

Division mit Rest

In der Grundschule verwenden viele Lehrkräfte die Schreibweise $13:4 = 3 R 1$, die man in dieser Form sogar in einigen Schulbüchern findet. Was soll daran schlecht sein?

fachlich korrekt

Ein einfaches Beispiel zeigt, dass die Verwendung der Schreibweise $3 R 1$ schnell zu falschen Aussagen führen kann.

Die Zahl 16 ist selbstverständlich größer als 13, denn $13 + 3 = 16$. Demzufolge ist die Aussage $13 \neq 16$ wahr.

Nun dividieren wir die beiden Zahlen 13 und 16. Dafür wählen wir den Divisor jeweils so, dass die Ergebnisse in der Schreibweise mit Rest scheinbar gleich sind. Es wäre durchaus möglich, dass beide Quotienten gleich sind, denn der größere Dividend 16 wird durch einen größeren Divisor geteilt und der kleinere Dividend 13 durch einen kleineren Divisor. Wir rechnen:

$$13 : 4 = 3 R 1$$

$$16 : 5 = 3 R 1$$

Die Lernenden gehen zu Recht davon aus, dass das Ergebnis dieser Rechnung eine Zahl ist. Zwei Zahlen kann man vergleichen. Es ist also erlaubt und durchaus sinnvoll zu fragen: Ist $3 R 1 = 3 R 1$?

Diese Frage untersuchen wir mit Hilfe einer Gleichung:

$$\begin{array}{l} 13 : 4 \stackrel{?}{=} 16 : 5 \quad | \cdot 20 \\ (13 : 4) \cdot 20 \stackrel{?}{=} (16 : 5) \cdot 20 \\ 260 : 4 \stackrel{?}{=} 320 : 5 \\ 65 \neq 64 \end{array}$$

An dieser Stelle wird deutlich, dass $3 R 1$ und $3 R 1$ zumindest in unserem Beispiel nicht gleich sein können. Jedoch erweckt die Schreibweise den Anschein, beide Ergebnisse seien gleich. Worin liegt das Problem?

Wir haben eine entscheidende Information weggelassen, nämlich den jeweiligen Divisor.

„13 geteilt durch 4 geht dreimal, und beim Teilen durch 4 bleibt der Rest 1.“

„16 geteilt durch 5 geht dreimal, und beim Teilen durch 5 bleibt der Rest 1.“

$3 R 1$ ist bei Division durch 4 also ungleich $3 R 1$ bei Division durch 5. In der Probe $3 \cdot 4 + 1 = 13 \neq 16 = 3 \cdot 5 + 1$ wird dies deutlich.

fachlich kohärent

$$13 : 4 = 3 + 1 : 4$$

$$16 : 5 = 3 + 1 : 5$$

„Bei der Division mit Rest ist die Divisionsschreibweise zu bevorzugen“ (Fachanforderungen Mathematik Grundschule, Seite 28). Diese Darstellung gibt alle Informationen vollständig an: den ganzzahligen Teil des Quotienten, den Rest sowie den Divisor. Stellt man das Ergebnis in dieser Form dar, hat es die gleiche Qualität wie ein Zahlenwert. Insbesondere kann man zwei Ergebnisse wie Zahlen miteinander vergleichen, was in der Darstellung $3 \text{ R } 1$ unmöglich ist. Die Divisionsschreibweise ist fachlich korrekt und darüber hinaus didaktisch sinnvoll. Sie ist zunächst vorteilhaft bei der Schreibweise der Probe.

$$13 : 4 = 3 + 1 : 4$$

Multiplizieren mit 4 ergibt

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

Vor allem aber können die Lernenden bei der Divisionsschreibweise von einer aus der Grundschule vertrauten Darstellung ausgehen, wenn Brüche und Dezimalbrüche den ihnen vertrauten Zahlbereich erweitern. „*Du darfst das jetzt nicht mehr so schreiben wie in der Grundschule*“ wäre eine sehr ungünstige Alternative. In der Orientierungsstufe können die Zahlen aus unserem Beispiel zwei neue Darstellungen annehmen, in denen die vertraute Darstellung weiterleben und wachsen darf.

$$13 : 4 = 3 + 1 : 4 = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4} = 3,25$$

$$16 : 5 = 3 + 1 : 5 = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} = 3,2$$

Anknüpfen statt auslöschen und neu bauen

Für die Lernenden ist jeweils alles neu. Sie können genauso gut bzw. genauso mühsam die Schreibweise $3 \text{ R } 1$ lernen wie die Schreibweise $13 : 4 = 3 + 1 : 4$. Dabei ist der Algorithmus des schriftlichen Dividierens ohnehin schwierig genug. Das Lernen sollte nicht zusätzlich durch eine fachlich problematische Schreibweise erschwert werden, die man zwei Jahre später bei der Zahlbereichserweiterung auslöschen und durch eine anders aussehende Schreibweise ersetzen muss. Dagegen bietet die Divisionsschreibweise die Chance, in der Sekundarstufe I in natürlicher Weise an Ergebnisse des Grundschulunterrichts anzuknüpfen.

Für viele Lehrkräfte, Eltern und Nachhilfelehrer aus dem Familienkreis ist die Divisionsschreibweise neu. Diese Erwachsenen haben jedoch den Vorteil auf ihrer Seite, dass sie bereits dividieren können. Die Fachanforderungen Mathematik Grundschule muten ihnen zu, sich möglicherweise von einer anderen vertrauten Schreibweise zu lösen um die Lernenden in den Genuss einer fachlich korrekten und kohärenten Schreibweise zu bringen. Dieser Vorteil sollte die Mühe wert sein, uns an eine neue Schreibweise zu gewöhnen.