

# Mathematik

## Leitlinien der Ausbildung im Fach Mathematik

Ziel der Ausbildung im Fach Mathematik ist es, den LiV die Möglichkeit zu geben, ausgehend von den an der Universität erworbenen fachlichen, didaktischen und pädagogischen Kenntnissen ihre fachdidaktischen Kenntnisse und Fertigkeiten so zu erweitern, dass sie einen Mathematikunterricht planen, gestalten und reflektieren können, der sowohl den Vorgaben aus den Fachanforderungen als auch den allgemeinen und fachspezifischen Ausbildungsstandards gerecht wird.

Um dies zu gewährleisten, knüpfen die Ausbildungsveranstaltungen an die fachlichen und didaktischen Vorerfahrungen der LiV an und enthalten Fallbezüge in Form von gemeinsamen Unterrichtshospitationen, Unterrichtsaufgaben, Dokumenten von Schülerinnen und Schülern sowie Unterrichtsvideos. An den Ausbildungstagen wird die Zusammenarbeit während und auch außerhalb der Veranstaltung zwischen den LiV angeregt, zum Beispiel indem eingesetztes Material ausgetauscht wird. Wichtige Basis der Ausbildung ist die Reflexion des eigenen sowie des gemeinsam besuchten Unterrichts, unter anderem in Hinblick auf den gewählten didaktischen Ansatz sowie die eingesetzten Aufgaben, Methoden und Medien. Ziel der Veranstaltungen ist es, die ständige Weiterentwicklung der Reflexionskompetenz einer Lehrkraft als unabdingbare Voraussetzung für den eigenen Lernprozess darzustellen.

Didaktisch reflektierter Unterricht ist entscheidend für den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen bei den Lernenden. Die Ausbildungsveranstaltungen fokussieren daher jeweils ausgewählte Inhalte einer Leitidee, analysieren diese didaktisch und zeigen Möglichkeiten auf, kompetenzorientiert zu unterrichten. Auf diese Weise sollen die LiV in die Lage versetzt werden, Unterrichtseinheiten so zu planen und zu gestalten, dass parallel zu den inhaltsbezogenen Kompetenzen auch die allgemeinen mathematischen Kompetenzen aufgebaut werden und die neuen Inhalte mit zurückliegenden vernetzt werden, um Basiswissen zu sichern. Die Veranstaltungen thematisieren Aufgabenstellungen und Methoden, die die unterschiedlichen Voraussetzungen und Zugänge der Lernenden berücksichtigen (Binnendifferenzierung). Die Vertiefungsmodule greifen zumeist die Leitideen der Basismodule wieder auf und vertiefen sie schulartspezifisch.

Mit diesem Grundgerüst Unterricht zu planen, angemessen umzusetzen und zu reflektieren ist ein umfangreicher Lernprozess, den Studienleiterinnen und Studienleiter auch in der Ausbildungsberatung begleiten.

## Fachspezifische Ausbildungsstandards

### Die Lehrkraft im Vorbereitungsdienst

1. verfügt über schulrelevantes Wissen zu den mathematischen Leitideen: Zahl; Messen; Raum und Form; funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall.
2. beschreibt und analysiert die individuellen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler und diagnostiziert den Leistungsstand.
3. unterstützt durch die Auswahl geeigneter Inhalte, Darstellungsebenen, Methoden und Handlungskonzepte den Erwerb einer allgemeinen Problemlösefähigkeit der Lernenden.
4. fördert die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen, wie: Argumentieren; Problemlösen; Modellieren; Verwendung von Darstellungen; Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen; Kommunizieren.
5. bestärkt die Lernenden darin, individuelle Problemlösungen zu verfolgen und heuristische Strategien zu nutzen.
6. veranlasst die Lernenden, Lösungswege und Ergebnisse von Aufgaben kritisch und verantwortungsbewusst zu reflektieren.
7. setzt Rechner und geeignete Software im Unterricht angemessen ein.
8. benutzt konsequent die mathematische Fachsprache in adressatengerechter Reduktion und achtet auf deren Verwendung durch die Lernenden.
9. beteiligt sich an der Planung, Durchführung und Auswertung von Parallel- und/oder Vergleichsarbeiten sowie Prüfungen.
10. kennt und erkennt Ursachen für Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht und berät Schülerinnen und Schüler sowie gegebenenfalls Eltern über Förderungsmöglichkeiten.
11. nutzt Fehler als Anlass zur intensiven Klärung eines mathematischen Sachverhaltes.
12. setzt ihr fundiertes mathematisches Fachwissen ein, um schulrelevante Entscheidungen treffen zu können.

### Aufgabenfelder von besonderer Bedeutung

Neben der Vermittlung von fachspezifischen Theorien, Modellen, Konzepten und Methoden sollen auch folgende Themenbereiche Bestandteile aller Ausbildungsveranstaltungen sein.

## **Durchgängige Sprachbildung**

Der Ausbau der Bildungssprache und der Aufbau der Fachsprache sind Aufgaben aller Fächer. In den Ausbildungsveranstaltungen Mathematik werden dabei folgende Aspekte besonders in den Fokus genommen:

- Die Unterscheidung zwischen fachlichem und sprachlichem Anspruch, insbesondere auch in Leistungsnachweisen
- Planung des Unterrichts mit dem steten Blick auf den Spracherwerb (Anknüpfen an die Alltagssprache; Erwerb der Grundvorstellungen, unterstützt durch Alltags- und Bildungssprache; Aufbauen, Üben und Nutzen der Fachsprache)
- Methoden zur Unterstützung des Fachspracherwerbs
- Aufgabenstellungen, die das Leseverstehen, das Hörverstehen, das Sprechen und das Schreiben in den Fokus des Mathematikunterrichts setzen
- Auswertung von Schülerarbeiten mit dem Fokus, die Sprachfähigkeiten zu diagnostizieren
- Gestaltung von Unterrichtsgesprächen, sodass die Schülerinnen und Schüler sich möglichst alle auch sprachlich weiterentwickeln
- Gestaltung von Unterricht, der eine Eingliederung von neu zugewanderten Kindern mit wenig Deutschkenntnissen ermöglicht

## **Inklusive Schule / Umgang mit Heterogenität und Inklusion**

Die inklusive Schule ist ein Aufgabenfeld von besonderer Bedeutung, das sich aus den pädagogischen Zielen des Schulgesetzes ableitet. Sie zeichnet sich durch das Unterrichtsprinzip des Gemeinsamen Lernens aus und bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, auf Basis unterschiedlicher Erfahrungshintergründe, Arbeits- und Herangehensweisen miteinander in einen Dialog über unterschiedliche Sichtweisen zu treten, sich gegenseitig Impulse zu geben und so personale und soziale Kompetenzen weiterzuentwickeln. Das beinhaltet, Barrieren für Teilhabe und Lernen bei Schülerinnen und Schülern zu erkennen und Diskriminierung vorzubeugen.

Damit möglichst alle Schülerinnen und Schüler mit Freude Mathematik betreiben, werden die LiV in den Ausbildungsveranstaltungen dabei unterstützt, folgende Aspekte zu berücksichtigen:

- Arbeiten mit dem EIS-Prinzip (enaktiv – ikonisch – symbolisch), damit alle Schüler/-innen einen Zugang zu den Grundvorstellungen finden
- Gestaltung von offenen Arbeitsaufträgen, die mehrere Lösungswege (oder auch mehrere Lösungen) zulassen
- Einsatz von kooperativen Lernformen
- Unterschiedliches Lerntempo und gegebenenfalls unterschiedliches Lernziel
- Diagnose und daran anschließende passende Fördermaßnahmen (z. B. durch Lernpläne)
- Gezielte Förderung von schwachen und von starken Schülerinnen und Schülern

## Medienbildung

Die Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst sollen ihren Unterricht so gestalten können, dass sie und die Schülerinnen und Schüler kompetent mit den Medien umgehen können, die ihnen zur Verfügung stehen. Dazu gehört insbesondere der Umgang mit Tabellen und Diagrammen mittels Tabellenkalkulationsprogrammen, mit dynamischer Geometrie-Software und dem Taschenrechner. Daher wird bei den Ausbildungsveranstaltungen der Umgang mit folgenden Programmen/Medien sowie der praktische Einsatz im Unterricht thematisiert:

- Unterricht in Computerräumen
- Dynamische Geometrie-Software, z. B. GeoGebra
- Tabellenkalkulation, z. B. Excel
- Taschenrechner
- Nutzung von Lernplattformen
- Umgang mit dem Smartboard
- Internetrecherche
- Präsentationen

## Inhalte der Ausbildungsveranstaltungen

### 1. (A 1) Messen Sek. I – Grundvorstellungen aufbauen

**Ziel:** Die LiV kennen die Stationen zum **Aufbau von Grundvorstellungen** und können sie für die Leitidee Messen konkretisieren.

Anhand des **Flächeninhaltsbegriffs** werden die Stationen zum Aufbau von Grundvorstellungen erarbeitet und die Bedeutung von sowie der Umgang mit Fehlvorstellungen thematisiert. Weitere Themen sind der Umgang mit Einheiten, die **Nutzung von Standardrepräsentanten** für die Begriffsbildung und der Messvorgang. Auf den Artikel von Krauter zum Flächeninhalt wird eingegangen.

### 2. (A 2) Themenorientierung und zentrale Abschlüsse

**Ziel:** Die LiV kennen die Vorteile eines themenorientierten Unterrichts und sind soweit über das Abitur informiert, dass sie ihren Unterricht darauf ausrichten können.

Einen **themenorientierten Unterrichtsgang** arbeiten die LiV exemplarisch durch. Daran anschließend werden Vorteile und Grenzen themenorientierten Arbeitens diskutiert und themenorientiertes Arbeiten wird von Anwendungsorientierung, Projekt- und Lehrgangunterricht abgegrenzt.

Anhand von **Aufgaben aus dem Zentralabitur** werden die Anforderungen für die Schülerinnen und Schüler thematisiert. Der Erwartungshorizont wird besprochen und über die Rahmenbedingungen des Abiturs wird informiert.

### 3. (A 3) Daten und Zufall – Mathematisch kommunizieren

**Ziel:** Die LiV sind in der Lage, einen zu den Fachanforderungen passenden **Unterrichtsgang zur Stochastik** zu entwickeln.

Anhand eines Zufallsexperiments werden die **Fachbegriffe** geklärt, die von den Fachanforderungen für die Sek. I vorgesehen sind. Es wird thematisiert, dass die Ergebnismengen definiert werden müssen.

Mittels **Tabellenkalkulation** wird das **Gesetz der Großen Zahlen** behandelt, dabei wird anschaulich auf die Bedeutung der stochastischen Konvergenz eingegangen. Auch die Pfadregeln (Additions- und Multiplikationsregel) werden anschaulich hergeleitet. Die **Bedeutung der Sprache** in der Stochastik und Konsequenzen für den Unterricht werden mit den LiV herausgearbeitet.

### 4. (A 4) Daten und Zufall – Vertiefung

**Ziel:** Die LiV kennen verschiedene Zugänge zu den mathematischen Inhalten: Bedingte Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Zufallsgrößen; Schätzen und Testen von Hypothesen.

Ausgehend von den Fachbegriffen des Moduls „Daten und Zufall“ werden die in der Oberstufe neu zu erlernenden Begriffe und Zusammenhänge erläutert. Unter Zuhilfenahme der Abituraufgaben wird eine Strukturierung der mathematischen Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler vorgenommen. Neben verschiedenen Darstellungen (Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, Verteilungen) wird auch der Einsatz moderner Taschenrechner im Oberstufenunterricht diskutiert. Anhand von konkreten Beispielen werden schließlich Grundlagen des Testens und Schätzens thematisiert und mithilfe von Geogebra veranschaulicht.

### 5. (A 5) Zahl (Terme und Gleichungen) – mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

**Ziel:** Die LiV kennen die **verschiedenen Rollen, die Variablen haben können**, kennen typische Schülerfehler und können Gegenmaßnahmen einleiten.

Als roter Faden ziehen sich die verschiedenen Rollen von Variablen (allgemeine Zahl (Unbestimmte), Unbekannte und Veränderliche) durch den Tag, für die jeweils repräsentative Aufgaben und Übungen vorgestellt werden, mit deren Hilfe **tragfähige Grundvorstellungen** aufgebaut werden sollen. Dabei ist an die Vorerfahrungen aus der Grundschule anzuknüpfen.

Im Fokus stehen auch die Fachsprache sowie die Notation von Äquivalenzumformungen.

### 6. (B 1) Zahlbereichserweiterungen

**Ziel:** Die LiV kennen die Grundvorstellungen, die die Lernenden **vor** der jeweiligen Erweiterung des Zahlbereichs aufgebaut haben, und entwickeln diese tragfähig für  $\mathbb{Q}_{<0}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{R}$  weiter.

Die in der Grundschule aufgebauten Grundvorstellungen von Zahlen werden thematisiert und die mit den Erweiterungen des Zahlbereichs verbundenen Anpassungen und Veränderungen dieser Grundvorstellungen diskutiert.

Es werden unterschiedliche didaktische Konzepte sowie verschiedene handlungsorientierte Zahlbereichserweiterungen vorgestellt (EIS-Prinzip als didaktische Leitlinie), von denen mindestens einer von den LiV erprobt wird. Anhand verschiedener Beispiele wird auf die Notwendigkeit der wiederholten Thematisierung von Rechenregeln und Rechengesetzen bei jeder Zahlbereichserweiterung eingegangen.

## 7. (B 2) Funktionaler Zusammenhang – Darstellungen verwenden

Ziel: Die LiV können die **Einführung von neuen Funktionsklassen** unter Berücksichtigung der **Darstellungsformen** Text, Term, Tabelle und Graph planen.

Verschiedene handlungsorientierte Zugänge zur Einführung von Funktionen werden vorgestellt und mindestens einer von den LiV ausprobiert. Anhand verschiedener Beispiele wird der Wechsel der Darstellungsformen (Text, Tabelle, Graph, Term) thematisiert und auf die Grundvorstellungen des funktionalen Zusammenhangs (Zuordnung, Kovariation, Funktion als Ganzes) eingegangen. Die Erweiterung einer Funktionsklasse wird exemplarisch besprochen und der Einfluss der einzelnen Parameter in der Funktionsgleichung mithilfe von GeoGebra von den LiV animiert.

Ein dynamisches Geometrie-System (DGS) (GeoGebra) wird zur Lösung ausgewählter Probleme herangezogen.

## 8. (B 3) Funktionaler Zusammenhang Sek. II

Ziel: Die LiV kennen **geeignete Kontexte**, um in die Differentialrechnung einzuführen, und können Software zur Visualisierung und zur didaktischen Reduktion einsetzen.

Am Beispiel werden Merkmale eines gelungenen **Einstiegs in den Analysis-Unterricht in der Sek. II** erarbeitet, bei dem die Neuerarbeitung von Inhalten mit der Wiederholung von Grundlagen aus dem Sek.-I-Unterricht verknüpft wird. Verschiedene **Zugänge zum Ableitungsbegriff** werden thematisiert und ein **themenorientierter Unterrichtsgang** erarbeitet, bei dem **Excel oder GeoGebra** als Hilfsmittel zur Visualisierung und zum Auslagern aufwendiger Berechnungen einbezogen werden. Die LiV formulieren Bedingungen für Null-, Extrem- und Wendestellen und visualisieren diese mit GeoGebra. Anhand von Aufgaben aus dem Zentralabitur werden exemplarisch Fähigkeiten ermittelt, die die Schülerinnen und Schüler haben müssen, um **hilfsmittelfreie Aufgaben im Abitur** lösen zu können.

## 9. (B 4) Leistungsüberprüfung

Ziel: Die LiV kennen die rechtlichen Rahmenbedingungen für Leistungsmessung und Bewertung und können **diagnostische Verfahren** im Unterricht einsetzen.

Anhand von Schülerbeispielen wird erarbeitet, wie zwischen sprachlichen und fachlichen Schwierigkeiten zu unterscheiden ist, und wie der **Ausbau der Bildungs- und Fachsprache parallel zum Erwerb der Fachinhalte** geplant werden kann. Die Gestaltung von **ziendifferenten Klassenarbeiten** wird

exemplarisch umgesetzt. Im Hinblick auf das Gemeinsame Lernen wird die Bedeutung der drei in den Fachanforderungen beschriebenen Anforderungsbereiche und Anforderungsebenen für die Wahl geeigneter Aufgabenformate deutlich gemacht und das Heranführen der Schülerinnen und Schüler an die in Arbeitsaufträgen zu verwendenden Operatoren konkretisiert. Die rechtlichen Rahmenbedingungen für die Leistungsbewertung werden thematisiert. Auch die Beurteilung von mündlichen Leistungen und die Arbeit mit Selbsteinschätzungsbögen werden thematisiert.

#### 10. (B 5) Messen Sek. II

Ziel: Die LiV durchlaufen die Planungsphasen eines Unterrichts, der in die metrische Geometrie in der Sekundarstufe II (als Beispiel für die Leitidee Messen) einführt. Sie entwickeln schülergerechte Zugänge zum Skalarprodukt und zum Vektorprodukt und erkennen den Nutzen der geometrischen Interpretationen dieser Verknüpfungen zur Lösung von typischen Fragestellungen aus der analytischen Geometrie.

Diese Aufgabenstellungen werden durch geeignete Modelle, die Schüler/-innen während des gesamten Unterrichts zur analytischen Geometrie begleiten können, visualisiert. Es wird anhand der Modelle aufgezeigt, dass ein geometrisches Abstandproblem auf verschiedene Weisen gelöst werden kann. Auf die Dokumentation von Lösungswegen in der Geometrie wird eingegangen.

Zur Visualisierung wird ebenfalls das dynamische Geometrieprogramm GeoGebra verwendet.

#### 11. (C 1) Modellieren – Textarbeit

Ziel: Die LiV kennen den **Modellierungskreislauf** und können die Schüler/-innen bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben **strategisch und sprachlich unterstützen**.

Exemplarische Modellierungsaufgaben sowie eingekleidete Aufgaben werden von den LiV bearbeitet und deren Einsatz im Unterricht reflektiert. Dazu gehört, dass die einzelnen Teilprozesse des Modellierungskreislaufs transparent gemacht werden und die Lehrkraft den Einsatz von Textaufgaben durch eine entsprechende **Didaktisierung** der Texte begleitet (vor dem Lesen – während des Lesens – nach dem Lesen). Der Einsatz und die Benotung von Modellierungsaufgaben in Leistungsnachweisen werden thematisiert.

#### 12. (C 2) Unterrichtsplanung an einem Beispiel aus der Sek. II

Ziel: Die LiV kennen die Phasen einer strukturierten Unterrichtsplanung und können didaktische und methodische Entscheidungen begründet treffen und voneinander abgrenzen.

Anhand eines exemplarischen Beispiels werden die verschiedenen Phasen der Unterrichtsplanung behandelt: Fachliche Klärung und didaktische Analyse im Rahmen der didaktischen Rekonstruktion (also unter besonderer Berücksichtigung der Lernenden und mit Rückbezügen), Planung der Tiefenstruktur unter Zuhilfenahme eines Prozessmodells sowie Planung der Sichtstruktur.

### 13. (C 3) Raum und Form – Problemlösen

Ziel: Die LiV kennen **Strategien, Prinzipien und Hilfsmittel** zum Problemlösen und können die Schüler/-innen an das **Konstruieren** und Problemlösen heranzuführen.

Heuristische Strategien, Prinzipien und Hilfsmittel werden vorgestellt und einzelne Heuristiken von den LiV am Beispiel einer Aufgabe so aufgeschlüsselt, dass sie als Hilfestellung für Schüler/-innen dienen kann. Der unterrichtliche Umgang mit Problemlöseaufgaben wird besprochen. Außerdem werden Anregungen gegeben, wie Eigenschaften und Definitionen über die Jahrgänge vermittelt und voneinander abgegrenzt werden können, dabei werden der Aufbau und die **Verwendung einer exakten (Fach-)Sprache** fokussiert. Auf die Notwendigkeit, sowohl händisch als auch mit dynamischer Geometriesoftware zu konstruieren, wird eingegangen und exemplarisch eine Aufgabe mit einer DGS gelöst.

### 14. (C 4) Raum und Form – argumentieren und beweisen

Ziel: Die LiV können den Geometrieunterricht in besonderer Weise zur Förderung der Argumentations- und Problemlösekompetenz nutzen.

Es werden verschiedene Aspekte des Beweisens in der Geometrie thematisiert. Dabei wird aufgezeigt, warum sogenannte Interpolationsprobleme besonders gut zur Schulung der Argumentationskompetenz genutzt werden können. Zur Bearbeitung solcher Probleme wird eine Struktur vorgestellt, innerhalb derer die Schüler/-innen eigene Beweisübungen durchführen und heuristische Strategien erproben können. Die LiV erkennen, dass eine solche Struktur eine gezielte Differenzierung und Diagnose ermöglicht. Außerdem wird in diesem Modul auf die Begriffsbildung in der Geometrie eingegangen. Die verschiedenen Stufen des Begriffsverständnisses werden vorgestellt und von den LiV mit dem Unterricht in verschiedenen Jahrgangsstufen verknüpft.

### 15. (C 5) Lernumgebungen und Aufgabenkultur

Ziel: Die LiV kennen die Einflussfaktoren für gelingende Lernumgebungen sowie verschiedene Aufgabenformate und können für Schüler/-innen **passende Lernumgebungen gestalten**.

Im Zentrum des Ausbildungsmoduls steht das Differenzierungspotenzial von Aufgaben als Qualitätskriterium – neben der Variation von Aufgaben mit dem Ziel, den Schüler/-innen zielgerichtetes Arbeiten an den Kompetenzen zu ermöglichen. Dazu wird die Einteilung von Aufgaben nach dem Öffnungsgrad vorgestellt (zu unterscheiden, welche Informationen vorgegeben sind von der Startsituation, dem Weg und dem Ziel) und von den LiV werden zu einem Thema Blütenaufgaben erstellt. Mithilfe des Prozessmodells zur Unterrichtsgestaltung von Leisen wird auf die Faktoren der materialen und personalen Steuerung des Kompetenzerwerbs eingegangen und thematisiert, wie dieses Modell im Unterricht praktisch umgesetzt werden kann.