder den Schüler und das Kolloquium. Die selbstständige Präsentation umfasst höchstens zehn Minuten, das Kolloquium mindestens 20 Minuten.

(4) § 24 Absatz 5, § 25 Absatz 1 und 2 sowie § 26 finden entsprechende Anwendung. (→ Verfahren, Bewertung, Anwesenheit Dritter)

II Wesen einer Präsentationsprüfung

Eine Präsentationsprüfung kann gemäß § 27 OAPVO anstelle einer „klassischen" mündlichen Prüfung als **vierte Prüfungsleistung** erbracht werden. Sie verlangt die selbstständige Bearbeitung eines Themas oder einer Problemstellung aus einem Unterrichtsfach, das der Prüfling als viertes Abiturprüfungsfach wählen kann (nach § 13 Abs. 1 Satz 6 OAPVO ist im Fach Sport keine Präsentationsprüfung möglich).

Aus der Beratungspraxis für Oberstufenleitungen und dem Ratgeber zur OAPVO 2023 erscheinen folgende Punkte wichtig:

- Der ministerielle **Terminplan** für die Abiturprüfung enthält einen Vorschlag für die Themenausgabe und den Bearbeitungszeitraum. Schulen können abweichende Termine wählen. Als Bearbeitungszeitraum müssen vier Unterrichtswochen zur Verfügung stehen. Das Ende des Bearbeitungszeitraumes markiert den Abgabetermin für die Dokumentation. Die Präsentation findet im Rahmen der mündlichen Abiturprüfungen statt.
- Gegenüber einer mündlichen Prüfung fordert die Präsentationsprüfung einen höheren Grad der **Selbstständigkeit bei der Prüfungsvorbereitung** (Recherche, Analyse, Strukturierung, Präsentation), bei gleichem fachlichen Anspruch. Zugleich spielt das methodische Vorgehen inklusive Reflexion eine größere Rolle.
- Die **Präsentation** kann unterschiedlich ausgestaltet werden. Sie kann z. B. durch Materialien, Folien, Wandtafel, Flipchart, Präsentationssoftware oder durch die Vorführung eines Experiments unterstützt sein. Die Medienausstattung und die Organisationsmöglichkeiten der Schule bilden dafür die Grundlage, um das Prinzip der Chancengleichheit der Schülerinnen und Schüler zu wahren.
- Die **Dokumentation** dient der Vorbereitung des Kolloquiums und ist kein Teil der Prüfungsleistung. Wird sie nicht rechtzeitig abgegeben, sollte unverzüglich eine Nachfrist gesetzt werden (Verhältnismäßigkeit), welche wiederum eine angemessene Vorbereitung auf das Kolloquium möglich erscheinen lässt. Lässt der Prüfling auch diese Nachfrist verstreichen, ist er nochmals zu Beginn der Präsentationsprüfung aufzufordern, die schriftliche Dokumentation vorzulegen.

Legt er die Dokumentation nicht vor oder legt er sie doch noch vor, ist durch den Prüfungsausschuss unmittelbar zu entscheiden, ob gleichwohl noch eine ordnungsgemäße Durchführung der Prüfung möglich ist. Dies ist prima facie nicht der Fall. Der Prüfling hat somit in aller Regel durch sein Verhalten eine ordnungsgemäße Durchführung seiner Prüfung verhindert. Er kann sodann durch die Prüfungskommission von der weiteren Teilnahme an der Prüfung ausgeschlossen werden (§ 34 Abs. 4 OAPVO).

Um die Vergleichbarkeit zu wahren, sollten Präsentationsprüfungen anhand der nachstehenden Hinweise organisiert werden (drei Seiten).

III Hinweise zur Präsentationsprüfung

Um die Vergleichbarkeit der Prüfungsanforderungen zu sichern, sollen bei der Planung und Durchführung der Präsentationsprüfungen die folgenden Aspekte berücksichtigt werden:

1. Themenstellung

a. Formulierung des Themas

i. Der Problemgehalt des Themas muss für den Prüfling erkennbar sein; deshalb beschränkt sich die Themenformulierung i. d. R. nicht auf die Benennung eines Gegenstandsbereichs. Die Präsentationsprüfung muss über den Themenbereich eines Halbjahres hinausgehen, kann sich aber auf ein Sachgebiet beschränken.

ii. Die Angabe einer obligatorischen Materialgrundlage ist zulässig.

iii. Das Thema kann fachübergreifend bearbeitet werden.

iv. In Präsentationsprüfungen verwendete Aufgaben dürfen an der Schule im jeweils folgenden Jahr nicht wiederverwendet werden.

b. Beteiligung der Prüflinge

i. Die Themenstellung erfolgt durch die Lehrkraft.[1] Termine für die Aufgabenausgabe und den Bearbeitungszeitraum werden vom Bildungsministerium im Terminplan für das Abitur vorgeschlagen und durch die Schule (APK) konkretisiert.
ii. Die Berücksichtigung von Interessengebieten der Prüflinge ist möglich; diese müssen hinreichend abstrakt sein, um genügend Freiraum für die Themenstellung zu ermöglichen (Größenordnung: Sachgebiet der Mathematik).
iii. Die Themenstellung wird persönlich übergeben; der Prüfling hat die Möglichkeit, Verständnisfragen zur Themenformulierung zu stellen.
iv. Es findet keine darüberhinausgehende Beratung während der vierwöchigen Arbeitszeit statt. Dies berührt nicht die ggf. nötige Aufsicht bei Experimenten.

c. Übergabeprotokoll

i. Die Übergabe des Themas wird protokolliert.
ii. Das Protokoll kann Informationen zu folgenden Aspekten enthalten:
    1. rechtliche Vorgaben (Abgabetermin, Selbstständigkeit);
    2. technische Voraussetzungen (z. B. zulässige digitale Hilfsmittel, Bereithaltung eines Foliensatzes bei digitalen Präsentationen, Abgabe der Präsentationsunterlagen in digitaler Form im Anschluss an die Prüfung, räumliche Bedingungen der Prüfung, Angabe eines Testzeitraums);
    3. die Art der Quellen, die herangezogen werden können, bzw. die o. a. Materialgrundlage;
    4. die Struktur der Dokumentation (Vorrang der inhaltlichen Durchdringung eines Themas vor medialer Darstellung, Bedeutung der methodischen Reflexion).

2. Dokumentation − Funktion, Inhalt, Umfang

a. Die Dokumentation dient primär als Grundlage für die Prüfungsvorbereitung durch die Lehrkraft; schulische Vorgaben für die Gestaltung der Dokumentation dienen dazu, diese Funktion zu sichern.

---

[1] Die Prüflinge haben also ebenso wie bei der mündlichen Prüfung nicht das Recht, ein Thema zu wählen oder ein Thema abzulehnen.

b. Obligatorische Inhalte der Dokumentation sind:

i. inhaltliche Gliederung;
ii. methodisches Vorgehen;
iii. Kernaussagen/Thesen/Beantwortung der Leitfrage;
iv. Präsentationsinhalte/eingesetzte Medien (Tafelbilder/Folien etc.);
v. Quellennachweise.

c. Der Umfang sollte ca. 3-5 Seiten (zzgl. Präsentationsinhalte wie z. B. Folien, Tafelbilder usw.) umfassen.

d. Die Vorstrukturierung durch ein von der Schule vorgegebenes Gliederungsraster ist möglich.

3. Gliederung der Prüfung

a. Die Vorgaben der OAPVO (10 min Vortrag, 20 min Kolloquium) gelten weiterhin.

b. Bei Vorführung eines naturwissenschaftlichen Experiments kann die Dauer der Präsentation auf Antrag der Schülerin oder des Schülers durch die Abiturprüfungskommission um bis zu 10 Minuten verlängert werden.

c. Charakter des Kolloquiums:

i. Das Kolloquium ist ein Fachgespräch zum Thema der Prüfung – keine separate Prüfung zu anderen, nicht mit dem Thema zusammenhängenden Bereichen des Faches.
ii. Möglichkeiten der inhaltlichen Ausgestaltung sind insbesondere:

   1. inhaltliche Vertiefung (ggf. kann ein Prüfling dafür geeignete Aspekte auch selbst anregen);
   2. sachliche Klärung von Zusammenhängen, die in der Präsentation angesprochen wurden;
   3. Reflexion der verwandten Fachmethoden, des Arbeitsprozesses, der Präsentation/des Medieneinsatzes.

4. Erwartungshorizont

a. Formal gilt die Vorschrift zum Erwartungshorizont in § 24 Abs. 2 OAPVO nicht für die Präsentation, weil dort die Regelegungen für die mündliche Prüfung niedergelegt sind.

b. Zweckmäßig ist allerdings ein mit der mündlichen Prüfung vergleichbares Vorgehen nach dem folgenden Muster:

i. Der Fachausschuss erhält die Dokumentation und den EWH 3 Tage vor der Prüfung.
ii. Der EWH beschreibt inhaltliche u. methodische Erwartungen an gute/ ausreichende Leistung ohne notwendigen Bezug auf das vom Prüfling dokumentierte Vorgehen. Darüber hinaus werden im Erwartungshorizont Aussagen zu den unterrichtlichen Voraussetzungen und zur Selbstständigkeit der Prüfungsleistung getroffen.

5. Bewertung der Präsentationsprüfung

a. Die in den Fachanforderungen für schriftliche und mündliche Prüfungen ausformulierten fachspezifischen Kriterien zur Bewertung von Prüfungsleistungen sind auch für Präsentationsprüfungen maßgeblich. Dabei sind die Besonderheiten der Prüfungsform und Aufgabenstellung zu berücksichtigen.
Bei der Bewertung einer Präsentationsprüfung im Fach Mathematik sollen vor allem folgende Kriterien berücksichtigt werden:

i. Umfang und Qualität der nachgewiesenen mathematischen Kompetenzen,
ii. Beherrschung der Fachsprache,
iii. Verständnis für mathematische Probleme sowie die Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen und darzustellen, mathematische Sachverhalte zu beurteilen und auf Fragen und Einwände einzugehen,
iv. Präzision und logische Nachvollziehbarkeit der Darstellung sowie die Fähigkeit, das Wesentliche herauszustellen,
v. sachgerechte Gliederung und folgerichtiger Aufbau der Darstellung,
vi. Kreativität und Eigenständigkeit im Umgang mit der Aufgabenstellung,
vii. Reflexion über die vorgetragenen Lösungen und Argumente sowie die gewählte Präsentationsmethode,
viii. adäquater Einsatz der Präsentationsmittel.

b. Die Dokumentation ist nicht Grundlage der Bewertung.

c. Es erfolgt keine separate Bewertung einzelner Prüfungsteile im zeitlichen Verlauf (etwa nach dem Muster Vortrag 1/3, Kolloquium 2/3), sondern eine aspektorientierte Bewertung der gesamten Prüfungsleistung.

6. Unterrichtliche Vorbereitung − Methodencurriculum

a. Der Unterricht muss sowohl auf die Anforderung der Präsentation als auch des Kolloquiums vorbereiten.

b. Zweckmäßig sind:

i. die Einbettung in ein schulisches Methodencurriculum;

ii. die Einübung der Prüfungsform z.B. als einer Klausur gleichwertige Leistung gemäß Erlass „Leistungsnachweise und Leistungsbewertung in der gymnasialen Oberstufe“.

7. FAQs

- Darf ein Prüfling sich ein Thema wünschen oder ein Thema ablehnen?
  Nein. Er darf ein Interessengebiet angeben, aber kein Thema. Auch darf ebenso wie in der mündlichen Prüfung eine Aufgabenstellung nicht abgelehnt werden.
- Muss das Thema vom Fachausschuss oder vom Vorsitzenden des Fachausschusses genehmigt werden?
  Nein, das ist in der Verordnung nicht vorgesehen.
- Wann muss ein Erwartungshorizont eingereicht werden? Bei der Aufgabenstellung oder erst drei Tage vor der Prüfung?
  Erst drei Tage vor der Prüfung.

- Wie umfassend muss der Erwartungshorizont sein? Muss er eine eigene Präsentation beinhalten?

  Der Erwartungshorizont beschreibt inhaltliche und methodische Erwartungen und trifft Aussagen zu den unterrichtlichen Voraussetzungen und zur Selbstständigkeit der Prüfungsleistung. Er muss keine von der Lehrkraft erstellte Präsentation enthalten.

  Auch müssen keine Fragen/Impulse für das Kolloquium angegeben werden.
- Wann finden Präsentationsprüfungen statt?

  Präsentationsprüfungen finden im Zeitraum der mündlichen Prüfungen statt. Der Prüfling entnimmt den genauen Zeitpunkt dem Prüfungsplan.
- Gibt es feste Vorgaben für die Bewertung?

  Nein, dies ist explizit nicht vorgesehen. Es gelten die unter 5. vorgegebenen Kriterien. Ein festes Bewertungsraster oder eine vorgegebene Gewichtung der Kriterien gibt es nicht.

8. Beispielaufgaben

Es sind sowohl Modellierungsaufgaben als auch innermathematische Aufgaben zulässig.

Die inhaltlichen Anforderungen können über die Inhalte der Fachanforderungen hinausgehen, müssen sich aber auf dem grundlegenden Niveau befinden.

Es sind sachgebietsübergreifende Aufgaben möglich, aber nicht vorgeschrieben.

Bei den folgenden Beispielgaben ist jeweils zur Erläuterung der Aufgabenstellung ausgeführt, welche Bearbeitung vom Prüfling erwartet wird. Dies ist noch nicht der Erwartungshorizont, wie er von der Lehrkraft nach Erhalt der Dokumentation erstellt wird.

8.1 Analysis: Vergleich des Wachstums und der Körpergröße von Jungen und Mädchen

Leitfrage:

Wie lassen sich das Wachstum und die Körperhöhe (umgangssprachlich Körpergröße genannt) von Jungen und Mädchen mit Mitteln der Analysis beschreiben?

In einem Zeitungsartikel wird die Abbildung rechts genutzt, um folgende Aussage zu machen:

„Mädchen wachsen zwar schneller als Jungen, aber die Jungen werden trotzdem größer.“

Diese Aussage sollen Sie im Rahmen Ihrer Präsentation hinterfragen.

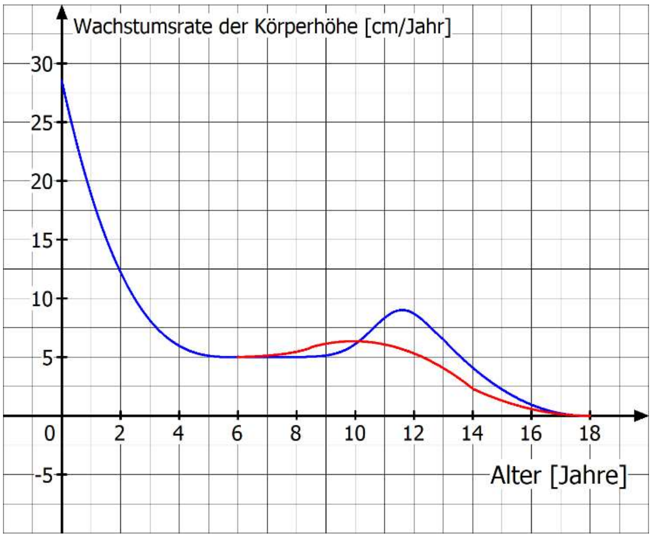


Abb.1: Wachstumsraten von Jungen (blau) und Mädchen (rot)
Die Graphen approximieren Daten einer Studie bei einer für Mitteleuropa repräsentativen Population.

Aufgaben:

a) Vergleichen Sie zunächst mit Hilfe der Graphen und anschließend unter Verwendung der Funktionsgleichungen (siehe folgende Seite) die Wachstumsraten von Jungen und Mädchen. Nutzen Sie Ihre Erkenntnisse zur Untersuchung der Körpergrößen.
b) Beurteilen Sie, wie gut die vorgeschlagenen Funktionen K_J und K_M (siehe nächste Seite) den Sachzusammenhang modellieren.
c) Beurteilen Sie die Aussagen zu Wachstum und Körpergröße aus dem Artikel.

***Tipp:** Nutzen Sie zur Bearbeitung GeoGebra (oder ein anderes MMS) mit den Möglichkeiten, Funktionen, auch über Intervallen, zu zeichnen und zu integrieren.*

Mögliche Funktionsgleichung zur Modellierung der Wachstumsrate der Jungen (blau)

$$K_J(x) = \begin{cases} -0{,}0973\,x^3 + 1{,}8312x^2 - 11{,}407x + 28{,}4909 & 0 < x \leq 7 \\ 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-11{,}6)^2} + 5 & 7 < x \leq 13 \\ 0{,}275762x^2 - 9{,}84747x + 87{,}9133 & 13 < x \leq 18 \end{cases}$$

Mögliche Funktionsgleichung zur Modellierung der Wachstumsrate der Mädchen (rot)

$$K_M(x) = \begin{cases} -0{,}0973\,x^3 + 1{,}8312x^2 - 11{,}407x + 28{,}4909 & 0 < x \leq 6 \\ 0{,}00017733 \cdot e^x + 4{,}92845 & 6 < x \leq 8{,}5 \\ -0{,}243877x^2 + 4{,}92845x - 17{,}7548 & 8{,}5 < x \leq 14 \\ 0{,}14375(x-18)^2 & 14 < x \leq 18 \end{cases}$$

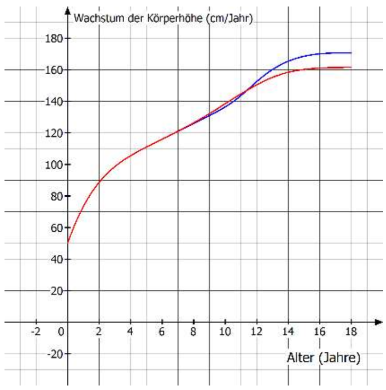
<table>
<tr><th colspan="2">Erwartete Bearbeitung</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Intervallweise werden die Graphen zu Wachstumsraten und Körpergrößen der Funktionen K_J und K_M verglichen.</td><td></td><td rowspan="3">Die Interpretation von Graphen im Sachkontext ist aus anderen Beispielen bekannt.</td></tr>
<tr><td></td><td>• Die Wachstumsrate ist die Änderungsrate der Körperhöhe (umgangssprachlich Körpergröße).</td><td>I</td></tr>
<tr><td></td><td>• Aus Abb. 1 ist die Veränderung des Wachstums abzulesen. So gibt ein Hochpunkt hier zum Beispiel den Zeitpunkt und die Rate des größten Wachstums an; eine Nullstelle das Wachstumsende.</td><td>I, II</td></tr>
<tr><td></td><td>• Insbesondere interessieren die Informationen, die nicht direkt zu ermitteln sind. Zum Beispiel muss, um die Körperhöhe zu ermitteln, die Integralfunktion bestimmt werden.</td><td>II</td><td rowspan="2">Anwendungen für den Hauptsatz sind an anderen Sachkontexten im Unterricht thematisiert worden.</td></tr>
<tr><td></td><td>• Zeichnung der Graphen der beiden Integralfunktionen, die die Körpergröße in Abhängigkeit von der Zeit über den Intervallen angeben
→ digitales Hilfsmittel, z. B. GeoGebra, hier MatheGrafix


Abb. 2: Verlauf der Graphen der angegebenen Funktionen</td><td>I, II</td></tr>
<tr><td></td><td>• Die bestimmten Integrale werden berechnet, um die Körpergröße zu ermitteln:
Aus dem bestimmten Integral von K_J über dem ersten Intervall ergibt sich ein Längenzuwachs von ca. 70,93 cm, über dem zweiten Intervall von ca. 39,22 cm und über dem dritten Intervall von ca. 10,52 cm für die Jungen. Mit einem Anfangswert von anzunehmenden ca. 50 cm Größe bei der Geburt erreichen die Jungen eine durchschnittliche Körpergröße von 170,66 cm.
Für die Mädchen ergeben sich aus den bestimmten Integralen zu K_M Zuwächse von ca. 65,94 cm über dem ersten, von ca. 13,12 cm über dem zweiten, von ca. 34,15 cm über dem dritten und ca. 3,07 cm über dem 4. Intervall. Nimmt man auch hier wieder eine Geburtsgröße von 50 cm an, erreichen die Mädchen eine durchschnittliche Körpergröße von 166,28 cm.</td><td>I
II</td><td>Berechnung der bestimmten Integrale über den Intervallen mit Berücksichtigung eines geeigneten Anfangswerts</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>• Recherche über Wachstumskurven und Geschlechterunterschiede mit Vergleich zu dem angegebenen Beispiel
• Diskussion einer eventuell besseren Modellierung</td><td>II</td><td></td></tr>
</table>

	○ Zum Beispiel sind die Funktionen über dem ersten Intervall identisch. Das entspricht nicht der Realität. ○ Die Graphen der Funktionen sollten knickfrei ineinander übergehen. • Überlegung zur Entwicklung einer besseren Modellierung	III III	komplexe Überlegungen auf mathematischer und Anwendungsebene
c)	• Es ist zu erkennen, dass die Mädchen früher eine höhere Wachstumsrate haben, also eher wachsen als die Jungen; das Maximum ihres Wachstums ist allerdings kleiner als das der Jungen. Es kommt auch auf die Dauer der Erhöhung (und auf den Anfangswert) an, wenn die endgültige Körpergröße bestimmt werden soll. Die Mädchen wachsen zwar über einen kurzen Zeitraum stärker, aber vor allem früher als die Jungen. Die Jungen wachsen später noch schneller und „überholen" die Mädchen dann bei der Körpergröße. • Die Jungen haben später eine erhöhte Wachstumsrate, entscheidend ist aber das größere Maximum, also ein stärkeres Ansteigen der Wachstumsrate. Das führt zu einem größeren Längenwachstum. Bei der Recherche zu den unterschiedlichen Größen von Jungen und Mädchen bei der Geburt sollte auch erkundet werden, dass Jungen bei der Geburt durchschnittlich 2 cm (Quelle RKI) größer als Mädchen sind.	II III II III	an den Graphen abzulesen eigene Schlussfolgerung an Abb. 1 und den selbsterstellten Graphen abzulesen eigene Schlussfolgerung ziehen

Mögliche Zusatzfragen / Impulse für das Kolloquium (nach Abgabe der Dokumentation zu vervollständigen)

- Manche der gewonnenen Erkenntnisse lassen sich schon an den Funktionstermen erkennen. Erläutern Sie.
- Beurteilen Sie die Realitätsnähe des vorgeschlagenen Modells.
- Hier wird von einer Modellierung gesprochen. Überlegen Sie eine Vorgehensweise, um die „Passung“ auf die gegebenen exakten Daten zu verbessern.
- Die Kurven nähern sich der horizontalen Achse immer mehr an. Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

Didaktische Anmerkungen:

1. Wichtig ist die explizite Frage nach einem Größenvergleich, denn sonst besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der Differenzialrechnung die Extremstellen des Wachstums für Jungen und Mädchen bestimmen und diese miteinander vergleichen. Dann sähen sie keinen Grund mehr, das Problem tiefergehend zu studieren.
2. Die Aufforderung, die Körpergrößen zu vergleichen, wirft Fragen auf:
    - Zusammenhang zwischen Wachstum und Größe?
    - Gibt es „Wachstumssprünge“?
    - Wie wirken sich solche „Wachstumssprünge“ auf die Entwicklung der Größe aus?
    - Wie groß sind Jungen und Mädchen bei Geburt? (-> Anfangswertproblem)
3. Die Aufgabe erfordert Kenntnisse über Eigenschaften und das Differenzieren und Intergieren zweier Funktionenklassen: Exponentialfunktionen und ganzrationale Funktionen.
4. Die Aufgabenstellung ist so angelegt, dass digitale Kompetenzen sinnvoll eingebracht werden können.
5. Die Themenstellung scheint für eine Präsentationsprüfung geeignet, weil es genug Zeit in der Vorbereitung gibt, um sich intensiv mit den Zusammenhängen von Funktion und Stammfunktion zu beschäftigen.

Hinweise:

- Die Idee zur Aufgabe stammt von Stephan Hußmann. Er hat der Verwendung des Materials aus seiner Dissertation zugestimmt. Allgemein unterliegt die Verwendung von Materialien den Regeln des Urheberrechts.
- Die Aufgabe sowie Strategieansätze sind im Internet zu finden, nicht jedoch die Lösung.
- Die prüfende Lehrkraft darf Zusatzmaterial in das Kolloquium mitbringen, zum Beispiel eine Zeichnung der Funktionsgraphen.

8.2 Analysis auf $\mathbb{Z}$

Im Laufe der Oberstufe haben Sie auf dem Gebiet der Analysis mit dem Ableiten und Integrieren wichtige Verfahren zum Untersuchen von Funktionen kennengelernt. Dabei wurden Funktionen betrachtet, welche die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Definitionsmenge hatten oder zumindest auf Intervallen definiert waren.
Im Rahmen dieser Präsentationsprüfung sollen Sie beispielhaft untersuchen, ob und wie sich die Grundlagen der Differenzial- und Integralrechnung auf Funktionen übertragen lassen, die nur auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definiert sind.

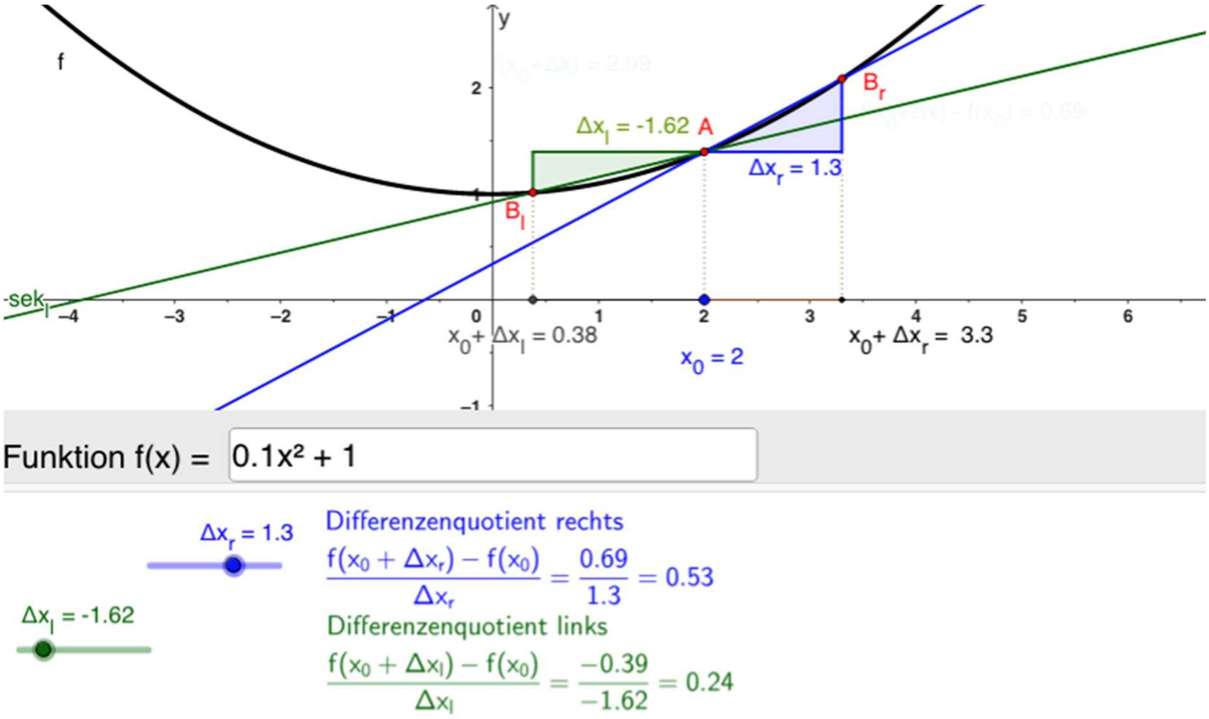
Leitfragen:
- Was verändert sich beim Ableiten und Integrieren ganzrationaler Funktionen, wenn diese nicht mehr auf $\mathbb{R}$, sondern nur auf $\mathbb{Z}$ definiert sind?
- (Wozu) sind solche Funktionen nützlich?

Aufgabe 1
Die Materialien M1 und M2 veranschaulichen die Herleitung der Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten und die Herleitung des Integrals mithilfe von Ober- und Untersummen für Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$.
Untersuchen und beschreiben Sie unter Nutzung dieser Materialien Analogien und Grenzen für den Fall, dass die betrachteten Funktionen nur auf $\mathbb{Z}$ definiert sind.

Aufgabe 2
Studieren Sie Material M3, indem Sie jede Aussage hinterfragen, ggf. nachrechnen und an Beispielen nachvollziehen.
Stellen Sie Ihre Erkenntnisse anhand eigener Beispiele vor und bereiten Sie sich darauf vor, die „Polynomsuche“ anhand beliebiger ganzzahliger Werte an den Stellen $i = 0, 1, 2, 3$ zu erläutern und durchzuführen. Dabei dürfen Sie gern auf digitale Hilfsmittel, wie z. B. eine Tabellenkalkulation oder GeoGebra, zurückgreifen.

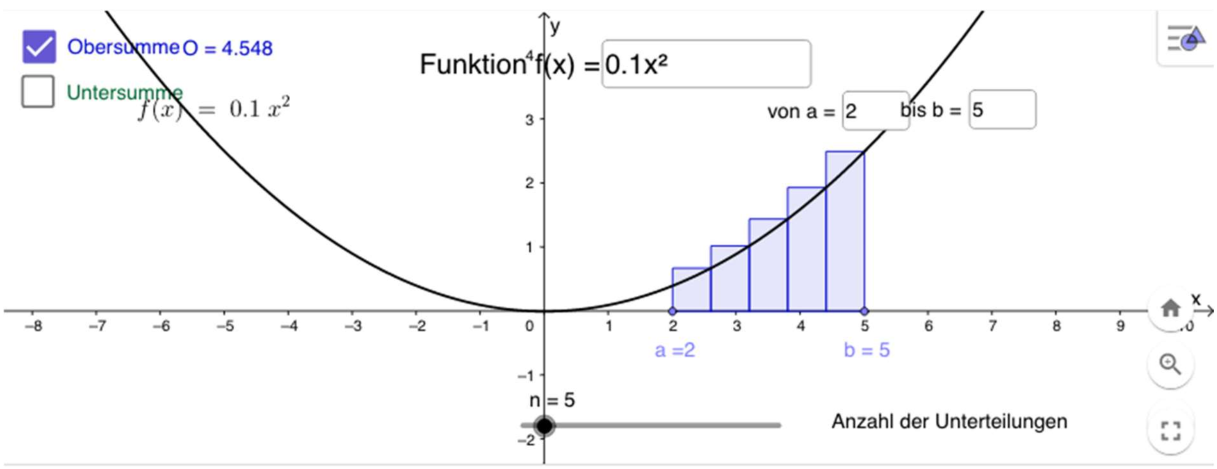
Material M1
GeoGebra-Anwendung zur Betrachtung von rechts- und linksseitigen Differenzenquotienten

https://www.geogebra.org/classic/m7pnbvew



Material M2
GeoGebra-Anwendung zur Betrachtung von Ober- und Untersummen

https://www.geogebra.org/classic/QKQg6arS



Material M3 *Definition und Anwendungen für Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{Z}$*

Für Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{Z}$ gibt es die gewöhnliche Ableitung nicht. Statt des Differentialquotienten kann man die sogenannte **Vorwärtsdifferenz**

$$\boldsymbol{f^{\Delta}(n) = f(n+1) - f(n)}$$

betrachten (oder auch die Rückwärtsdifferenz $f^{\nabla}(n) = f(n) - f(n-1)$)
Während sich die Faktorregel und die Summenregel auf die Vorwärtsdifferenz übertragen lassen, gelingt dies für die Potenzregel nicht.
Für spezielle Funktionen gibt es aber einen ähnlichen Zusammenhang:
Statt um Produkte mit lauter gleichen Faktoren, wie z.B. $n^3 = n \cdot n \cdot n$, geht es um solche Produkte, bei denen die Faktoren jeweils um 1 kleiner werden.
Man schreibt den Exponenten dann mit einem Unterstrich, also:

$$n^{\underline{3}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

Wie bei den gewöhnlichen Potenzen ist $n^{\underline{0}} = 1$.
Für Funktionen mit solchen Funktionstermen lassen sich folgende Vorwärtsdifferenzen ausrechnen:

Ausgangsfunktion	***Vorwärtsdifferenz***	***abkürzende Schreibweise***
$f_0(z) = c$ mit $c \in \mathbb{Z}$	$f_0^{\Delta}(z) = 0$	
$f_1(z) = z \quad = z^{\underline{1}}$	$f_1^{\Delta}(z) = 1$	$= z^{\underline{0}}$
$f_2(z) = z \cdot (z-1) \quad = z^{\underline{2}}$	$f_2^{\Delta}(z) = 2 \cdot z$	$= 2 \cdot z^{\underline{1}}$
$f_3(z) = z \cdot (z-1) \cdot (z-2)$	$f_3^{\Delta}(z) = 3 \cdot z \cdot (z$	$= 3 \cdot z^{\underline{2}}$
$f_4(z) = \cdots$	…	…

Wer das Muster durchschaut hat, kann von der Vorwärtsdifferenz auf die ursprüngliche Funktion zurückschließen (analog zum Integrieren).

Beispiel:
Die Funktion g mit $g(z) = z$ ist die Vorwärtsdifferenz zur Funktion G mit $G(z) = \frac{1}{2} \cdot z^{\underline{2}}$.

Eine Anwendung der vorangegangenen Überlegungen ist die **Polynomsuche.**
Dabei geht es darum, eine ganzrationale Funktion zu finden, die an den ersten natürlichen Stellen vorgegebene Werte annimmt.

Beispiel:
Gesucht sind reelle Zahlen a, b, c, d so, dass für die Funktion p mit
$p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ gilt: $p(0) = 3, \quad p(1) = 23, \quad p(2) = 8, \quad p(3) = 10$

Nun kommen wiederholt
die Differenzen zum Einsatz:

3	23	8	10
20	-15	2	
- 35	17		
52			

In dieser Zeile stehen Werte der ersten Vorwärtsdifferenz

$= p(3) - p(2)$

$= 2 - (-15)$

Am unteren Ende steht der Wert der dritten Vorwärtsdifferenz an der Stelle 0,
also $p^{\Delta\Delta\Delta}(0) = 52$.
Analog zur dritten Ableitung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades gehen wir davon aus, dass die dritte Vorwärtsdifferenz eine konstante Funktion ist, d.h. es gilt:
$p^{\Delta\Delta\Delta}(z) = 52$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.
Nun gilt es nun dreimal Zurückzuschließen (analog zum Integrieren, s.o.)

$$p^{\Delta\Delta}(z) = 52 \cdot z + (\mathbf{-35})$$

$$p^{\Delta}(z) = 26 \cdot z^{\underline{2}} - 35 \cdot z + \mathbf{20}$$

$$p(z) = \tfrac{26}{3} \cdot z^{\underline{3}} - \tfrac{35}{2} \cdot z^{\underline{2}} + 20 \cdot z + \mathbf{3} \quad = \tfrac{26}{3} \cdot z(z-1)(z-2) - \tfrac{35}{2} \cdot z(z-1) + 20 \cdot z + \mathbf{3}$$

Mithilfe von WolframAlpha (Befehl: expand…) oder geduldigem Ausrechnen erhält man

$$p(z) = \frac{26}{3} \cdot z^3 - \frac{87}{2} \cdot z^2 + \frac{329}{6} \cdot z + 3$$

Als Definitionsmenge für die Funktion p kann ganz $\mathbb{R}$ gewählt werden.
Dass der Graph von p die geforderten Punkte (0|3), (1|23), (2|8), (3|10) enthält, lässt sich einfach nachrechnen oder mit einem Funktionsplotter zeigen.

Erwartete Bearbeitung	AFB	Hinweise
Aufgabe 1: *Grundlagen des Ableitens auf $\mathbb{Z}$:* Idee des Differenzenquotienten *(Steigung der Sekante durch zwei Kurvenpunkte, Ableitung als Grenzwert)* Es ist grundsätzlich weiterhin möglich, Differenzenquotienten zu bilden, allerdings kann der Nenner nicht kleiner als 1 werden. In diesem Fall wird der Quotient zu einer Differenz. Die Idee des Grenzwerts kann nicht auf $\mathbb{Z}$ übertragen werden. *Grundlagen des „Integrierens" auf $\mathbb{Z}$:* Idee der Betrachtung von Ober- und Untersummen *(Annähern der Fläche zwischen Graph und x-Achse durch Rechtecke)* Das beim Bilden der Ober- und Untersumme verwendete Verfahren des Verfeinerns kann nicht auf Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{Z}$ übertragen werden. Das Integral wird zu einer Summe von Funktionswerten.	I II I II III	reproduktiv unkomplizierte Anwendung von Gelerntem siehe oben siehe oben Transfer nötig
Aufgabe 2: *Nachrechnen einiger Beispiele von Vorwärtsdifferenzen, z.B.* $G(z) = \frac{1}{2} \cdot z^{\underline{2}} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot (z-1)$ $G^{\Delta}(z) = G(z+1) - G(z)$ $= \frac{1}{2} \cdot (z+1) \cdot z - \frac{1}{2} \cdot z \cdot (z-1)$ $= \frac{1}{2} z \cdot (z+1-z+1) = \frac{1}{2} z \cdot 2 = z$ *Überprüfen der Übertragbarkeit von Ableitungsregeln, z. B. Gegenbeispiel zur Potenzregel für Vorwärtsdifferenzen:* $f(z) = z^3$ $f^{\Delta}(z) = (z+1)^3 - z^3 = z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - z^3$ $= 3z^2 + 3z + 1 \neq 3z^2$	I, II II	Nachrechnen konkreter Beispiele, teilweise mit vorgegebenem Ergebnis Auswahl eines geeigneten Beispiels und Interpretation des Ergebnisterms

Nachrechnen von Vorwärtsdifferenzen für sogenannte „fallende Faktorielle“ $z^{\underline{n}}$, z. B.: $f_3(z) = z^{\underline{3}} = \ z \cdot (z-1) \cdot (z-2)$ $f_3^{\Delta}(z) = (z+1) \cdot z \cdot (z-1) \ - \ z \cdot (z-1) \cdot (z-2)$ $= \ z \cdot (z-1) \cdot (z+1-(z-2))$ $= \ z \cdot (z-1) \cdot 3 \ = \ 3 \cdot z^{\underline{2}}$	I, II	Übertragen angelesenen Wissens auf eine vergleichbare Situation
Vorstellen des Verfahrens der Polynomsuche (mit eigenen Werten) *Erläuterungen zum Verfahren Polynomsuche, z.B. eine grafische Interpretation*	I, II II, III	

Mögliche Impulse im Kolloquium:

- Erläutern Sie, inwiefern bei Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$ die Notwendigkeit besteht, den links- und rechtsseitigen Grenzwert zu betrachten, um die Existenz der Ableitung zu gewährleisten.
- Ermitteln Sie anschaulich das „diskrete Integral“ (bzw. die Summe) für die auf $\mathbb{Z}$ definierte Funktion f mit $f(z) = z$ in den Grenzen von 1 bis 5.
  Stellen Sie einen Zusammenhang zur Gauß´schen Summenformel her.
- Aus dem Unterricht kennen Sie ein alternatives Verfahren, um von bestimmten Punkten einer Funktion auf die Funktionsgleichung zurückzuschließen (Hinweis: Steckbriefaufgaben). Beschreiben Sie das Vorgehen und diskutieren Sie Vor- und Nachteile gegenüber der Polynomsuche.

Kommentare zur Aufgabe „Analysis auf $\mathbb{Z}$“

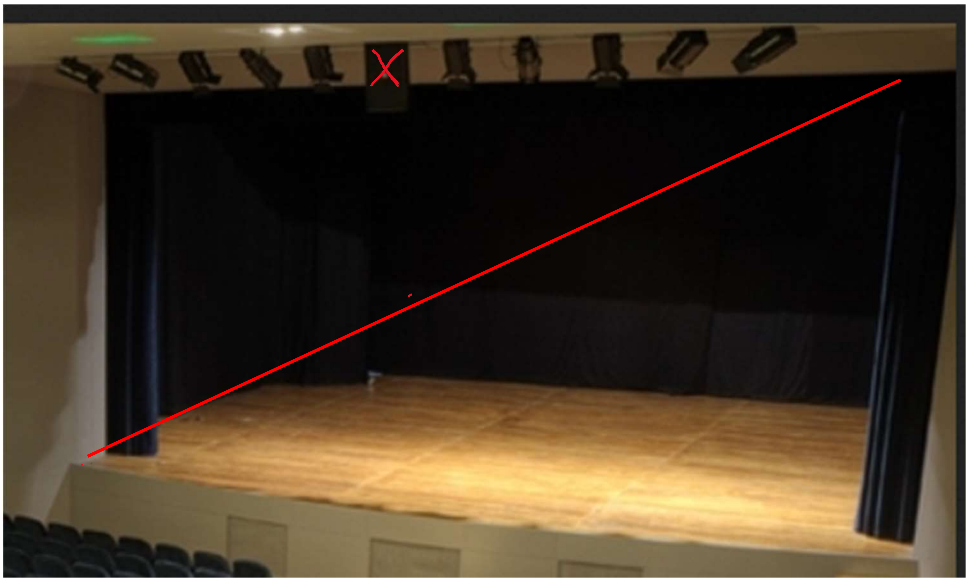
- Ein innermathematischer Forschungsauftrag auf grundlegendem Niveau birgt die Herausforderung, echte Eigenleistung im Sinne von eigenständigem Nachdenken zu initiieren. Dies kann mitunter durch Veränderung einzelner Voraussetzungen gelingen.
  In diesem Fall ist die Veränderung der Voraussetzung (Definitionsmenge $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{R}$) mehr als nur eine Aufgabenvariation. Das „diskrete Differenzieren und Integrieren“ ist in der Fachliteratur (z. B. WITT, K.-U.: *Elementare Kombinatorik für die Informatik – Abzählungen, Differenzengleichungen diskretes Differenzieren und Integrieren*. Springer Vieweg, 2013) gut dokumentiert, jedoch durch fortgeschrittene Fachbegriffe und Symbolschreibweise für Oberstufenschüler kaum zugänglich.

- Das „diskrete Differenzieren und Integrieren“ findet eine Anwendung bei der geschlossenen Berechnung bestimmter diskreter Summen. Dies soll hier jedoch nicht im Fokus stehen. Es geht stattdessen darum, die Grundlagen der reellen Analysis noch einmal gründlich zu durchdringen.

- Die „Polynomsuche“ kann erweitert werden, wenn zusätzlich noch Parametervariation betrieben wird. Würde man z. B. die gefundene Funktion in x-Richtung strecken und verschieben, dann könnten die vorgegebenen Werte nicht nur an den Stellen 0, 1, 2 … angenommen werden, sondern an beliebigen äquidistanten Stellen.

8.3 Analytische Geometrie: Anwendung des Skalarprodukts zur Bestimmung von Abständen

Leitfrage:
Wie groß ist der mathematische Abstand eines Abspannseiles zu einem Scheinwerfer?



Um während der nächsten Theateraufführung Gegenstände über die Bühne schweben zu lassen, muss in der Aula unserer Schule ein Spannseil diagonal stramm eingespannt werden (ähnlich wie im Foto oben skizziert). Da die Gegenstände aus leicht entflammbarem Material bestehen, muss der Abstand des Seils zum mittleren, sehr hellen Hauptscheinwerfer der Bühne unbedingt beachtet werden.

Aufgaben:

1. Modellieren Sie die Lage des Spannseiles und des Hauptscheinwerfers in einem Koordinatensystem.

2. Der Abstand eines Punktes von einer Gerade kann mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet werden (Material: Herleitung einer Abstandsformel).
   Erläutern Sie das Verfahren.

3. Berechnen Sie mithilfe dieses Verfahrens den Abstand zwischen dem Spannseil und dem Hauptscheinwerfer und veranschaulichen Sie Ihren Lösungsweg in einer geeigneten gegenständlichen oder grafischen Darstellung.

Bereiten Sie sich darauf vor, für beliebige Punkte den Abstand zu einer vorgegebenen Geraden zu berechnen.

Material:

Herleitung einer Abstandsformel Punkt-Gerade, die das Skalarprodukt nutzt

Es soll der Abstand d zwischen einem Punkt C und der Geraden

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{AB}$ bestimmt werden.

Es wird das Dreieck ABC betrachtet. Von Punkt C aus wird das Lot auf die Gerade AB gefällt. Der Schnittpunkt des Lots mit der Geraden AB sei F (Lotfußpunkt).

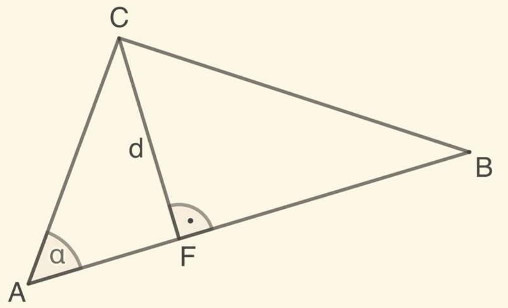


Abb. 1

Der gesuchte Abstand d ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{CF}$, also $d = \left|\overrightarrow{CF}\right|$.

Mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält man $d^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AF}\right|^2$. (Gl. 1)

Für den Innenwinkel α mit $0° < \alpha < 90°$ gilt einerseits $\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AF}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ (siehe Abb.1)

und andererseits $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|}$.

Durch Gleichsetzen erhält man $\left|\overrightarrow{AF}\right| = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$.

Eingesetzt in Gleichung (Gl. 1) ergibt sich $d^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}\right)^2$,

also $d = \sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}\right)^2}$.

Nach dem Artikel „Abstandsformel Punkt-Gerade“ von Rainer Cloosters im MNU Journal, Ausgabe 06.2020, ISBN 0025-5866)

	Erwartete Bearbeitung	AFB	Hinweise
1.	Der Prüfling • überlegt sich mögliche Befestigungspunkte für ein Abspannseil in der Aula und misst Abstände aus, • legt ein geeignetes Koordinatensystem fest, • gibt die Koordinaten der Befestigungspunkte und des Scheinwerfers an, • trägt Punkte in einer Skizze oder im Koordinatensystem ein.	I II I I	Erstellen eines Punktmodells aus einer gegebenen Situation
2.	• liest einen Fachartikel und vollzieht die beschriebene Herleitung nach, • erläutert das vorgestellte Verfahren zur Abstandsbestimmung Punkt - Gerade.	II II, III	selbständiges Erfassen und Verarbeiten von Sachverhalten
3.	• berechnet den Abstand zwischen dem Abspannseil und dem Scheinwerfer, • erstellt ein geeignetes Modell, um Überlegungen und Berechnungen nachvollziehbar zu veranschaulichen.	II II, III	Modell kann auch in GeoGebra 3D erstellt werden

Mögliche Impulse für das Kolloquium:

- Erläutern Sie, wie Sie beim Erstellen Ihres Modells vorgegangen sind.
- Möglicherweise sind Sie auf fachliche Schwierigkeiten gestoßen. Stellen Sie ggf. dar, wie Sie diese überwunden haben.
- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(1 \mid -1 \mid 5)$ von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$, mit Hilfe des von Ihnen vorgestellten Verfahrens.
- Begründen Sie, dass die im Material hergeleitete Abstandsformel auch für stumpfe Innenwinkel α gültig ist.
- Das Skalarprodukt ist ein starkes Werkzeug. Beschreiben Sie, welche weiteren Untersuchungen mit dem Skalarprodukt durchgeführt werden können.
- Erläutern Sie, wie sich die Festlegung des Koordinatenursprungs auf die Bearbeitung der Problemstellung auswirkt.

Weitere Fragen ergeben sich aus der vorab eingereichten Dokumentation.

Kommentare:

- Die Befestigungspunkte können vom Prüfling selbst festgelegt und die Entfernungen zwischen den Punkten ausgemessen werden. Der gesuchte Abstand kann zwar abgeschätzt, aber nicht direkt ausgemessen werden. Zum Erfassen der Daten ist eine Skizze oder auch bereits ein Modell hilfreich.

- Das selbständige Erschließen eines bereitgestellten Fachtextes kann eine gute Grundlage für eine Aufgabe sein.
  Der Fachtext sollte aber nicht so bekannt sein, dass es bereits diverse YouTube-Videos dazu gibt.

Hinweise zum Vorunterricht:

- Skalarprodukt als starkes Messwerkzeug einführen,
- Bezug zur Trigonometrie und zum Satz des Pythagoras aufzeigen,
- Umgang mit GeoGebra 3D sollte den Schülerinnen und Schülern vertraut sein.

8.4 Stochastik: Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Fußball

Leitfrage:
Wie können mit Modellierungen und Grundlagen der Stochastik Prognosen für den Ausgang zukünftiger Spiele der Fußball-Bundesliga ermittelt werden?

Aufgabe 1 *(Umgang mit einem sehr allgemeinen, vorgegebenen Modell)*

a) Ermitteln Sie die benötigten Werte für die vorgeschlagene Modellierung aus Material M1, indem Sie die zugrundeliegenden Daten recherchieren und geeignete Berechnungen anstellen. *(Falls die Recherche nicht gelingt, können Sie die folgenden Werte verwenden: t = 16%, $\hat{s}$ = 10)*

b) Im Folgenden geht es um eine Begegnung zwischen zwei Mannschaften A und B. Die Zufallsvariablen X_A und X_B geben die Anzahl der Treffer für die jeweilige Mannschaft A bzw. B an. Verwenden Sie für Ihre weiteren Untersuchungen von X_A und X_B die Binomialverteilung mit den Parametern $\hat{s}$ und t.
Stellen Sie die Verteilungen der Zufallsgrößen X_A und X_B in Tabellenform dar und entwickeln Sie ein Vorgehen, um damit die Wahrscheinlichkeit für konkrete Spielausgänge (z. B. 0:0 unentschieden oder 2:1 für Mannschaft A) zu berechnen.

Aufgabe 2 (*Eigenständige Erweiterung der Modellierung)*

Das Material M2 zeigt exemplarisch, wie eine Umsetzung der allgemeinen Modellierung gemäß Material M1 mit einer Tabellenkalkulation aussehen könnte. Wählen Sie nun zwei konkrete Mannschaften aus der aktuellen Fußball-Bundesliga. Erstellen Sie auf der Grundlage der realen Daten mithilfe einer Tabellenkalkulation* eine Übersicht über die (modellierten) Wahrscheinlichkeiten für mögliche Spielausgänge bei der Begegnung zwischen diesen beiden Mannschaften. Entwickeln Sie unter Beibehaltung der Binomialverteilung Verbesserungen gegenüber der Modellierung aus Material M1 und setzen Sie diese um!

* Mindestanforderungen an die Tabelle:

- Die Tabelle gibt Wahrscheinlichkeiten für alle (gemäß der Modellierung) möglichen Spielergebnisse aus.
- Wesentliche Modellannahmen werden durch Zellbezüge so eingebunden, dass sie an zentraler Stelle für alle Berechnungen in der Tabelle geändert werden können.

Hinweise auf Literatur und Recherchequellen:
- https://fussballmathe.de

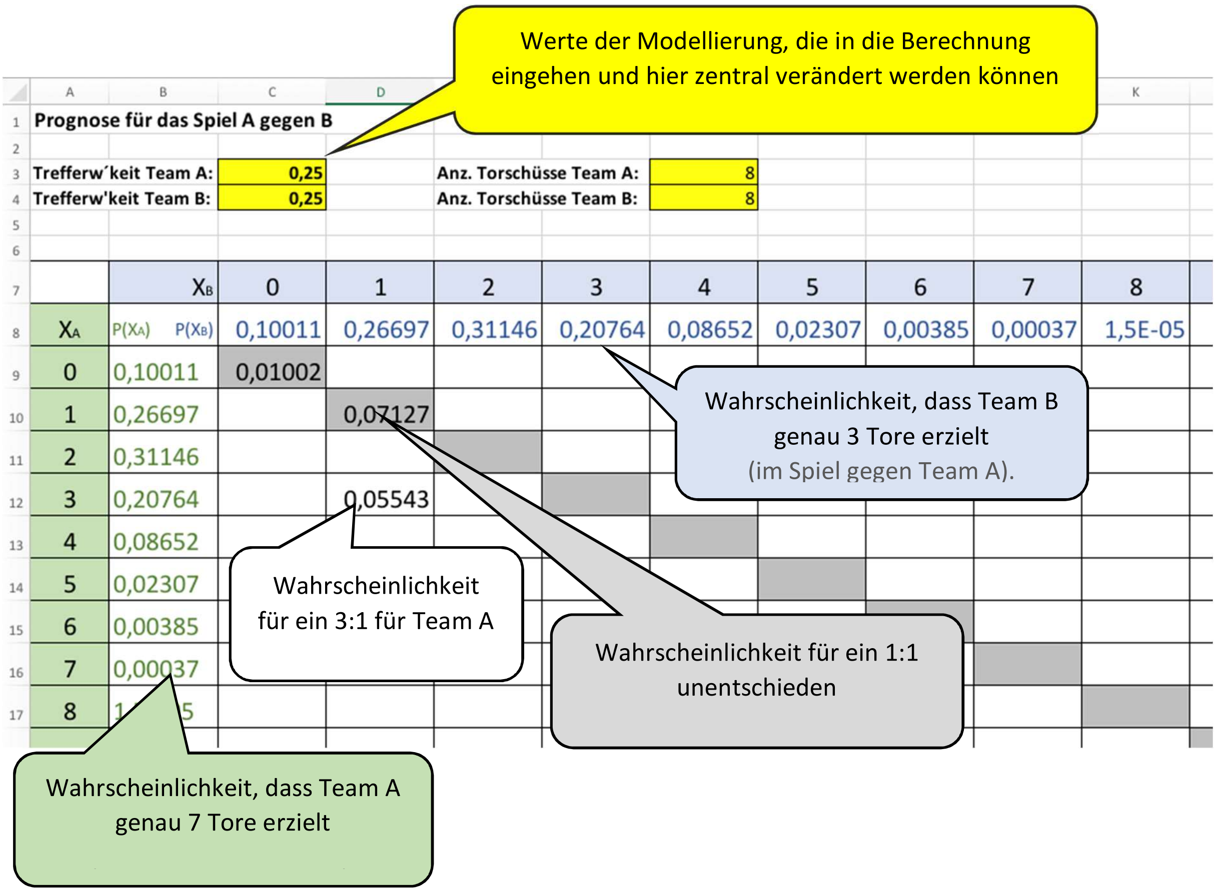
Material M1 Ein sehr allgemeines Modell

In diesem sehr allgemein gehaltenen Modell wird angenommen, dass die Mannschaften der ersten Fußball-Bundesliga alle etwa gleich gut sind, also gleich häufig auf das gegnerische Tor schießen und dabei eine gleich hohe Trefferwahrscheinlichkeit haben.

In der aktuellen Saison der ersten Fußball-Bundesliga wurden bisher (Datum festlegen: ….) ***N* Spiele** ausgetragen. Dabei wurden in allen Spielen zusammen ***S* Torschüsse** (= Versuche, einen Treffer zu erzielen) in ***T* Treffer** verwandelt. Dies führt zu einer **durchschnittlichen Trefferquote *t***, welche als grober Modellwert für die Treffer*wahrscheinlichkeit* dient.

Pro Spiel wurde bisher durchschnittlich $\frac{S}{N}$ - mal auf das Tor geschossen, pro Mannschaft und Spiel also im Mittel $\hat{s}$ mal. Es darf davon ausgegangen werden, dass von einer Mannschaft nicht mehr als $\hat{s}$ Treffer pro Spiel erzielt werden.

Material M2 Beispiel für den Aufbau einer tabellarischen Übersicht



Prognose für das Spiel A gegen B

Trefferw´keit Team A:	0,25	Anz. Torschüsse Team A:	8
Trefferw'keit Team B:	0,25	Anz. Torschüsse Team B:	8

	X_B	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X_A	$P(X_A)$ $P(X_B)$	0,10011	0,26697	0,31146	0,20764	0,08652	0,02307	0,00385	0,00037	1,5E-05
0	0,10011	0,01002								
1	0,26697		0,07127							
2	0,31146									
3	0,20764		0,05543							
4	0,08652									
5	0,02307									
6	0,00385									
7	0,00037									
8	[illegible]									

Erwartete Bearbeitung	**AFB**	**Hinweise**
Angeleitetes Übertragen einer Realsituation in ein mathematisches Modell: Angabe eines Stichtages, an dem die Daten ermittelt wurden Anzahl der ausgetragenen Spiele: *N* Anzahl der Torschüsse: *S* Anzahl der Treffer: *T* → Z. B. unter https://t1p.de/d4mf9 sind die gesuchten Daten für die einzelnen Mannschaften aufgeführt. Addition der 18 Einzeldaten ergibt die gesuchten Werte. Trefferquote: $t = \frac{T}{S}$ Torschüsse pro Mannschaft und Spiel: $\hat{s} = \frac{S}{2 \cdot N}$	I I	Eine einfache Recherche stellt eine geläufige Arbeitstechnik dar. Das Bilden einfacher Anteile ist ein geübtes Verfahren.
Binomialverteilung der Zufallsgröße X: Anzahl der Tore einer Mannschaft pro Spiel mit den Parametern ŝ und t: Für jedes $k \in \{1; 2; \ldots; \ \hat{s}\}$ ist zu berechnen: $P(X = k) = \binom{\hat{s}}{k} \cdot t^k \cdot (1-t)^{\hat{s}-k}$	I	direkte Aufforderung, geübtes Verfahren
Wahrscheinlichkeit für konkrete Spielausgänge: Ein Spielergebnis zwischen zwei Mannschaften A und B kann als zweistufiges Zufallsexperiment modelliert werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass Team A genau T_A Tore erzielt und Team B genau T_B Tore, ergibt sich gemäß der Pfad-Multiplikationsregel: $P(\text{"T}_\text{A} \text{ zu } \text{T}_\text{B}\text{"}) = P(X_A = T_A) \cdot P(X_B = T_B)$	II	selbstständiges Auswählen einer bekannten Modellierung, Übertragung von Gelerntem auf einen vergleich-baren Sachzu-sammenhang, geübte Rechenverfahren
Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm: • Einsatz adäquater Zellbezüge • Verwendung von Formeln • Übersichtliche Darstellung	II	Tabellenkalkulation ist aus dem Unterricht bekannt, Übertragen auf eine neue, aber ver-gleichbare Situation

Anpassungen des Modells (exemplarisch, individuelle Lösungen): • Trefferquoten für einzelne Mannschaften ermitteln (Umsetzung einfach) • Torschüsse pro Spiel für einzelne Mannschaften differenziert betrachten (→ unterschiedlich lange Bernoulli-Ketten betrachten) (Umsetzung relativ einfach, Übersicht erforderlich) • Für die Modellierung der Trefferwahrscheinlichkeiten nicht nur die Trefferquote der Vergangenheit berücksichtigen, sondern beispielsweise auch die Spielbilanz gegen einen konkreten Gegner (Umsetzung anspruchsvoll)	II bis III	Selbstständiges Erfassen und Verarbeiten von Sachverhalten unterschiedlicher Komplexität

Mögliche Impulse im Kolloquium:

- In der vorgeschlagenen Modellierung wird von einer relativen Häufigkeit auf eine Wahrscheinlichkeit geschlossen. Erläutern Sie den fachlichen Hintergrund und bewerten Sie die Angemessenheit dieses Vorgehens.

- Erläutern Sie Voraussetzungen dafür, dass die Zufallsgrößen X_A und X_B als binomialverteilt angesehen werden können.

- Beschreiben Sie, wie Sie Ihre Tabelle um die Ausgabe folgender Angaben erweitern können:
  - Wahrscheinlichkeit dafür, dass Team A gewinnt,
  - Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel unentschieden ausgeht.

- Skizzieren Sie, wie Sie die Berechnung von Erwartungswerten in Ihre Tabelle einbinden können.

- Geben Sie eine Einschätzung für die Relevanz solcher Prognosen.

Kommentare zur Aufgabe „Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Fußball“

- Die Idee zu dieser Aufgabe geht zurück auf den Artikel *„Fußballergebnisse vorhersagen – mit Mathematik prognostizieren*“ von Matthias Ludwig und Reinhard Oldenburg in
  HUMENBERGER, H.; BRACKE, M. (Hrsg.): Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 3, ISTRON-Schriftenreihe. Springer, 2017

- Da während der Vorbereitungszeit kein Austausch zwischen dem Prüfling und der prüfenden Lehrkraft erfolgt, ist eine sorgfältige Formulierung der Anforderungen besonders wichtig. Eine Leitfrage kann dabei für Zieltransparenz sorgen.
  Stationen des Arbeitsprozesses können mit Teilaufgaben aufgezeigt werden.

- Die Aufgaben sollten im Sinne eines Forschungsauftrags offen formuliert sein und möglichst auf kleinschrittige Anleitungen verzichten. Die hier vorgelegte Aufgabe 1 entspricht diesem Anspruch nur teilweise. Um ausreichend Zieltransparenz und Handlungssicherheit für den Prüfling herzustellen, werden die Schritte im ersten Durchlauf des Modellierungsprozesses engmaschig begleitet. Als Gesamtpaket ist die Prüfungsaufgabe dennoch als hinreichend komplex und entdeckungsoffen einzustufen.

- Während in anderen Prüfungsformaten eine Abhängigkeit von Teilaufgaben dringend zu vermeiden ist, gilt dieser Grundsatz für Präsentationsprüfungen nicht. Hier stehen dem Prüfling deutlich mehr Vorbereitungszeit und Recherchemöglichkeiten zur Verfügung, so dass eine selbstständige Überwindung moderater Zugangsschwierigkeiten als Teil der Bearbeitung zumutbar ist.
  In der vorliegenden Prüfungsaufgabe wird die Abhängigkeit der Aufgaben 1 und 2 als strukturelle Unterstützung genutzt:
  Die Tabelle aus Material M2 kann als Orientierung dienen, nimmt aber keine wesentlichen fachlich-inhaltlichen Überlegungen vorweg, da die zugrundeliegenden Ansätze und Rechnungen nicht sichtbar sind.

- Aufgaben für Präsentationsprüfungen sollten so gestellt werden, dass ihre Lösungen nicht komplett im Internet aufzufinden sind. Eine wirkungsvolle Maßnahme ist die Wahl sehr spezifischer Daten. Im vorliegenden Beispiel wird mit aktuellen Realdaten agiert, um Eigentätigkeit zu veranlassen.