Name Prüfungskandidat/in
Bezeichnung der Klasse, Name des Prüfers (Mallas)
Datum
Uhrzeit
Raum

2) Analytische Geometrie

Die Punkte
$A(1 \mid 2 \mid 3)$, $B(-15 \mid 10 \mid 19)$, $C(1 \mid 26 \mid 27)$, $D(17 \mid 18 \mid 11)$ und $E(8 \mid 0 \mid 29)$ sind die Ecken einer geraden quadratischen Pyramide mit der Spitze in E.

a) Erläutern Sie die besonderen Eigenschaften einer geraden quadratischen Pyramide. Nennen Sie Möglichkeiten, diese Eigenschaften rechnerisch nachzuweisen. Die entsprechenden Rechnungen müssen nicht ausgeführt werden.

b) Geben Sie die verschiedenen Kantenlängen der Pyramide an. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

c) Die Grundfläche der Pyramide liegt in der Ebene mit der Gleichung $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0$. Der Punkt E soll an dieser Ebene gespiegelt werden. Entwerfen Sie eine Strategie um die Koordinaten des spiegelbildlich liegenden Punktes E' rechnerisch zu bestimmen.

Anmerkungen:

1. Der Unterricht fand auf erhöhtem Anforderungsniveau statt.
2. Als Hilfsmittel stand während der Vorbereitungszeit ein CAS-Rechner zur Verfügung, dessen Display während des Vortrages bei Bedarf projiziert werden konnte.

2) Analytische Geometrie Lösungen

a) Eine gerade quadratische Pyramide hat eine quadratische Grundfläche und vier kongruente gleichschenklige Dreiecke als Mantelfläche. *Abweichende Definitionen oder Beschreibungen, die die Nachweismöglichkeiten aufgreifen, sind möglich.*

Nachweise für die Eigenschaft Quadrat:
je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel und je zwei benachbarte Seiten sind gleich lang und orthogonal. (Differenzvektoren gleich bzw. Beträge gleich bzw. Skalarprodukt 0.)

alternativ: je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel, die Diagonalen sind gleich lang.

Nachweise für die Eigenschaft gerade Pyramide:
alle Kanten, die zur Spitze führen, sind gleich lang.

alternativ: Die Spitze liegt auf einer Geraden, die orthogonal zur Grundfläche verläuft und durch deren Schwerpunkt geht.

b) Es treten nur zwei unterschiedliche Kantenlängen auf. Alle Grundkanten haben den Betrag $\left|\vec{b}-\vec{a}\right| = \left|\vec{c}-\vec{d}\right| = \sqrt{(-16)^2+8^2+16^2} = \sqrt{576} = \sqrt{16^2+16^2+8^2} = \left|\vec{d}-\vec{a}\right| = \left|\vec{c}-\vec{b}\right| = \underline{24}$.

Alle zur Spitze führenden Kanten haben den Betrag $\left|\vec{e}-\vec{a}\right| = \sqrt{7^2+(-2)^2+26^2} = \sqrt{729} = 27 = \left|\vec{e}-\vec{b}\right| = \sqrt{23^2+(-10)^2+10^2} = \left|\vec{e}-\vec{c}\right| = \sqrt{7^2+26^2+2^2} = \left|\vec{e}-\vec{d}\right| = \sqrt{(-9)^2+(-18)^2+18^2} = \underline{27}$.

Das Volumen der Pyramide kann über das Spatprodukt von drei Kantenvektoren berechnet werden, die die Pyramide aufspannen, z.B. $V = \frac{1}{3}\cdot\left|\left(\vec{e}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{d}-\vec{a}\right)\right| =$

$$\frac{1}{3}\cdot\left|\begin{pmatrix}7\\-2\\26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-16\\8\\16\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}16\\16\\8\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\cdot\left|\begin{pmatrix}7\\-2\\26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-192\\384\\-384\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\cdot\left|-12096\right| = \underline{4032}.$$

Alternative: Die quadratische Grundfläche hat den Inhalt $A = 24^2 = \underline{576}$. Die Höhe der Pyramide ist der Abstand des Punktes E von der Ebene der Grundfläche; dieser ergibt sich durch Einsetzen von $\vec{e}$ in die HNF. $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\29\end{pmatrix}-1 = \frac{1}{3}\cdot(8+58)-1 = \underline{21}$.

weitere Alternative: Der Abstand des Punktes E vom Schwerpunkt S der Grundfläche ergibt ebenfalls die Höhe der Pyramide. $\vec{e}-\vec{s} = \vec{e}-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right) = \vec{e}-\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{d}\right) = \begin{pmatrix}8\\0\\29\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\14\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-14\\14\end{pmatrix}$

und $\left|\vec{e}-\vec{s}\right| = \sqrt{7^2+(-14)^2+14^2} = \sqrt{49+196+196} = \sqrt{441} = \underline{21}$.

Das Volumen ergibt sich bei beiden Alternativen aus $V = \frac{1}{3}\cdot 576\cdot 21 = \underline{4032}$.

c) Der Punkt E' liegt vom Schwerpunkt der Grundfläche S (1 | 14 | 15) aus 21 Längeneinheiten entfernt in Richtung des Normalenvektors, der in der Ebenengleichung angegeben ist, mit entgegengesetzter Orientierung. $\vec{e}\,' = \vec{s} - 21 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alternative: Der arithmetische Mittelwert der beiden Ortsvektoren $\vec{e}$ und $\vec{e}\,'$ muss den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schwerpunkts der Grundfläche ergeben, also $\frac{1}{2} \cdot \left(\vec{e}\,' + \vec{e}\right) = \vec{s} \quad \Leftrightarrow$

$$\vec{e}\,' + \vec{e} = 2 \cdot \vec{s} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{e}\,' = 2 \cdot \vec{s} - \vec{e} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

mögliche Zusatzfragen (abhängig vom Verlauf des Vortrags und des Prüfungsgesprächs)

Nennen Sie weitere Möglichkeiten für ... (siehe alternative Lösungen)

Die Pyramide weist lauter ganzzahlige Kantenlängen auf. Gilt dies auch für die Diagonalen der Grundfläche? Wenn nein, ließe sich eine Pyramide entwickeln, bei der auch diese Maßzahlen ganzzahlig sind?

Vergleichen Sie die Winkel zwischen der Mantelfläche und der Grundfläche mit dem Winkel zwischen den zur Spitze führenden Kanten und der Grundfläche.

Erläutern Sie die Ebenengleichung. Beschreiben Sie, wie man beim Aufstellen einer solchen Gleichung vorgehen könnte.

Erwartungshorizont

Für eine glatt ausreichende Leistung: Nennen der Eigenschaften der Pyramide und wenigstens das eigenständige Berechnen des Inhalts der Grundfläche sowie auf Nachfrage ein Nennen von alternativen Nachweisen oder ein Ausführen eines der beiden Nachweise.

Für eine sehr gute Leistung: Das erfolgreiche Bearbeiten von **a)** und **b)** mit eigenständiger Nennung von Alternativen zu wenigstens einem der beiden Nachweise sowie das Entwerfen einer eigenständigen Strategie zur Bestimmung der Koordinaten des gespiegelten Punktes. Das Verfahren der Spiegelung an einer Ebene wurde im Unterricht nicht behandelt. Das Ausführen der Rechnung wird nicht unbedingt erwartet. Werden keine alternativen Nachweise erwähnt und keine Ideen zur Spiegelung entwickelt, soll die Leistung nicht mit sehr gut bewertet werden.