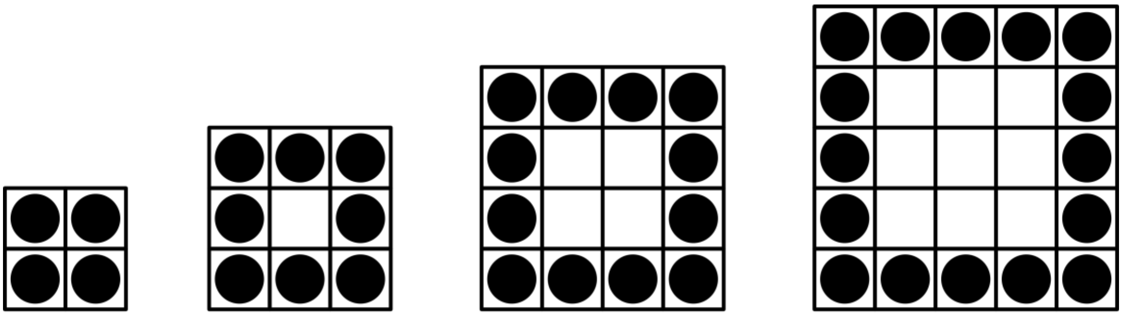
QUADRAT-RANDFELDER

Die Randfelder von Quadraten werden mit Plättchen belegt.
Dabei steht *n* für die Anzahl der Felder einer Quadratseite.



n=2 n=3 n=4 n=5

Quadrat-Randfelder **Aufgabe 1.1**

Anforderungsbereich I (Reproduzieren) • Anforderungsebene ESA

a) Lege die Plättchenmuster für die einzelnen Quadrate nach.
(Tipp: Flaschenverschlüsse, Münzen oder Ähnliches verwenden)

b) Bestimme für jedes Quadrat die Anzahl der Plättchen.
(Tipp: Ergebnisse in Tabelle darstellen)

c) Bestimme die Anzahl der Plättchen für die Quadrate mit
$n=6$, $n=7$, $n=8$.

a) Zeichne die Quadrate mit n=3, n=4, n=5 ab.

b) Bestimme für jedes Quadrat die Anzahl der Plättchen.

c) Bestimme die Anzahl der Plättchen für die Quadrate mit
n=6, n=7, n=8.

Quadrat-Randfelder **Aufgabe 1.3**

Anforderungsbereich I (Reproduzieren) • Anforderungsebene ÜOS

a) Bestimme die Anzahl der Plättchen für die abgebildeten Quadrate.

b) Bestimme die Anzahl der Plättchen für die Quadrate mit
n=6, n=10, n=100.

c) Beschreibe, wie sich die Quadrate von Schritt zu Schritt weiterentwickeln.

Quadrat-Randfelder — Aufgabe 2A.1

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ESA

In einer Schulklasse wurden drei unterschiedliche Terme für die Anzahl der Plättchen in einem Quadrat gefunden. Die Terme wurden mit verschiedenen Symbolen gekennzeichnet:

●	$4 \cdot (n-2) + 4$
▲	$4 \cdot (n-1)$
■	$2 \cdot n + 2 \cdot (n-2)$

Zwei Schülerinnen und ein Schüler erklären, welche Überlegungen zum Finden der Terme geführt haben:

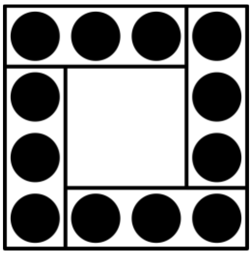
Ali: „Ich habe zuerst die vier Stücke in der Mitte jeder Seite genommen.
Dann habe ich die vier Ecken dazugenommen."

Bea: „Ich habe von jeder der vier Seiten alle Plättchen bis auf das letzte genommen. Das letzte ist dann das erste der nächsten Seite."

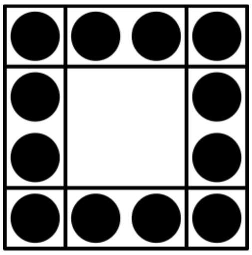
Cleo: „Ich habe zuerst zwei sich gegenüberliegende Seiten genommen.
Dann habe ich mit den beiden Stücken dazwischen ergänzt."

Die drei Überlegungen wurden auch grafisch dargestellt:

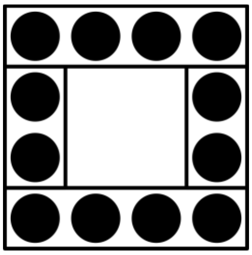
Überlegung A



Überlegung B



Überlegung C



a) Ordne jedem der drei Terme die zugehörige Überlegung sowie die passende grafische Darstellung zu.

b) Weise rechnerisch nach, dass die drei Terme gleichwertig sind.
(Tipps: Auflösen der Klammern, Zusammenfassen von Variablen)

Quadrat-Randfelder — Aufgabe 2A.2

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene MSA

In einer Schulklasse wurden unterschiedliche Terme für die Anzahl der Plättchen gefunden:

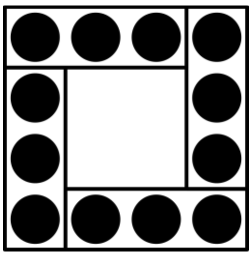
$T_1 \longrightarrow 4 \cdot (n-2) + 4$
$T_2 \longrightarrow 4 \cdot n - 4$
$T_3 \longrightarrow 4 \cdot (n-1)$
$T_4 \longrightarrow n^2 - (n-2)^2$
$T_5 \longrightarrow 4 \cdot (n-2 + 2 \cdot \frac{1}{2})$
$T_6 \longrightarrow 2 \cdot n + 2 \cdot (n-2)$

Einige Vorgehensweisen werden erklärt:

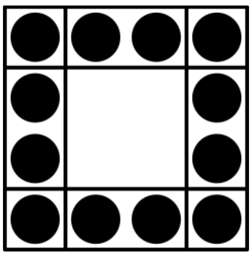
Ali: „Zuerst die vier Stücke in der Mitte der Seiten; dann die vier Ecken dazu.“
Bea: „Von jeder Seite alle Plättchen bis auf das letzte; das ist das erste der nächsten Seite.“
Cleo: „Zuerst zwei sich gegenüberliegende Seiten; dann die Stücke dazwischen dazu.“
Dani: „Zuerst alle vier Seiten komplett; dann die vier doppelt gezählten Eckplättchen weg.“
Eli: „Die Plättchen aller vier Seiten; aber die Eckplättchen nur halb, weil sie doppelt zählen.“
Flo: „Alle Felder des Quadrats; dann die inneren weg.“

Die Vorgehensweisen wurden dargestellt:

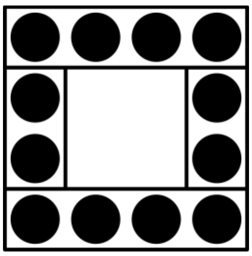
Überlegung A



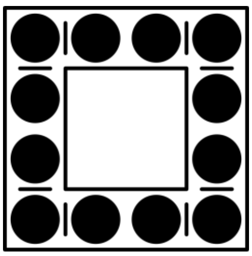
Überlegung B



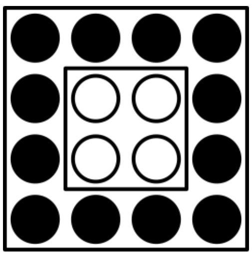
Überlegung C



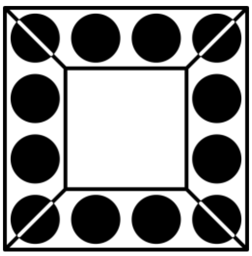
Überlegung D



Überlegung E



Überlegung F



a) Ordne Terme, Vorgehensweisen und Grafiken einander passend zu.

b) Weise rechnerisch nach, dass die Terme gleichwertig sind.

a) Gib einen Term für die Anzahl der Plättchen in einem Quadrat an, wenn die Anzahl der Felder einer Quadratseite *n* beträgt.

b) Begründe deine Vorgehensweise.

Quadrat-Randfelder — Aufgabe 2B.3

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ÜOS

In einer Schulklasse wurden unterschiedliche Terme für die Anzahl der Plättchen angegeben.
Unter anderem waren es folgende:

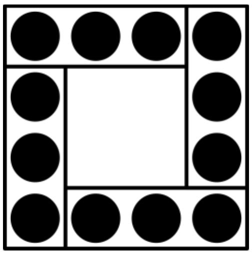
$T_1 \longrightarrow 4 \cdot (n-2) + 4$
$T_2 \longrightarrow 4 \cdot n - 4$
$T_3 \longrightarrow 4 \cdot (n-1)$
$T_4 \longrightarrow n^2 - (n-2)^2$

Einige Schülerinnen und Schüler haben ihre Strategien beschrieben:

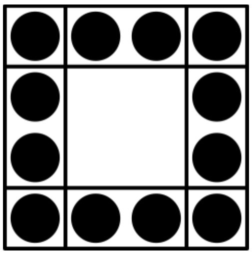
Cleo: „Zuerst zwei sich gegenüberliegende Seiten;
dann die Stücke dazwischen dazu."
Dani: „Zuerst alle vier Seiten komplett;
dann die vier doppelt gezählten Eckplättchen weg."
Eli: „Die Plättchen aller vier Seiten;
aber die Eckplättchen nur halb, weil sie doppelt zählen."
Flo: „Alle Felder des Quadrats;
dann die inneren weg."

Außerdem wurden einige Strategien grafisch dargestellt:

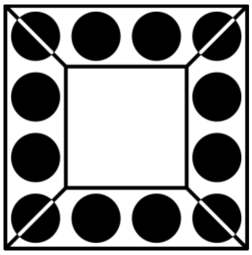
Überlegung A



Überlegung B



Überlegung C



a) Ordne zueinander passende Terme, Vorgehensweisen und Grafiken einander zu.

b) Ergänze fehlende Terme, Beschreibungen und Grafiken.

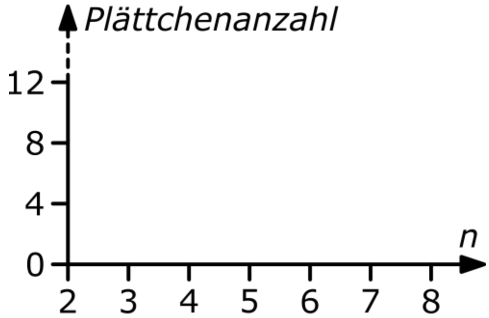
c) Weise rechnerisch nach, dass die Terme gleichwertig sind.

a) Betrachte eine Tabelle für die Plättchenanzahl für n=2 bis n=8.

n	Plättchenanzahl
2	$4 \cdot (n-1) = 4 \cdot (2-1) = 4$
3	

Beschreibe, wie die Anzahl der Plättchen zunimmt.

b) Zeichne ein Diagramm wie in der Abbildung und stelle die Werte aus der Tabelle darin dar, sodass ein Punktdiagramm entsteht.



c) Beschreibe, wie die Punkte im Diagramm platziert sind.

d) Ist es sinnvoll, die Punkte im Diagramm zu verbinden, sodass ein Liniendiagramm entsteht?
Begründe.

a) Betrachte eine Tabelle für die Plättchenanzahl für n=2 bis n=10.

n	Plättchenanzahl
2	$4\cdot(n-1) = 4\cdot(2-1) = 4$
3	

Beschreibe, wie die Anzahl der Plättchen zunimmt.

b) Stelle die Zunahme der Plättchen in einem Punktdiagramm dar.

c) Beschreibe, wie die Punkte im Diagramm platziert sind.

d) Gib eine passende Funktionsgleichung der Form $f(x) = mx + b$ an.

e) Kim hat die Punkte im Diagramm verbunden.
Sie sagt: „Für n=4,5 lese ich ab, dass ich 14 Plättchen brauche.
Wie sieht wohl die dazu passende Figur aus?“
Nimm Stellung zu Kims Überlegung.

Quadrat-Randfelder **Aufgabe 2C.3**

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ÜOS

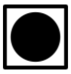
a) Gesa sagt: „Der Flächeninhalt von Quadraten steigt quadratisch im Verhältnis zur Seitenlänge. Deshalb nimmt auch die Anzahl der runden Plättchen quadratisch zu.“
Bewerte Gesas Aussage.
Begründe.

b) Hugo, Ida und Jan streiten.

Hugo: „Mit dem Term $4 \cdot (n-1)$ kann ich die Anzahl der Plättchen für $n=1$ berechnen. Es sind 0 Plättchen.“

Ida: „Ohne Plättchen gibt es kein Quadrat. Außerdem entsteht ein kleineres Quadrat, indem beim nächst größeren aus jeder Seitenmitte ein Plättchen entfernt wird. Bei $n=2$ gibt es keine mittleren Plättchen, also ist $n=1$ unmöglich.“

Jan: „n ist die Anzahl der Plättchen einer Seite.
Das Quadrat für $n=1$ sieht also wie folgt aus:



Die Anzahl der Plättchen für n=1 beträgt also 1. “

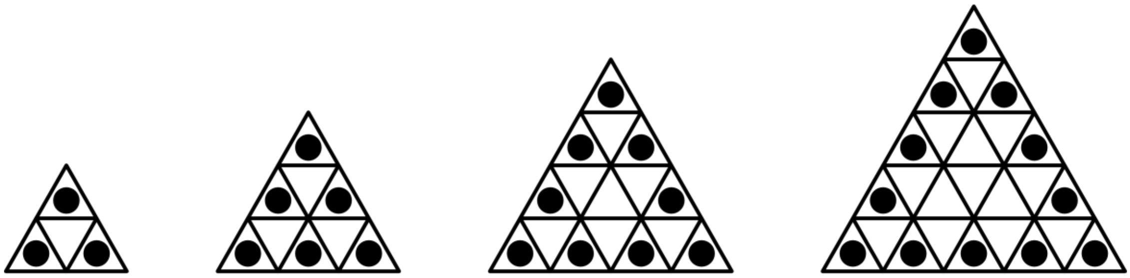
Nimm Stellung zu der Diskussion.

c) Stelle die Zunahme der Plättchenanzahl grafisch dar.

d) Beweise rechnerisch, dass die Differenz zwischen den Plättchenanzahlen zweier benachbarter Quadrate immer 4 ist.

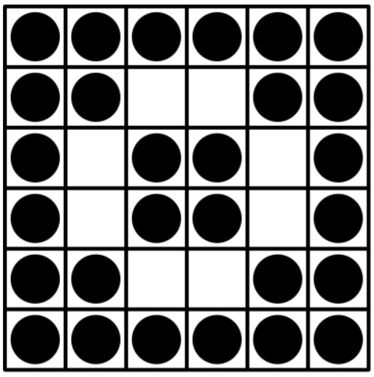
Übertrage die für die Quadratmuster gemachten Überlegungen und gewonnenen Erkenntnisse auf Dreiecke.

Stelle entsprechende Untersuchungen an und finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede heraus.

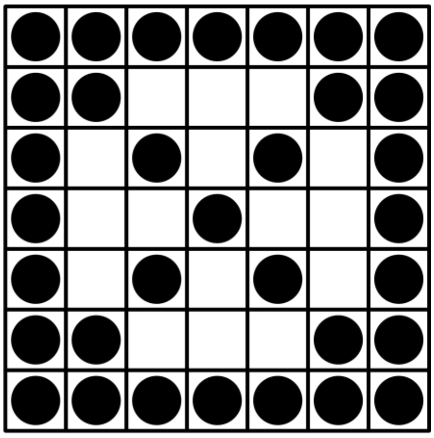


n=2 n=3 n=4 n=5

a) Untersuche Abwandlungen der Quadrate,
z. B. durch Einfügen von Diagonalen.

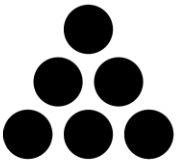


n=6

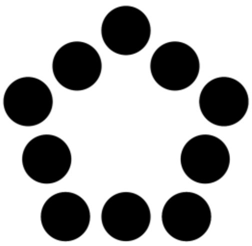


n=7

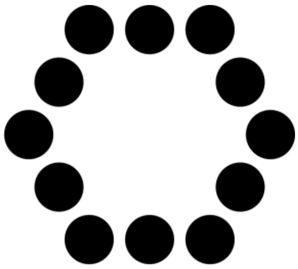
b) Übertrage die für die Quadratmuster gemachten Überlegungen und gewonnenen Erkenntnisse auf andere Figuren (m-Ecke).



m=3



m=5



m=6

Stelle entsprechende Untersuchungen an, finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

c) Gib einen allgemeinen Term an, mit dem die Anzahl der Plättchen in der n-ten Figur in einem m-Eck bestimmt werden kann.

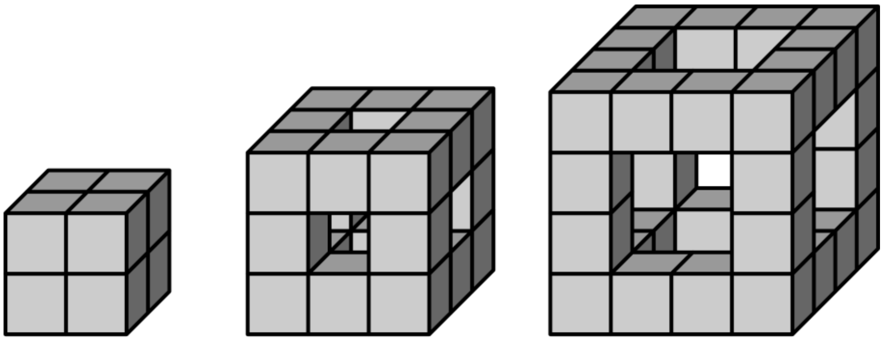
d) Macht es Sinn, durch Setzen von m=2 bzw. m=1 auch „Zweiecke“ bzw. „Einecke“ zu untersuchen?
Begründe.

a) Mia hat in einer Formelsammlung eine Summenformel gefunden:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

Sie sagt: „Damit kann ich einen Term erstellen, der angibt, wie viele Plättchen ich für die ersten *n* Quadrate insgesamt brauche."

b) Übertrage die für die Quadratmuster gemachten Überlegungen und gewonnenen Erkenntnisse auf Kantenmodelle von Würfeln, die mit kleineren Würfeln gebildet werden:



$n=2$ $n=3$ $n=4$

c) Lea sagt: „Ich nehme einfach einen Term von der Quadrat-Aufgabe, verdopple ihn und addiere $4 \cdot (n-2)$ hinzu. Dann habe ich einen Term für die Anzahl der kleinen Würfel im *n*-ten Kantenmodell."
Erkläre Leas Überlegung.