**EA**

Die Punkte $A(3|-4|7)$, $B(-5|0|15)$, C und $D(11|4|11)$ sind die Ecken einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Spitze im Punkt $E(4|0|15)$ liegt.

**a)** Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

**b)** Ergänzen Sie die Koordinaten des Punktes C.

**c)** Zeigen Sie, dass es sich um eine gerade Pyramide handelt, d.h. dass der Schwerpunkt der Grundfläche zugleich Fußpunkt des Lotes von der Spitze E auf die Grundfläche ist.

**d)** Bei einer geraden quadratischen Pyramide sei *a* die Länge der Grundkanten, *k* die Länge der zur Spitze führenden Kanten, *h* die Höhe und *d* die Länge der Diagonalen der Grundfläche. $h_\Delta = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}a^2}$ ist die Höhe der Dreiecke der Mantelfläche bezüglich der Grundkante. *a*, *k* und *h* haben ganzzahlige Werte.

Drücken Sie *h* sowie *d* durch *a* und *k* aus.

Begründen Sie anhand des Terms, dass $h_\Delta$ stets größer als *h* sein muss.

Begründen Sie, dass *a* und *d* niemals beide zugleich ganzzahlige Werte besitzen können.

**GA**

Die Punkte $A(3|-4|7)$, $B(-5|0|15)$, C und $D(11|4|11)$ sind die Ecken einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Spitze im Punkt $E(4|0|15)$ liegt.

**a)** Ergänzen Sie die Koordinaten des Punktes C.

**b)** Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.
Geben Sie dessen Seitenlängen sowie den Flächeninhalt an.

**c)** Der Punkt $S(3|2|13)$ ist der Schwerpunkt der quadratischen Grundfläche. Geben Sie die Gleichungen von zwei Geraden an, die durch Eckpunkte der Pyramide gehen und sich im Punkt S schneiden.

**d)** Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{SE}$ ein Normalenvektor der Ebene durch die Punkte A, B und D ist und geben Sie die Gleichung der Ebene in Normalenform an.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

**Stichworte auf den Folien der Präsentation:**

**EA**

- mehr und anspruchsvollere Inhalte:
  Kreuzprodukt, 1/3 Spatvolumen, Normalenformen / Abstand
- dennoch im EA nicht nur Berechnen, sondern auch Begründen und Argumentieren
- komplexere und abstraktere, auch wissenschaftspropädeutische Überlegungen

**GA**

- weniger Inhalte: Volumenberechnung nur möglich bei entsprechender Aufgabengestaltung
- weniger komplexe Inhalte und Verfahren
- dennoch im EA nicht nur Berechnen, sondern auch Begründen und Argumentieren

**Korrektur der Reihenfolge in der EA-Aufgabe:**

Auch im EA darf man nicht mit der Tür ins Haus fallen. Es wäre ein handwerklicher Fehler, sofort mit der Volumenberechnung zu beginnen. Dies sollte auf der Folie lediglich ein Hinweis darauf sein, dass man für die Volumenberechnung den Ortsvektor des Punktes C nicht benötigt.

**EA**

Die Punkte $A(3|-4|7)$, $B(-5|0|15)$, C und $D(11|4|11)$ sind die Ecken einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Spitze im Punkt $E(4|0|15)$ liegt.

**a)** Ergänzen Sie die Koordinaten des Punktes C.

**b)** Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

**c)** Zeigen Sie, dass es sich um eine gerade Pyramide handelt, d.h. dass der Schwerpunkt der Grundfläche zugleich Fußpunkt des Lotes von der Spitze E auf die Grundfläche ist.

**d)** Bei einer geraden quadratischen Pyramide sei $a$ die Länge der Grundkanten, $k$ die Länge der zur Spitze führenden Kanten, $h$ die Höhe und $d$ die Länge der Diagonalen der Grundfläche. $h_\Delta = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}a^2}$ ist die Höhe der Dreiecke der Mantelfläche bezüglich der Grundkante. $a$, $k$ und $h$ haben ganzzahlige Werte.

Drücken Sie $h$ sowie $d$ durch $a$ und $k$ aus.

Begründen Sie anhand des Terms, dass $h_\Delta$ stets größer als $h$ sein muss.

Begründen Sie, dass $a$ und $d$ niemals beide zugleich ganzzahlige Werte besitzen können.

**Lösungen EA**

**a)** C ( 3 | 8 | 19 ), zum Beispiel $\vec{c} = \vec{b} + \left(\vec{d} - \vec{a}\right)$

**b)** Das Volumen der Pyramide ist ein Drittel des Volumen des Spates, der von den Kantenvektoren $\vec{b} - \vec{a}$ , $\vec{d} - \vec{a}$ und $\vec{e} - \vec{a}$ aufgespannt wird. In diesem Fall isr der Spat ein Quader mit quadratischer Grundfläche.

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \left| \left(\vec{e} - \vec{a}\right) \circ \left(\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \times \left(\vec{d} - \vec{a}\right)\right) \right|$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \left| \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \circ \left( \left( \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \times \left( \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \right) \right|$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \left( \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -48 \\ 96 \\ -96 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot |-432|$$

$$= 144$$

Das Volumen der Pyramide beträgt 144 VE.

**c)** Der Schwerpunkt der quadratischen Grundfläche ist beispielsweise als arithmetischer Mittelwert der Ortsvektoren gegenüberliegender Eckpunkt zu finden.

$$\vec{s} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\vec{b} + \vec{d}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Die Höhe der Pyramide wird durch den Vektor $\overrightarrow{SE}$ beschrieben.

$$\overrightarrow{SE} = \vec{e} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Ebene der Grundfläche wird durch die Kantenvektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{d} - \vec{a}$ aufgespannt. Es wird gezeigt, dass die beiden Skalarprodukte $\left(\vec{e} - \vec{s}\right) \circ \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ und $\left(\vec{e} - \vec{s}\right) \circ \left(\vec{d} - \vec{a}\right)$ jeweils den Wert 0 haben: $\left(\vec{e} - \vec{s}\right) \circ \left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -8 - 8 + 16 = 0$ sowie

$$\left(\vec{e}-\vec{s}\right)\circ\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}=8-16+8=0.$$

**d)** Bei einer geraden quadratischen Pyramide sei $a$ die Länge der Grundkanten, $k$ die Länge der zur Spitze führenden Kanten, $h$ die Höhe und $d$ die Länge der Diagonalen der Grundfläche. $h_\Delta=\sqrt{k^2-\frac{1}{4}a^2}$ ist die Höhe der Dreiecke der Mantelfläche bezüglich der Grundkante. $a$, $k$ und $h$ haben ganzzahlige Werte.

$d$ ist die Länge der Diagonalen in einem Quadrat der Seitenlänge $a$. Deshalb ist $d=\sqrt{2}\cdot a$.

$h$ kann beispielsweise im rechtwinkligen Dreieck ASE mit dem Satz des Pythagoras durch $a$ und $k$ ausgedrückt werden. Dieses Dreieck hat die Seitenlängen $\frac{1}{2}d$, $h$ und $k$.

Aus $k^2=h^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot a\right)^2$ folgt $h=\sqrt{k^2-\frac{1}{2}a^2}$.

$h_\Delta$ muss stets größer sein als $h$, denn $k^2-\frac{1}{2}a^2<k^2-\frac{1}{4}a^2$.

$a$ und $d$ können niemals beide zugleich ganzzahlige Werte besitzen, denn $a$ ist laut Voraussetzung eine ganze Zahl, aber $d$ ist das $\sqrt{2}$-fache einer ganzen Zahl, also eine irrationale Zahl.

**Lösungen GA**

**a)** C ( 3 | 8 | 19 ), zum Beispiel $\vec{c} = \vec{b} + \left(\vec{d} - \vec{a}\right)$

**b)** Die Seiten des Vierecks sind $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

und mit C ( 3 | 8 | 19 ) $\vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Da die Vektoren, die gegenüberliegenden Seiten darstellen, gleich sind, ist das Viereck ein Parallelogramm. Da auch ohne Rechnung erkennbar ist, dass alle Seiten des Vierecks die gleiche Länge haben, ist das Parallelogramm eine Raute. Wenn das Skalarprodukt der Vektoren, die benachbarte Seiten darstellen, den Wert 0 hat, sind diese Vektoren orthogonal.

$$\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \circ \left(\vec{d} - \vec{a}\right) = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = -64 + 32 + 32 = 0$$

Wenn eine Raute einen rechten Winkel aufweist, ist sie ein Quadrat.

Die Seitenlänge des Quadrats ist $\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = 12$.

Das Quadrat hat einen Flächeninhalt von 144 FE.

**c)** Die Geraden AC und BD schneiden sich im Punkt S.

AC: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \left(\vec{c} - \vec{a}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

BD: $\vec{x} = \vec{b} + t \cdot \left(\vec{d} - \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die Vektorgleichung $\vec{a} + r \cdot \left(\vec{c} - \vec{a}\right) = \vec{b} + t \cdot \left(\vec{d} - \vec{b}\right)$ ergibt das lineare Gleichungssystem $\begin{array}{rcl} 3 & = & -5 + 16t \\ -4 + 12r & = & 4t \\ 7 + 12r & = & 15 - 4t \end{array}$, das die Lösung $r = \frac{1}{2} \;\wedge\; t = \frac{1}{2}$ hat. Das Einsetzen des jeweiligen Parameterwertes in die entsprechende Geradengleichung ergibt übereinstimmend S ( 3 | 2 | 13 ).

**d)** Die Vektoren $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{d} - \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ spannen die Ebene durch die Punkte A, B und D auf. Der Vektor $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{e} - \overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu dieser Ebene, denn die beiden Skalarprodukte mit den aufspannenden Vektoren haben den Wert 0.

$$\left(\overrightarrow{e} - \overrightarrow{s}\right) \circ \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -8 - 8 + 16 = 0$$

$$\left(\overrightarrow{e} - \overrightarrow{s}\right) \circ \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 - 16 + 8 = 0$$

Der Punkt A ist ein Punkt der Ebene durch A, B und D. Der Vektor $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{e} - \overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann als Normalenvektor verwendet werden.

$$\overrightarrow{a} \circ \left(\overrightarrow{e} - \overrightarrow{s}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + 8 + 14 = 25$$

Die Ebene kann durch die Gleichung $\overrightarrow{x} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 25$ beschrieben werden.

Der Vektor $\overrightarrow{SE}$ hat die Länge $\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$. Da der Vektor senkrecht auf der Grundfläche steht und von deren Schwerpunkt zur Spitze geht, gibt er die Höhe der Pyramide an.

$V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 3 = 144$

Die Pryramide hat das Volumen 144 VE..