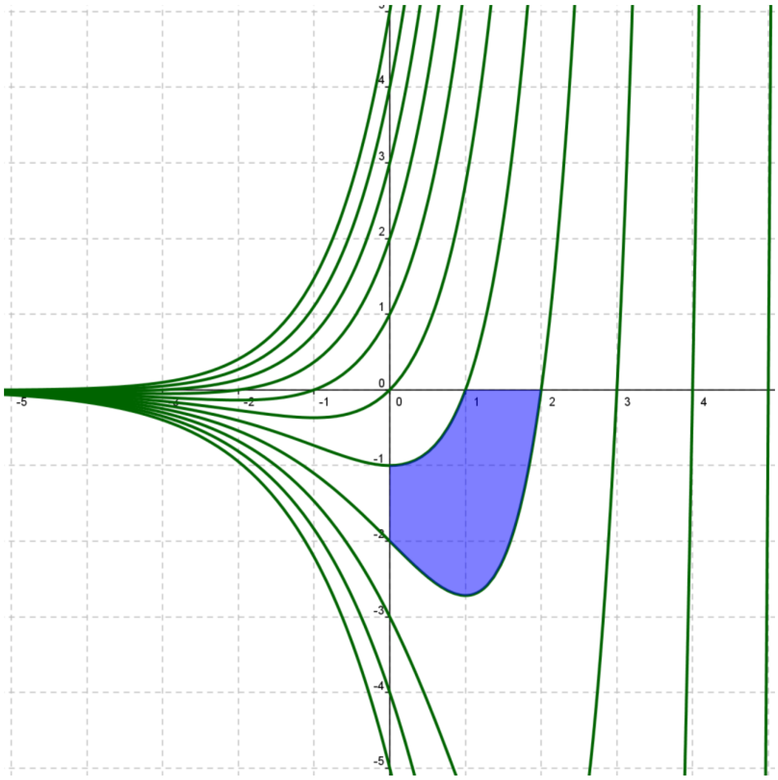
Name Prüfungskandidat/in
Bezeichnung der Klasse, Name des Prüfers (Mallas)
Datum
Uhrzeit
Raum

1) Kurvenschar

Die Abbildung zeigt die Kurvenschar $f_k(x) = (x-k) \cdot e^x$ für $k \in \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$.



a) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Parameterwert k und den Achsenschnittpunkten des jeweiligen Graphen. Ordnen Sie jedem Graphen im Bild den zugehörigen Parameterwert zu.

b) Untersuchen Sie, ob für alle $k \in \mathbb{R}$ die Graphen Extremstellen besitzen. Geben deren Lage an. Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob bei einem beliebigen Graphen der Schar aus der Existenz eines Extrempunktes zwingend die Existenz eines Wendepunktes folgt.

c) Geben Sie einen Term an, der den Inhalt der markierten Fläche beschreibt. Es ist nicht nötig, den Zahlenwert zu berechnen.

Anmerkungen:

1. Der Unterricht fand auf erhöhtem Anforderungsniveau statt.
2. Als Hilfsmittel stand während der Vorbereitungszeit ein CAS-Rechner zur Verfügung, dessen Display während des Vortrages bei Bedarf projiziert werden konnte. Außerdem wurde eine OHP-Folie ausgehändigt, die in der Vorbereitungszeit ergänzt und während des Vortrages projiziert werden konnte.
3. Eine Variante dieser Aufgabe wurde später im HMF-Teil des Zentralabiturs verwendet.

1) Kurvenschar Lösungen

a) Der Term $(x-k)\cdot e^x$ nimmt den Wert 0 an, wenn die Klammer 0 wird. Aus $x-k=0$ folgt $x=k$. Die Funktion f_k hat also die Nullstelle $x=k$. Aus $f_k(0)=(0-k)\cdot e^0=-k\cdot 1=-k$. ergibt sich der Schnittpunkt mit der y-Achse $(0\,|\,-k)$. Am besten lässt sich der Parameterwert aus der Nullstelle ablesen; sie gibt unmittelbar den Parameterwert an.

b) Notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist $f_k'(x)=0$. $f_k'(x)=(x-k+1)\cdot e^x$. Der Term nimmt den Wert 0 an, wenn die Klammer 0 wird. Aus $x-k+1=0$ folgt $x=k-1$. Eine hinreichende Bedingung für eine Extremstelle ist $f_k'(x)=0 \quad \wedge \quad f_k''(x)\neq 0$. Setzt man $x=k-1$ in die zweite Ableitung $f_k''(x)=(x-k+2)\cdot e^x$ ein, erhält man $f_k''(k-1)=(k-1-k+2)\cdot e^{k-1}=1\cdot e^{k-1}=e^{k-1}$; dieser Term ist stets größer als 0. Es gibt also keine Einschränkungen. Jeder Graph der Schar hat eine Extremstelle.

Alle Graphen nähern sich für $x\to-\infty$ der x-Achse. Jeder Graph hat einen Tiefpunkt. Durchläuft man den Graphen von links nach rechts, dann fällt die Kurve zunächst immer steiler, dann nimmt der Betrag der negativen Steigung aber wieder ab, denn beim Tiefpunkt ist die Steigung 0 und wächst für $x\to+\infty$ immer weiter. Also muss es an der Stelle der steilsten negativen Steigung einen Wendepunkt geben.

c) Mit $\left|\int_0^2 f_2(x)\,dx\right|$ berechnet man den Inhalt der markierten Fläche einschließlich des „Dreiecks“ bis zum Ursprung. Von diesem Wert muss man $\left|\int_0^1 f_1(x)\,dx\right|$ subtrahieren. $\left(e^2-3\right)-(e-2)=e^2-e-1\approx 3{,}67$

mögliche Zusatzfragen (abhängig vom Verlauf des Vortrags und des Prüfungsgesprächs)

Wie könnte man die Lösungen auch ohne CAS-Rechner ablesen?

Geben Sie einen Term für den Flächeninhalt an, der die Differenzfunktion verwendet.

Wie sehen die Kurvenscharen $g_k(x)=x-k$ und $h_k(x)=(x-k)\cdot e^{x-k}$ aus?

Erwartungshorizont

Für eine glatt ausreichende Leistung: Nennen der Lage von Achsenschnittpunkten unter Bezug auf CAS-Ergebnisse ohne Erläuterung am Term, Berechnen der Lage möglicher Extremstellen mit dem CAS-Rechner ohne Erläuterung am Term, keine eigenständige Kontrolle der hinreichenden Bedingung, sondern erst auf Nachfrage; kein Eingehen auf fehlende Beschränkung bei Parameterwerten. Unvollständige Ausführungen zur Berechnung des Flächeninhalts

Für eine sehr gute Leistung: Das erfolgreiche Bearbeiten von **a)**, **b)** und **c)** mit Erläuterungen am Term sowie eine lückenlose Argumentation in Bezug auf Wendepunkte, ggf. das flexible Beantworten von Zusatzfragen

Anhang: Folie zur Verwendung während der Vorbereitungszeit sowie für den Vortrag