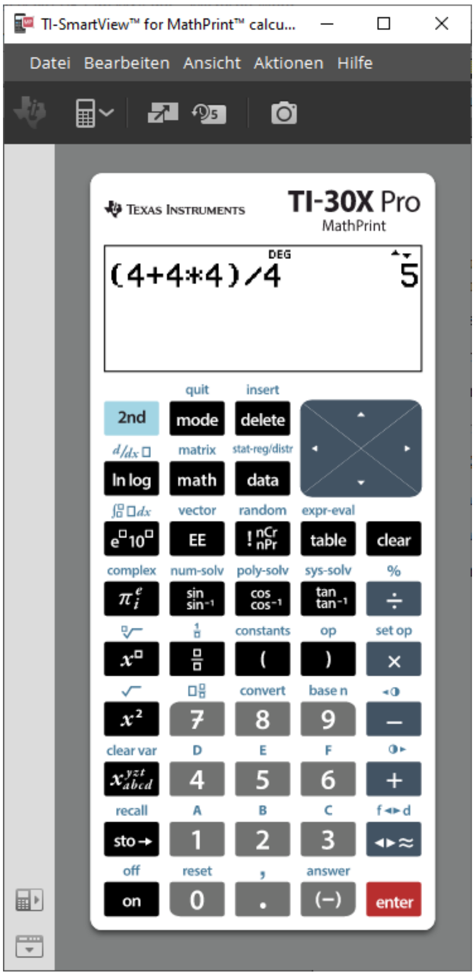
Nutzung der im MSA zulässigen erweiterten Funktionen des wissenschaftlichen Taschenrechners am Beispiel des TI - 30 X Pro Mathprint



Die Graphiken in diesem Skript wurden mit dem Emulationsprogramm TI SmartView der Firma Texas Instruments für das Rechnermodell TI - 30 X Pro Mathprint erstellt. Lehrkräfte können mit diesem Programm sehr einfach Graphiken erstellen, kopieren und in eigene Arbeitsbögen einfügen.

Wenn die Schule die Anschaffung dieses Rechnermodells empfiehlt, sollte im Unterricht die Einführung in die Bedienung des TI - 30 X Pro allerdings live mit diesem Programm über einen Beamer erfolgen.

Ähnliche Emulationsprogramme gibt es für alle modernen Taschenrechnermodelle.

Zulässigkeit erweiterter Funktionen des wissenschaftlichen Taschenrechners im MSA

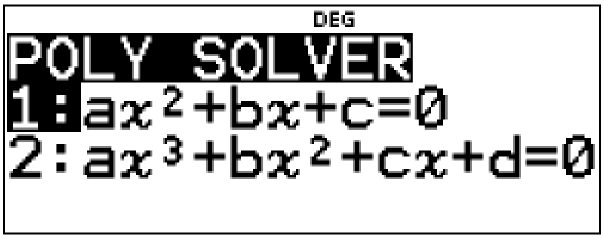
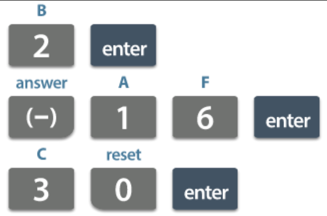
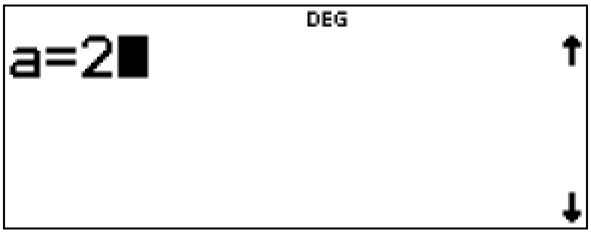
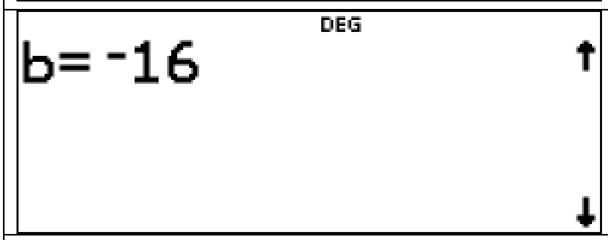
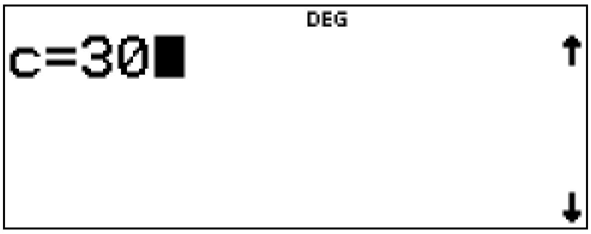
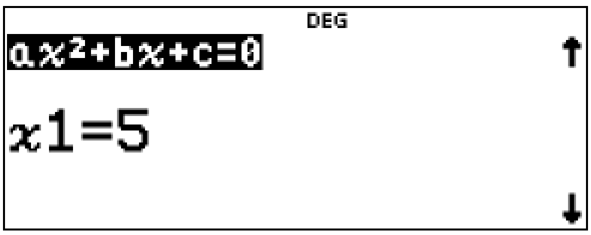
Im MSA dürfen bei der Bearbeitung der Komplexaufgaben alle eingebauten Funktionen des wissenschaftlichen Taschenrechners verwendet werden. Dazu gehören das Lösen von quadratischen Gleichungen und von linearen Gleichungssystemen sowie das Anlegen von Wertetabellen für Funktionen mit Hilfe der entsprechenden Menüpunkte.

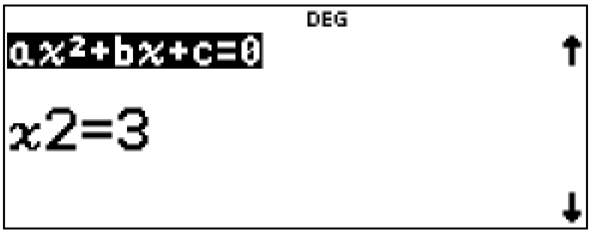
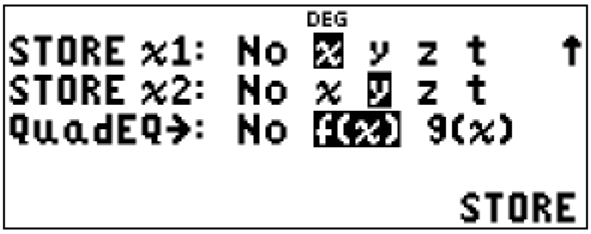
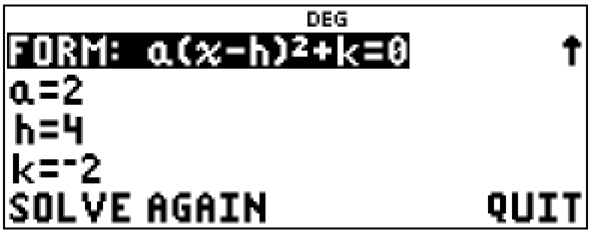
Es ist abzuwägen, ob außerdem im Fall des Kosinussatzes die SOLVE-Funktion verwendet werden sollte, siehe Seite 8.

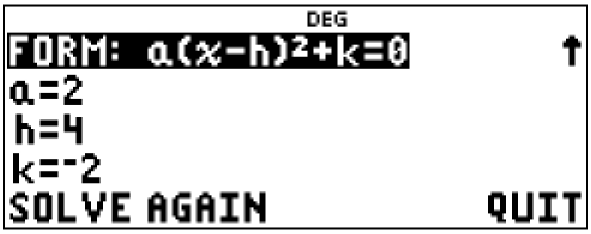
Quadratische Gleichungen lösen

Vorbemerkungen: Die Gleichung muss in der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ vorliegen. Um die Eingabemaske nutzen zu können muss die Gleichung ggf. zuvor händisch umgeformt werden.

Insbesondere wenn die Gleichung bereits in Normalform $x^2 + px + q = 0$ vorliegt, ist die Notwendigkeit der Eingabe $a = 1$ nicht jedem offensichtlich. Da hier der Fehler $a = 0$ zu erwarten ist, sollten Lehrkräfte darauf hinweisen, dass ggf. $a = 1$ eingegeben werden muss.

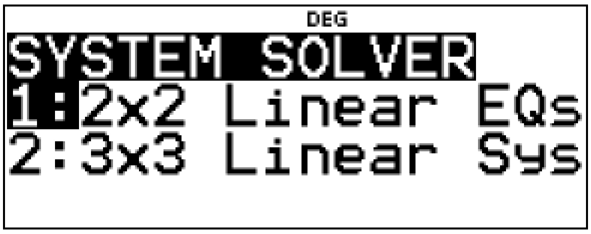
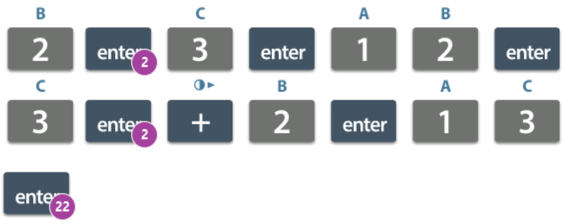
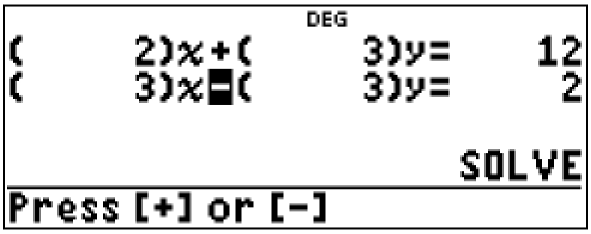
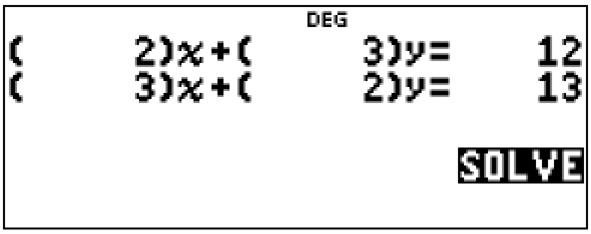
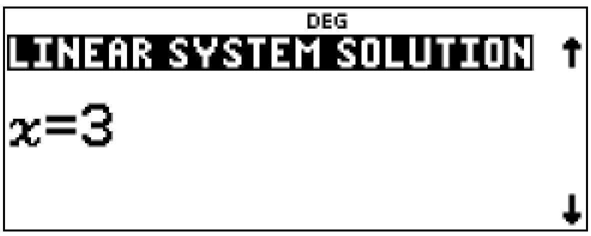
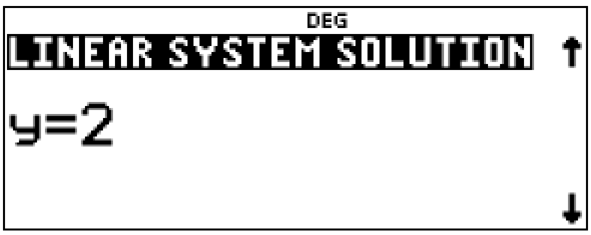
Bedienungsschritte und Displayanzeige	**Kommentar**
	erforderliche Tastenfolge um das Menü 'Polynom-Gleichung' zu wählen, und dort den Punkt 1 für quadratische Gleichungen.
	Das Verfahren basiert auf der geschlossenen Lösungsformel, auch *a*-*b*-*c*-Formel genannt
	**Beispiel:** $2x^2 - 16x + 30 = 0$
	$a = 2$ mit der Eingabetaste enter bestätigen **Hinweis:** Die Eingabe $a = 0$ verursacht wegen einer Division durch 0 eine Fehlermeldung.
	$b = -16$ Vorzeichen-Minus-Taste verwenden, mit der Eingabetaste enter bestätigen
	$c = 30$ mit der Eingabetaste enter bestätigen
	Eingabe der Koeffizienten *a*, *b* und *c* komplett durch erneutes Betätigen der Eingabetaste enter die erste Lösung abrufen

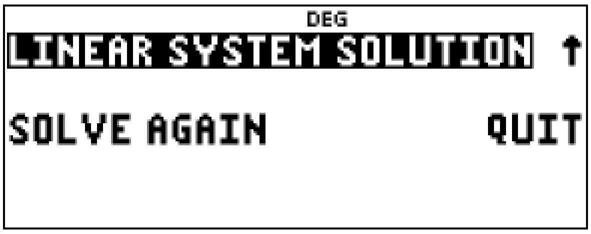
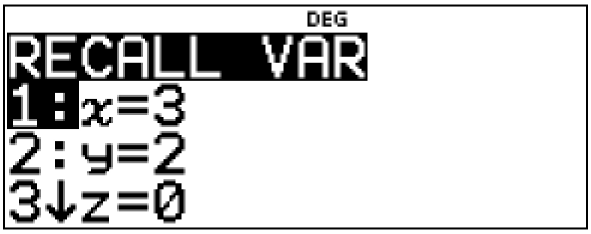
	durch erneutes Betätigen der Eingabetaste $\boxed{\text{enter}}$ die zweite Lösung abrufen
An dieser Stelle ist die Lösung der quadratischen Gleichung beendet. Falls gewünscht, können die Lösungen jetzt gespeichert werden.	
	optional: durch Betätigen der Cursor-Pfeiltaste ► ggf. den Namen des Speichers wählen und mit der Eingabetaste $\boxed{\text{enter}}$ bestätigen. Auch der Funktionsterm der zugehörigen Parabel kann als $f(x)$ gespeichert werden.
	optional: durch erneutes Betätigen der Eingabetaste $\boxed{\text{enter}}$ die Koordinaten des Scheitelpunkts der zugehörigen Parabel abrufen
Der Rechner bleibt im gewählten Menü 'Polynom-Gleichung'. Falls gewünscht, mit QUIT oder 2nd quit mode Rückkehr zum Menüpunkt 'Berechnen'.	

Das Gerät bietet zusätzlich noch die Koordinaten des Scheitelpunkts der zugehörigen Parabel an.	
	optional: durch erneutes Betätigen der Eingabetaste $\boxed{\text{enter}}$ die Koordinaten des Scheitelpunkts der zugehörigen Parabel abrufen Die Funktionsgleichung der zugehörigen Parabel kann als $f(x)$ gespeichert werden.

Lineare Gleichungssyteme lösen

Vorbemerkungen: Für die Eingabemaske muss das Gleichungssystem in der Form $\left|\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right|$ vorliegen. Um die Eingabemaske nutzen zu können müssen die Gleichungen ggf. zuvor händisch umgeformt werden. Kommt in einer der Gleichungen x bzw. y ohne Faktor vor, muss bei dem entsprechenden Koeffizienten der Wert 1 eingegeben werden. Hier ist der Fehler zu erwarten, dass 0 eingegeben wird, "*weil nichts vor dem x steht*".

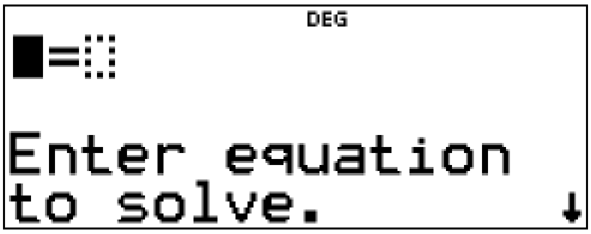
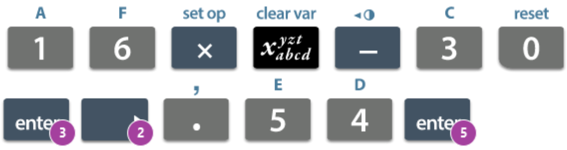
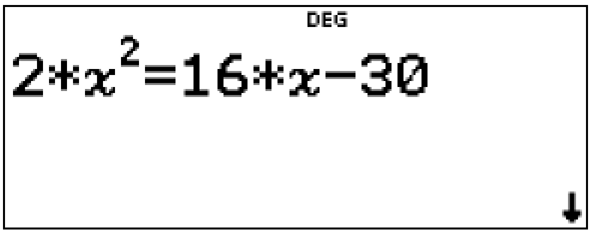
Bedienungsschritte und Displayanzeige	**Kommentar**
	erforderliche Tastenfolge um den Menüpunkt 'Gleichungssystem' zu wählen sowie für ein 2×2-System den Punkt 1
	Das Verfahren basiert auf der geschlossenen Lösungsformel $x=\dfrac{c\cdot e-b\cdot f}{a\cdot e-b\cdot d}$ und $y=\dfrac{a\cdot f-c\cdot d}{a\cdot e-b\cdot d}$.
	**Beispiel:** $\left|\begin{array}{l} 2x+3y=12 \\ 3x+2y=13 \end{array}\right|$
	Eingabe der Koeffizienten, jeweils mit der Eingabetaste enter bestätigen, ggf. bei negativen Zahlen Vorzeichentaste (−) verwenden, beim zweiten Summanden besteht statt dessen auch die Möglichkeit, ein Minuszeichen einzugeben
	Lösung durch Betätigen der Eingabetaste enter abrufen
	Lösung durch Betätigen der Eingabetaste enter abrufen
	Lösung durch Betätigen der Eingabetaste enter abrufen

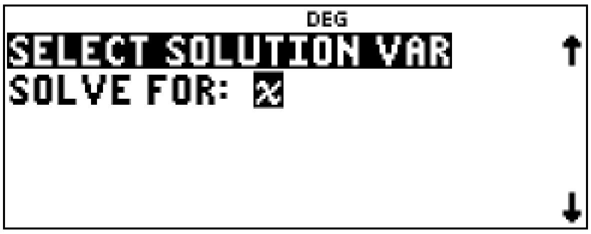
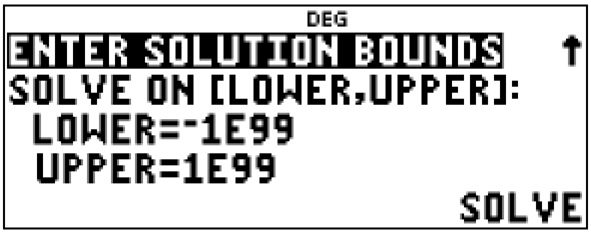
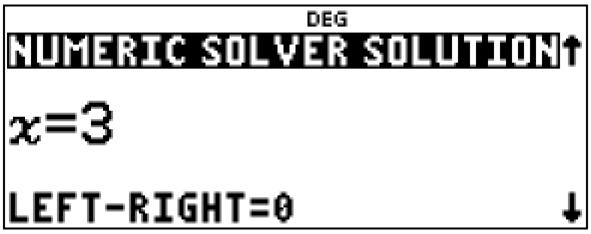
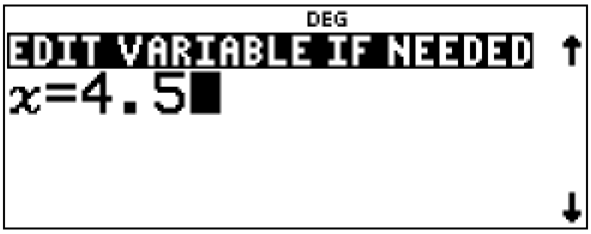
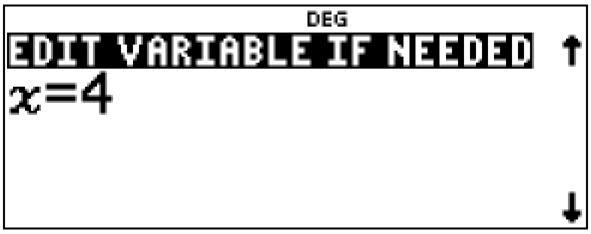
	ggf. mit den Pfeiltasten auswählen und mit der Eingabetaste enter bestätigen
	Die Lösungen sind in *x* und *y* gespeichert und können mit der Tastenfolge 2nd sto→ (recall) x^{yzt}_{abcd} (clear var) abgerufen werden.
Ohne Druck auf die Pfeiltaste bleibt der Rechner im gewählten Menü 'Polynom-Gleichung'. Falls gewünscht, mit QUIT oder 2nd mode (quit) Rückkehr zum Menüpunkt 'Berechnen'.	

Quadratische Gleichungen lösen mit der SOLVE-Funktion (optional, nicht empfohlen)

Vorbemerkungen: Der wissenschaftliche Taschenrechner bietet mit der SOLVE-Funktion die Möglichkeit, beliebige nichtlineare Gleichungen numerisch zu lösen. Vermutlich wird dabei das Newtonsche Näherungsverfahren verwendet. Es wird jeweils nur eine Lösung ermittelt, auch wenn die Gleichung mehrere Lösungen hat. Welche Lösung gefunden wird, hängt vom gewählten Startwert ab.

Das folgende Beispiel $2x^2 = 16x - 30$ dient lediglich dem Zweck, an einem bereits bekannten und gut durchschaubaren Fall die Bedienung und mögliche Schwierigkeiten zu illustrieren. Es wird ausdrücklich davon abgeraten, quadratische Gleichungen mit der SOLVE-Funktion zu lösen. Es kann aber sinnvoll sein, das schwierige Auflösen des Kosinussatzes mit Hilfe der SOLVE-Funktion ausführen zu lassen. Zur Einführung das folgende Beispiel:

Bedienungsschritte und Displayanzeige	**Kommentar**
	erforderliche Tastenfolge um den Menüpunkt 'numerisches Lösen von Gleichungen' zu wählen
	Es erscheint eine Eingabemaske für den Term auf der linken Seite sowie auf der rechten Seite der Gleichung.
	Koeffizient 2, Multiplikationszeichen $\boxed{\times}$, Speicher x einsetzen und anschließend quadrieren; Term auf der linken Seite fertig
	mit der Pfeiltaste auf die rechte Seite wechseln, Term auf der rechten Seite eingeben
	nächste Schritte durch Betätigen der Eingabetaste $\boxed{\text{enter}}$ abrufen oder ggf. Pfeiltasten drücken bzw. entsprechende Eingaben vornehmen
	Achtung, Falle: $x = \sqrt{2}$ ist nicht die Lösung der Gleichung! Es handelt sich vielmehr um den zuletzt in x gespeicherten Wert. Diese Zahl könnte als Startwert für das Verfahren verwendet werden.

	nächste Schritte durch Betätigen der Eingabetaste $\boxed{\text{enter}}$ abrufen
	
	Mit allen Startwerten kleiner als 4, hier war es $x = \sqrt{2}$, findet das Newton-Verfahren bei dieser Gleichung die Lösung $x = 3$.
	Wird statt dessen bei diesem Schritt nicht sofort die Eingabetaste $\boxed{\text{enter}}$ betätigt, sondern zuvor mit der Tastenfolge Startwert 4.5 $\boxed{\text{enter}}$ der Startwert 4,5 eingegeben ...
	... dann findet das Newton-Verfahren bei dieser Gleichung die Lösung $x = 5$.
	Wir testen das Verfahren und wählen als Startwert $x = 4$. Diese Stelle liegt genau zwischen den beiden Lösungen $x = 3$ und $x = 5$. Bei dieser Gleichung und diesem Startwert gibt das Verfahren die kleinere der beiden Lösungen an, also $x = 3$.

Fazit: Bei quadratischen Gleichungen ist die geschlossene Lösungsformel im Menüpunkt 'Polynom-Gleichung' günstiger. Der einzige Vorteil des Newton-Verfahrens besteht bei quadratischen Gleichungen darin, dass man die Gleichung nicht mit händischen Unformungs-schritten in die von der Eingabemaske erwartete Form bringen muss.

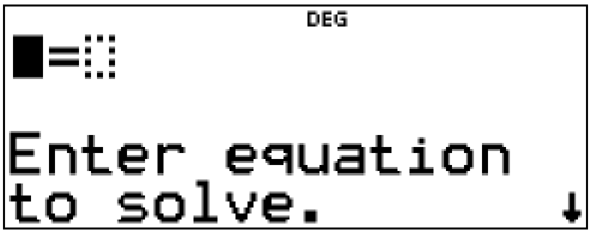
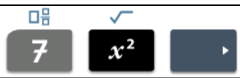
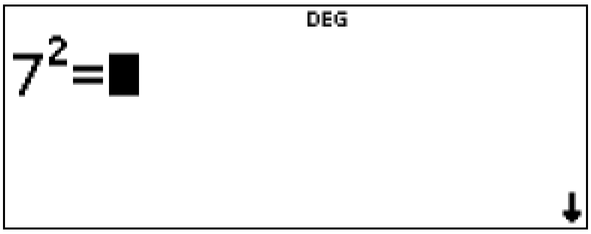
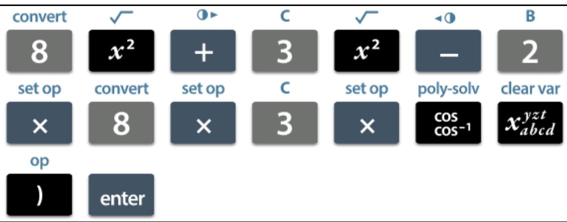
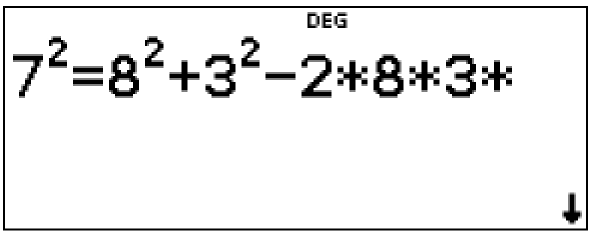
Anmerkung: Man könnte sogar lineare Gleichungen mit der SOLVE-Funktion lösen lassen. Hierbei verhält sich das Newton-Verfahren völlig unproblematisch. Die einzige Klippe neben der etwas komplizierten Bedienung bleibt, dass man den vorgeschlagenen Startwert nicht bereits für die Lösung halten darf.

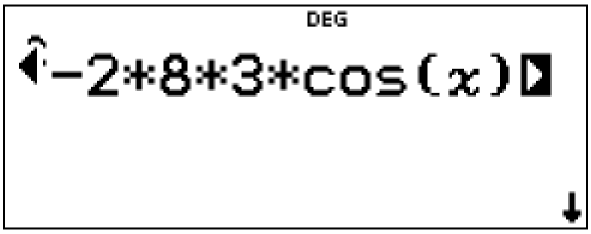
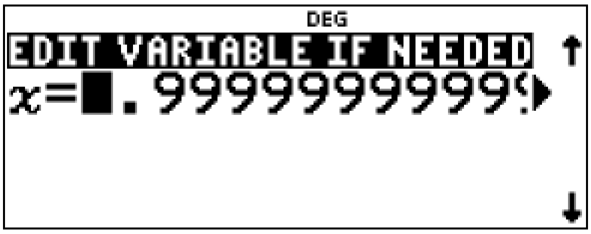
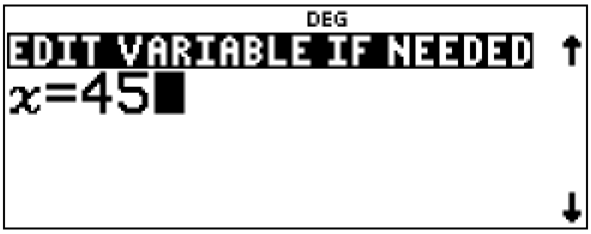
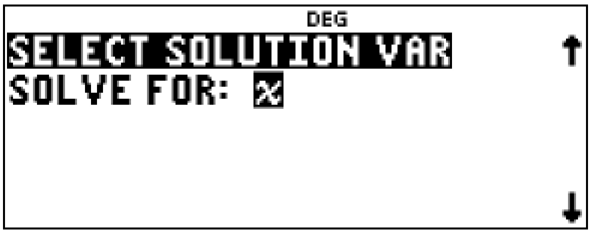
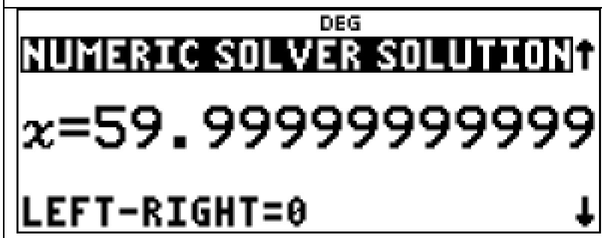
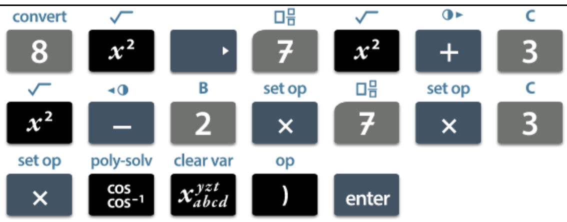
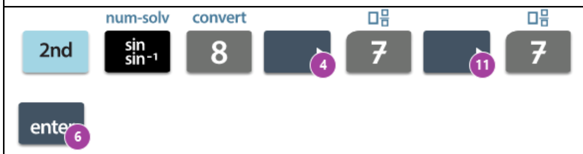
Den Kosinussatz nach einem Winkelmaß auflösen mit der SOLVE-Funktion (optional)

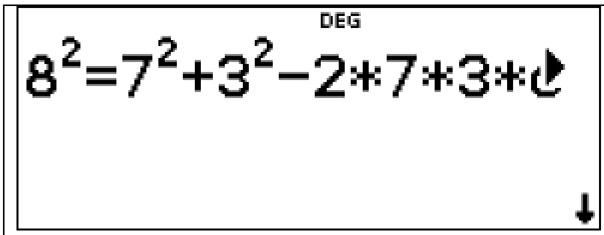
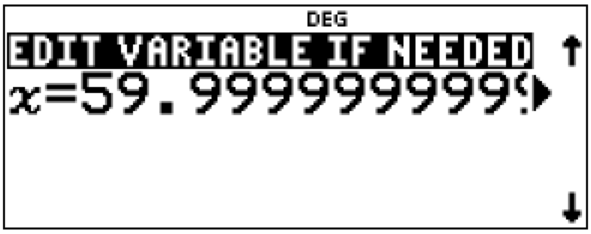
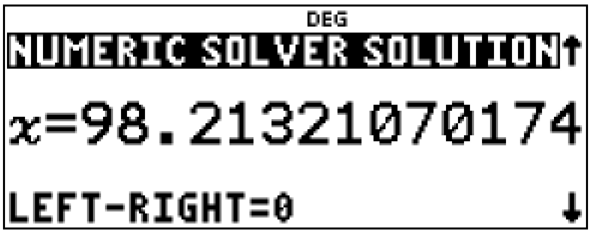
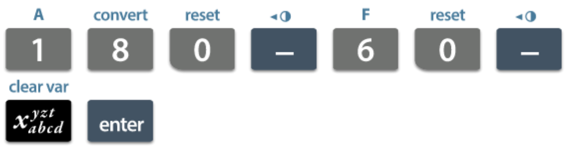
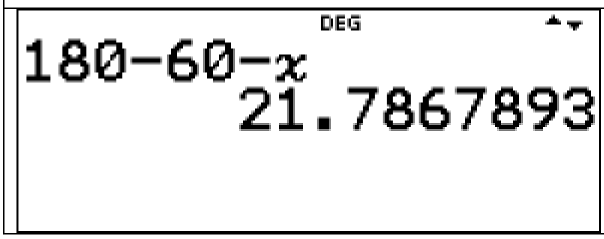
Vorbemerkungen: Der wissenschaftliche Taschenrechner bietet mit der SOLVE-Funktion die Möglichkeit, beliebige nichtlineare Gleichungen numerisch zu lösen. Vermutlich wird dabei das Newtonsche Näherungsverfahren verwendet. Es wird jeweils nur eine Lösung ermittelt, auch wenn die Gleichung mehrere Lösungen hat. Welche Lösung gefunden wird, hängt vom gewählten Startwert ab.

Im MSA dürfen alle eingebauten Funktionen des wissenschaftlichen Taschenrechners verwendet werden. Dem Nachteil einer etwas komplizierteren Rechnerbedienung mit eventuellen Problemen beim Startwert steht der Vorteil gegenüber, dass der Rechner bei sachgerechter Bedienung schnell und fehlerfrei die Lösung liefert.

Als Beispiel berechnen wir die Innenwinkelmaße im Dreieck mit den Seitenlängen 3, 7 und 8. Diesem Beispiel liegt der Kongruenzsatz SSS zugrunde. Hier muss der Kosinussatz angewendet werden.

Bedienungsschritte und Displayanzeige	Kommentar
	erforderliche Tastenfolge um den Menüpunkt 'numerisches Lösen von Gleichungen' zu wählen
	Es erscheint eine Eingabemaske für den Term auf der linken Seite sowie auf der rechten Seite der Gleichung.
	Term auf der linken Seite fertig
	Term auf der linken Seite fertig
	mit der Pfeiltaste auf die rechte Seite wechseln, Term auf der rechten Seite eingeben
	zu lang für die Darstellung auf einen Blick

	mit der Pfeiltaste auf die rechte Seite wechseln, Term auf der rechten Seite eingeben
	$x = 4{,}9....$ ist nicht die Lösung, sondern die Lösung der zuletzt gelösten Gleichung, die als Startwert vorgeschlagen wird.
	Als Startwert 45 eingeben, mit der Eingabetaste enter betätigen,
	$x = 60$ ist die Lösung. Der Winkel, der Seite mit der Länge 7 gegenüber liegt, hat die Größe 60°.
	
	
	
	Den Kosinussatz erneut anwenden, jetzt für die Größe des Winkels, der der Seite mit der Länge 8 gegenüber liegt.
	Da die Terme der letzten Gleichung beibehalten werden, können diese Vorschläge übernommen und durch Überschreiben mit wenigen Tastendrücken geändert werden.

	
	Als Startwert wird $x \approx 60$ vorgeschlagen, die Lösung der letzten Gleichung. Dieser Wert könnte verwendet werden oder statt dessen wieder 45 eingeben
	Der Winkel, der Seite mit der Länge 8 gegenüber liegt, hat die Größe 98,2132...°. Dieses Winkelmaß ist jetzt in *x* gespeichert.
	Das dritte Winkelmaß über die Winkelsumme im Dreieck berechnen. Bei komplizierteren Winkelmaßen als 60° dafür einen anderen Speicherplatz verwenden.
	Der Winkel, der Seite mit der Länge 3 gegenüber liegt, hat die Größe 21,7867 ...°.

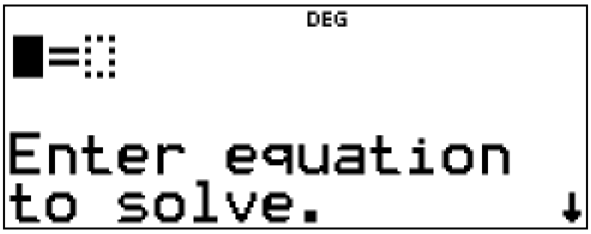
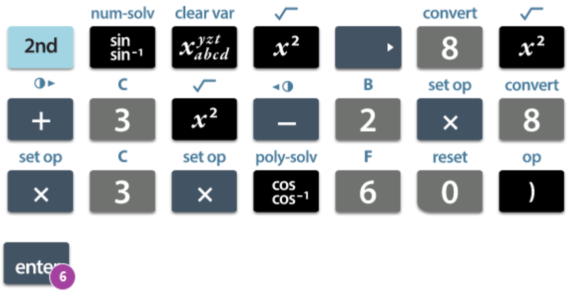
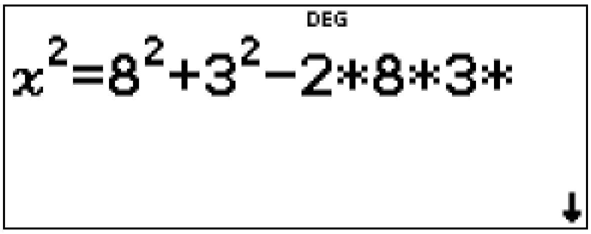
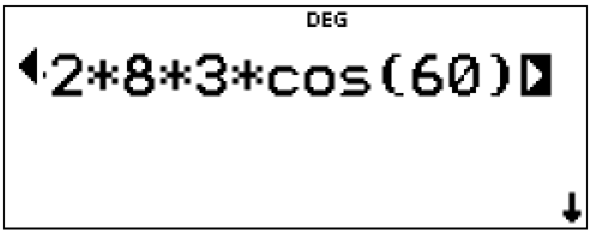
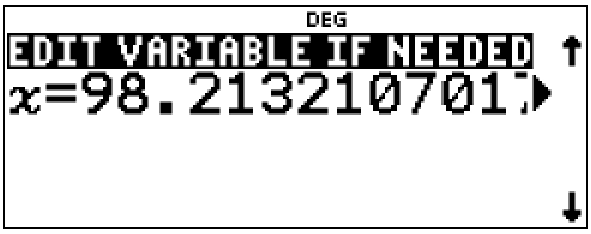
Warnhinweis

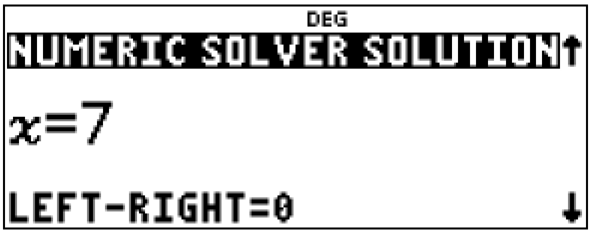
	Die Kosinusfunktion reagiert unerwartet, wenn ein ungünstiger Startwert verwendet wird. Für Winkelmaße sollte 45 als Startwert verwendet werden.
	Startwerte wie 0 sind sehr ungünstig, da der Graph der Kosinusfunktion an der Stelle 0 eine waagerechte Tangente hat.

Den Kosinussatz nach einer Seitenlänge auflösen mit der SOLVE-Funktion (nicht empfohlen)

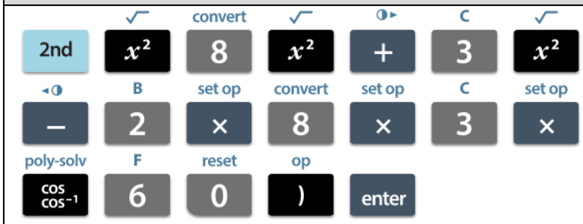
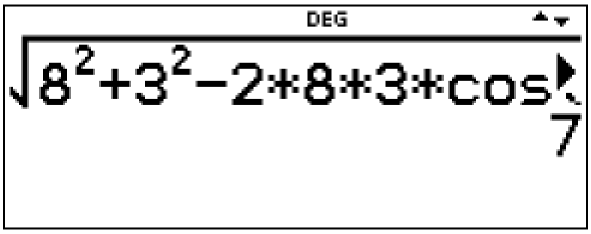
Vorbemerkung: Der Erfolg beim Auflösen des Kosinussatzes nach einem Winkelmaß mit Hilfe der SOLVE-Funktion könnte dazu verleiten, auf diesem Weg auch das Auflösen nach einer Seitenlänge zu versuchen. Davon wird ausdrücklich abgeraten. Man sollte sich auf den oben dargestellten Fall des Kongruenzsatzes SSS beschränken.

Beispiel 1: Dem ersten Beispiel $x^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos(60°)$ liegt der Kongruenzsatz SWS zugrunde. Hier muss der Kosinussatz angewendet werden. Wir verwenden wieder das bekannte Dreieck mit den Seitenlängen 3 und 8 sowie einem 60°-Winkel, der der Seite mit der Länge *x* gegenüberliegt.

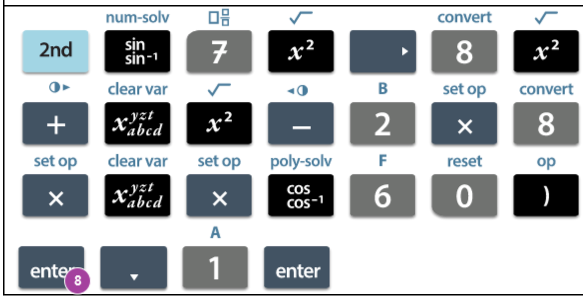
Bedienungsschritte und Displayanzeige	Kommentar
	erforderliche Tastenfolge um den Menüpunkt 'numerisches Lösen von Gleichungen' zu wählen
	Es erscheint eine Eingabemaske für den Term auf der linken Seite sowie auf der rechten Seite der Gleichung.
	möglihe, aber ungünstige Vorgehensweise: den Kosinussatz mit der SOLVE-Funktion nach der Seitenlänge *x* auflösen
	
	
	Als Startwert wird die Lösung der letzten Gleichung vorgeschlagen. Bei allen Startwerten größer als 0 wird die Lösung 7 zuverlässig gefunden.

	Diese Vorgehensweise ist allerdings wesentlich umständlicher als das Ziehen der Wurzel.

Fazit: Es ist in diesem Fall deutlich einfacher, den Wert des Terms auf der rechten Seite zu berechnen, übrigens 49, und die Wurzel daraus zu ziehen. Das geht auch in einem Term.

Bedienungsschritte und Displayanzeige	Kommentar
	Wurzelterm eingeben ...
	... im Fall SWS die beste Vorgehensweise!

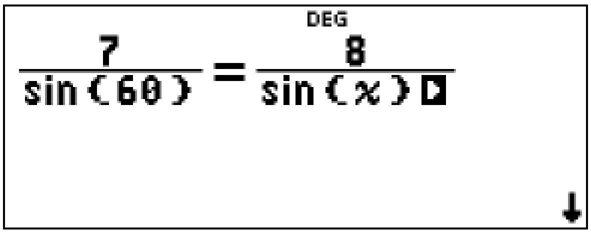
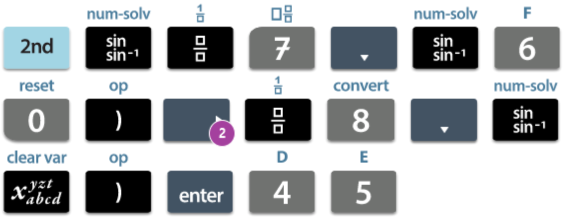
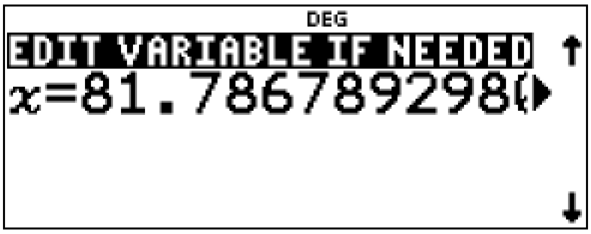
Beispiel 2: Dem zweiten Beispiel $7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos(60°)$ liegt der Kongruenzsatz sSW zugrunde. Wir verwenden wieder das bekannte Dreieck mit den Seitenlängen 7 und 8 sowie einem 60°-Winkel, der der Seite mit der Länge 7 gegenüberliegt. Da dies die kürzere der beiden bekannten Seitenlängen ist, handelt es sich um den Fall, in dem es zwei Lösungen gibt. Traditionell wird hier der Sinussatz verwendet, weil dies beim händischen Umstellen einfacher ist. Die Verwendung des Kosinussatzes ist ebenfalls möglich, aber ohne SOLVE-Funktion umständlicher als das Umstellen der Verhältnisgleichung beim Sinussatz. Im Prinzip ist die quadratische Gleichung $7^2 = 8^2 + x^2 - 8 \cdot x$ zu lösen. Mit der SOLVE-Funktion wird jeweils nur eine der beiden Lösungen gefunden. Welche es ist, hängt vom Startwert ab.

Bedienungsschritte und Displayanzeige	Kommentar
	ggf. Menüpunkt Berechnungen wählen
	mögliche, aber ungünstige Vorgehensweise: den Kosinussatz mit der SOLVE-Funktion nach der Seitenlänge *x* auflösen

DEG $7^2=8^2+x^2-2*8*x*$	ist äquivalent zu $7^2=8^2+x^2-8\cdot x$, vgl. $2x^2=16x-30$ bzw. $2x^2-16x+30=0$
DEG $2*8*x*\cos(60)$	
DEG EDIT VARIABLE IF NEEDED $x=7$	Von der letzten Berechnung war noch der Wert 7 im Speicher *x* abgelegt.
DEG NUMERIC SOLVER SOLUTION $x=5$ LEFT-RIGHT=0	Die Zahl 5 ist tatsächlich eine der beiden Lösungen der Gleichung und stellt die größere Lösung bei der Berechnung nach sSW dar. Hier besteht die Gefahr, dass nicht mehr nach der zweiten Lösung gesucht wird.
2nd num-solv sin $\sin^{-1}$	die Berechnung wiederholen
DEG $2*8*x*\cos(60)$	
DEG EDIT VARIABLE IF NEEDED $x=1$	Als Startwert wird jetzt die im Speicher *x* abgelegte Lösung 5 angeboten. Diesen Wert mit einer kleineren Zahl überschreiben. Sie muss kleiner als 4 sein, das ist die Mitte zwischen den beiden Lösungen. Wir nehmen die Zahl 1.
DEG NUMERIC SOLVER SOLUTION $x=2.99999999997$ LEFT-RIGHT=0	Tatsächlich wird die zweite Lösung 3 gefunden. Sie stellt die kleinere Lösung bei der Berechnung nach sSW dar.

Fazit: Die Existenz einer zweiten Lösung ist durch die gegebenen Bestimmungsstücke, also durch den Fall sSW bedingt. Der traditionelle Rechenweg mit dem Sinussatz bedeutet hier weniger Aufwand. $\frac{\sin(x)}{8} = \frac{\sin(60°)}{7} \quad \Rightarrow \quad \sin(x) = 8 \cdot \frac{\sin(60°)}{7} = \frac{4}{7} \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x \approx 81{,}7868°$.

Das geht übrigens auch mit der SOLVE-Funktion:

Bedienungsschritte und Displayanzeige	**Kommentar**
	
	
	Es wird der kleinere der beiden Winkel gefunden. Für die zweite Lösung muss die Ergänzung auf 180° berechnet werden.

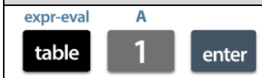
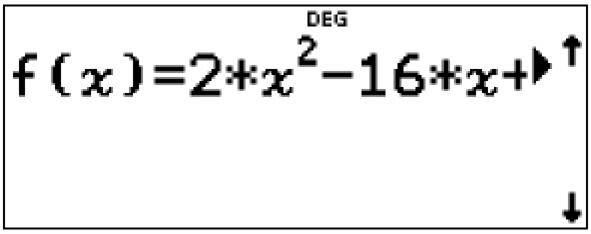
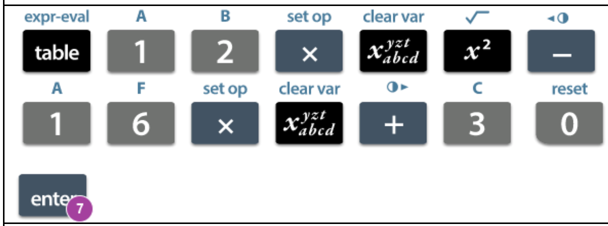
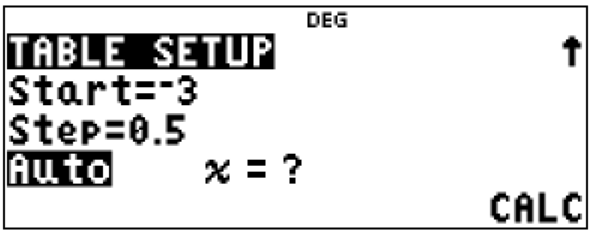
Anmerkung: Man hätte in der Ausgangsaufgabe besser zuerst den 98,2132107°- Winkel bestimmen sollen, der der längste Seite 8 gegenüberliegt. Mit diesem Zwischenergebnis aus dem ersten Schritt hätte der Fall SsW vorgelegen, in dem der Sinussatz ein eindeutiges Ergebnis liefert. Das „krumme“ Winkelmaß 98,2132107 kann man mit der Ans -Taste in die Sinusfunktion im Nenner eingeben.

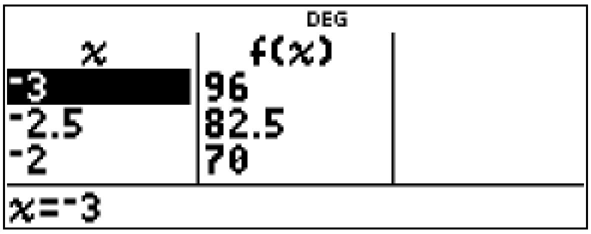
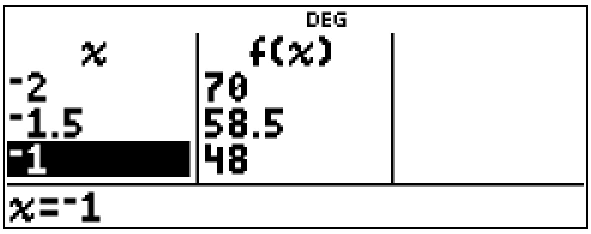
Fazit: Bei dem durchgerechneten Beispiel eines Dreiecks mit den Seitenlängen 3, 7 und 8 ist die zweifache Anwendung des Kosinussatzes mit weniger Aufwand verbunden, wenn man dabei die SOLVE-Funktion des wissenschaftlichen Taschenrechners verwendet und zweimal den Kosinussatz verwendet.

Automatisch Wertetabellen erstellen mit dem wissenschaftlichen Taschenrechner

Vorbemerkung: Zu den erweiterten Funktionen des wissenschaftlichen Taschenrechners gehört das automatische Erstellen von Wertetabellen. Die Eingabe der Funktionsterme unter Verwendung des Speichers *x* geschieht in der gleichen Weise wie bei der SOLVE-Funktion. Allerdings ist der Menüpunkt 'Tabellen' einfacher in der Bedienung.

Als Beispiel wird die ganz einfache Funktion $f(x) = x^2$ verwendet, aber nicht, um mit den Funktionswerten einen Graphen zu zeichnen, sondern um die Wurzel aus 2 anzunähern. Die zusätzlich angebotene Eingabemöglichkeit für den Term einer zweiten Funktion *g* wird im Beispiel nicht genutzt.

Bedienungsschritte und Displayanzeige	**Kommentar**
	Menüpunkt 'Tabellen' wählen ...
	Term für *f* mit dem Speicherplatz *x*
	Unter $f(x)$ ist noch die Parabel aus der Lösung der quadratischen Gleichung gespeichert
	Es kann auch ein anderer Term für *f* mit dem Speicherplatz *x* eingegeben werden.
	keinen Term für *g* eingeben
	gewünschter Definitionsbereich für die Tabelle; Startwert und Schrittweite für die Argumente *x* der Funktion eingeben, jeweils mit der Eingabetaste $\boxed{\text{enter}}$ bestätigen

	
	Durch Scrollen mit der Pfeiltaste kann die Tabelle beliebig weit fortgesetzt werden.