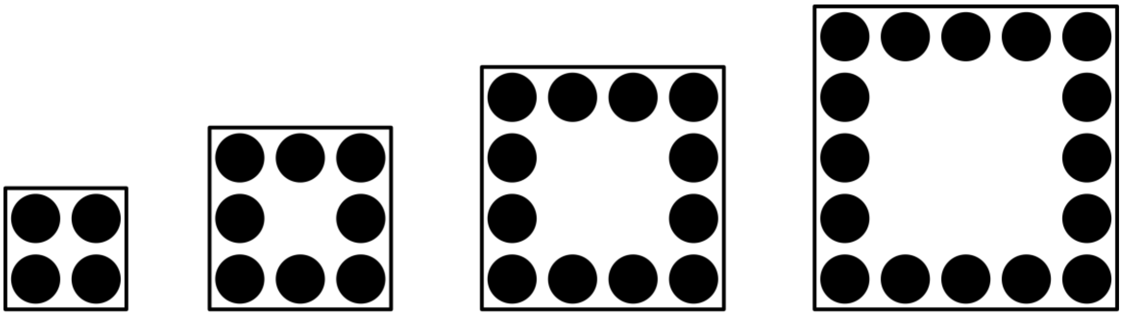
a) Nachgelegte Plättchenmuster:



$n=2$ $n=3$ $n=4$ $n=5$

b) Plättchen-Anzahlen der Quadrate:

n	Plättchenanzahl
2	4
3	8
4	12
5	16

c) Plättchen-Anzahlen der Quadrate:

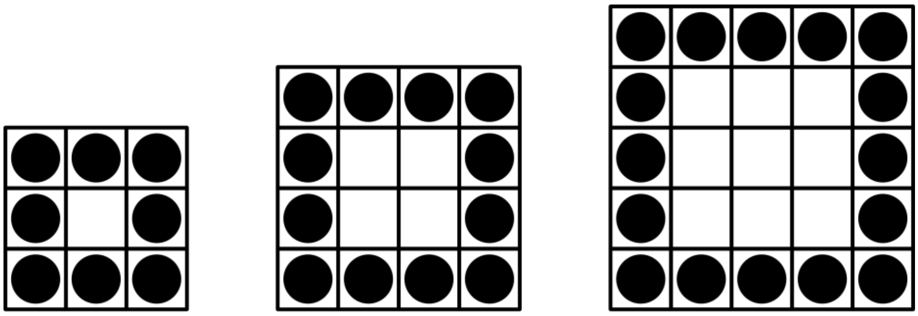
n	Plättchenanzahl
6	20
7	24
8	28

Quadrat-Randfelder

Lösung von Aufgabe 1.2

Anforderungsbereich I (Reproduzieren) • Anforderungsebene MSA

a) Quadrat-Muster:



n=3 n=4 n=5

b) Plättchen-Anzahlen der Quadrate:

n	Plättchenanzahl
2	4
3	8
4	12
5	16

c) Plättchen-Anzahlen der Quadrate:

n	Plättchenanzahl
6	20
7	24
8	28

a) Plättchen-Anzahlen der Quadrate:

n	Plättchenanzahl
2	4
3	8
4	12
5	16

b) Plättchen-Anzahlen der Quadrate:

n	Plättchenanzahl
6	20
10	36
100	396

c) Beispiel für eine Beschreibung der Weiterentwicklung:

„Bei jeder der vier Quadratseiten kommt ein Plättchen hinzu; die Anzahl der Plättchen nimmt also von Schritt zu Schritt um vier zu.“

Quadrat-Randfelder **Lösung von Aufgabe 2A.1**

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ESA

a) Zuordnung von Termen, Erklärungen und Überlegungen:

●	$4 \cdot (n-2) + 4$	Ali	Überlegung B
▲	$4 \cdot (n-1)$	Bea	Überlegung A
■	$2 \cdot n + 2 \cdot (n-2)$	Cleo	Überlegung C

b) Beispiel für den Nachweis der Gleichwertigkeit:

$4 \cdot (n-2) + 4 = 4 \cdot n - 4 \cdot 2 + 4 = 4 \cdot n - 8 + 4 = 4 \cdot n - 4$
$4 \cdot (n-1) = 4 \cdot n - 4$
$2 \cdot n + 2 \cdot (n-2) = 2 \cdot n + 2 \cdot n - 2 \cdot 2 = 2 \cdot n + 2 \cdot n - 4 = 4 \cdot n - 4$

Alle Terme lassen sich zu $4 \cdot n - 4$ umformen; deshalb sind sie gleichwertig.

a) Zuordnung von Termen, Erklärungen und Überlegungen:

T_1	Ali	Überlegung B
T_2	Dani	Überlegung D
T_3	Bea	Überlegung A
T_4	Flo	Überlegung E
T_5	Eli	Überlegung F
T_6	Cleo	Überlegung C

b) Beispiel für den Nachweis der Gleichwertigkeit:

$T_1 \longrightarrow 4 \cdot (n-2) + 4 = 4 \cdot n - 4 \cdot 2 + 4 = 4 \cdot n - 8 + 4 = 4 \cdot n - 4$
$T_2 \longrightarrow 4 \cdot n - 4$
$T_3 \longrightarrow 4 \cdot (n-1) = 4 \cdot n - 4$
$T_4 \longrightarrow n^2 - (n-2)^2 = n^2 - (n^2 - 4 \cdot n + 4) = n^2 - n^2 + 4 \cdot n - 4 = 4 \cdot n - 4$
$T_5 \longrightarrow 4 \cdot (n-2 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = 4 \cdot n - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot n - 8 + 4 = 4 \cdot n - 4$
$T_6 \longrightarrow 2 \cdot n + 2 \cdot (n-2) = 2 \cdot n + 2 \cdot n - 2 \cdot 2 = 2 \cdot n + 2 \cdot n - 4 = 4 \cdot n - 4$

Alle Terme lassen sich zu $4 \cdot n - 4$ umformen; deshalb sind sie gleichwertig.

a) Beispiel für einen Term:

$4 \cdot n - 4$

(Bemerkung: Vergleiche auch Aufgabe 2B.3.)

b) Beispiel für eine Begründung:

„Jede der vier Seiten besteht aus n Plättchen; insgesamt wären das $4 \cdot n$ Plättchen. Die vier Plättchen in den Ecken sind dann aber doppelt gezählt; deshalb muss von $4 \cdot n$ der Wert 4 subtrahiert werden.“

Quadrat-Randfelder **Lösung von Aufgabe 2B.3**

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ÜOS

a) Zuordnung von Termen, Vorgehensweisen und Grafiken:

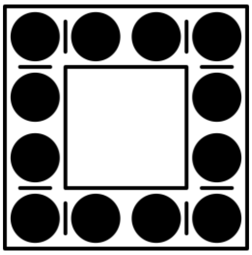
T_1		Überlegung B
T_2	Dani	
T_3		Überlegung A
T_4	Flo	
	Eli	Überlegung C
	Cleo	

b) Beispiele für fehlende Terme:
T_5 (zu Eli) ⟶ $4 \cdot (n-2 + 2\cdot½)$
T_6 (zu Cleo) ⟶ $2\cdot n + 2\cdot(n-2)$

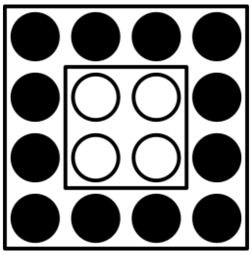
Beispiele für fehlende Beschreibungen:
T_1 ⟶ „Zuerst die vier Stücke in der Mitte der Seiten; dann die vier Ecken dazu.“
T_3 ⟶ „Von jeder Seite alle Plättchen bis auf das letzte; das ist das erste der nächsten Seite.“

Beispiele für fehlende Grafiken:

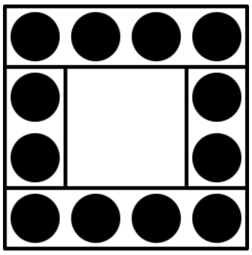
T_2 (Dani)



T_4 (Flo)



T_6 (Cleo)



c) Beispiel für den Nachweis der Gleichwertigkeit:

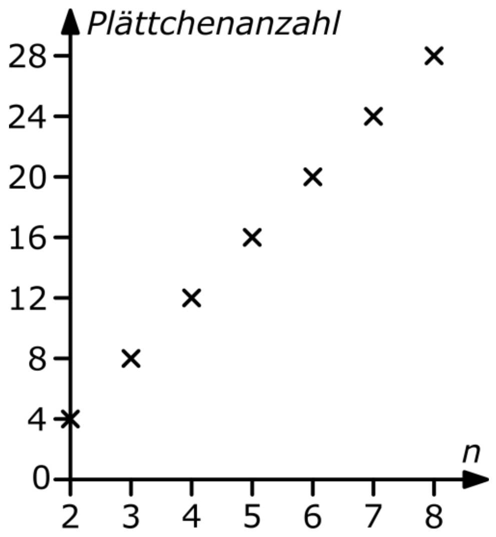
$T_1 \longrightarrow 4 \cdot (n-2) + 4 = 4\cdot n - 4\cdot 2 + 4 = 4\cdot n - 8 + 4 = 4\cdot n - 4$
$T_2 \longrightarrow 4\cdot n - 4$
$T_3 \longrightarrow 4\cdot(n-1) = 4\cdot n - 4$
$T_4 \longrightarrow n^2 - (n-2)^2 = n^2 - (n^2 - 4\cdot n + 4) = n^2 - n^2 + 4\cdot n - 4 = 4\cdot n - 4$
$T_5 \longrightarrow 4 \cdot (n-2 + 2\cdot½) = 4\cdot n - 4\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot½ = 4\cdot n - 8 + 4 = 4\cdot n - 4$
$T_6 \longrightarrow 2\cdot n + 2\cdot(n-2) = 2\cdot n + 2\cdot n - 2\cdot 2 = 2\cdot n + 2\cdot n - 4 = 4\cdot n - 4$

Alle Terme lassen sich zu $4\cdot n - 4$ umformen; deshalb sind sie gleichwertig.

a) Plättchen-Anzahlen der Quadrate:

n	Plättchenanzahl
2	4
3	8
4	12
5	16
6	20
7	24
8	28

b) Punktdiagramm zu den Plättchen-Anzahlen:



c) Beispiel für die Beschreibung der Platzierung der Punkte:

„Die Punkte liegen auf einer Geraden."

d) Beispiel für eine begründete Antwort:

„Es ist nicht sinnvoll, die Punkte zu verbinden, denn wenn ein großes Quadrat aus kleinen Quadraten gebildet wird, kann eine Seite des großen Quadrats nur aus einer ganzzahligen Anzahl kleiner Quadrate gebildet werden. Einem Wert wie etwa 4,5 ist keine Plättchenanzahl zugeordnet; bei einer Verbindung von Punkten würde dies aber so erscheinen."

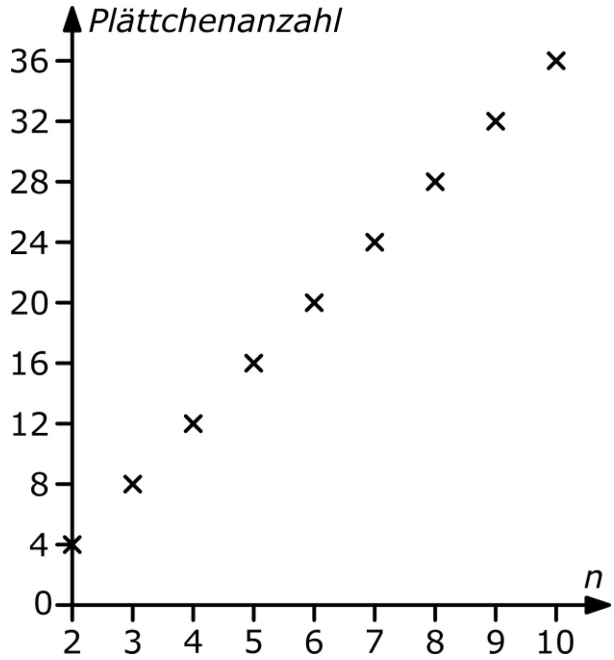
a) Plättchen-Anzahlen der Quadrate:

n	Plättchenanzahl
2	4
3	8
4	12
5	16
6	20
7	24
8	28
9	32
10	36

Beispiel für die Beschreibung der Zunahme:

„Die Anzahl der Plättchen nimmt in jedem Schritt um vier zu.

b) Punktdiagramm zu den Plättchen-Anzahlen:



c) Beispiel für die Beschreibung der Platzierung der Punkte:

„Die Punkte liegen auf einer Geraden."

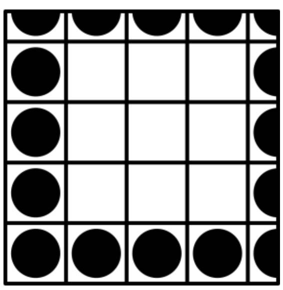
d) Funktionsgleichung:

$f(x) = 4 \cdot x - 4$

e) Stellungnahme zu Kims Überlegung:

„Kims Überlegung ist nicht sinnvoll, denn wenn ein großes Quadrat aus kleinen Quadraten gebildet wird, kann eine Seite des großen Quadrats nur aus einer ganzzahligen Anzahl kleiner Quadrate gebildet werden. Einem Wert wie etwa 4,5 ist keine Plättchenanzahl zugeordnet. Es ist deshalb auch nicht sinnvoll, aus dem Punktdiagramm ein Liniendiagramm zu machen."

Kleines Gedankenspiel: Würde das „Zerschneiden" von Plättchen zugelassen, so entstünde für n=4,5 folgende Darstellung:



Hier sind es nur sieben ganze, acht halbe und ein viertel Plättchen.

a) Beispiel für eine begründete Bewertung:

„Gesas Folgerung ist falsch.
Zwar steigt der Flächeninhalt von Quadraten quadratisch im Verhältnis zur Seitenlänge. Die Plättchen auf den Randfeldern repräsentieren aber den Umfang des Quadrats – und der Umfang nimmt linear zu."

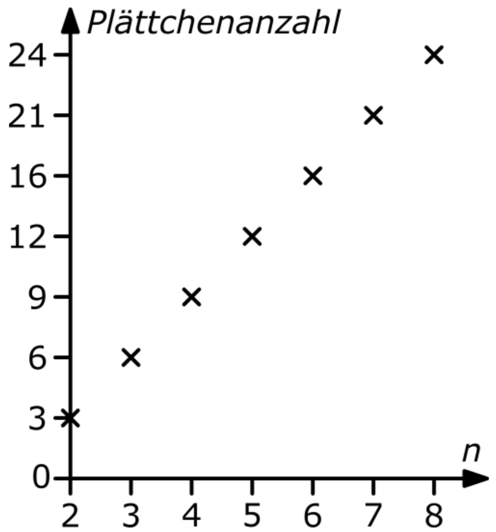
b) Beispiel für eine Stellungnahme:

„Wichtig ist, wie der Begriff *Randfeld* verstanden wird. Definiert man ihn als ein *Feld, das mit mindestens einer Seite auf einer Seite des großen Quadrats liegt*, hat Jan recht. Die Terme (z. B. aus Aufgabe 2A.2) können jedoch erst ab n=2 verwendet werden. n=1 ist ein Sonderfall."

„Auch Idas Argumentation ist beachtenswert. Dieses Verfahren kommt bei n=2 an seine Grenze; genau wie die Terme.
Gegen Hugos These spricht, das n für die Anzahl der Felder einer Quadratseite steht. Mit null Plättchen kann aber kein Quadrat gebildet werden, das ein Plättchen breit ist."

Bemerkung: Interessant kann auch eine Diskussion des Falles n=0 sein. Hugo würde dann die negative Anzahl −4 erhalten, Ida würde die Existenz auch dieses Quadrats bestreiten, Jan würde von 0 Plättchen ausgehen.

c) Beispiel für eine grafische Darstellung:



d) Beispiel für einen rechnerischen Beweis:

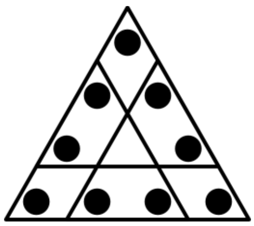
Anzahl der Plättchen im n-ten Quadrat: $4 \cdot n - 4$
Anzahl der Plättchen im (n+1)-ten Quadrat: $4 \cdot (n+1) - 4$
Differenz: $(4 \cdot (n+1) - 4) - (4 \cdot n - 4)$
$= (4 \cdot n + 4 - 4) - (4 \cdot n - 4) = 4 \cdot n + 4 - 4 - 4 \cdot n + 4 = 4$

Übertragung auf Dreiecke – Plättchen-Anzahlen:

n	Plättchenanzahl
2	3
3	6
4	9
5	12

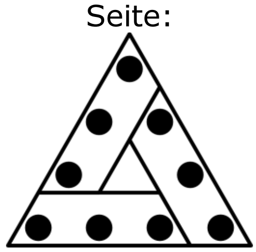
Übertragung auf Dreiecke – Terme, Überlegungen und Darstellungen:

Zuerst die Stücke in der Mitte jeder Seite, dann die Ecken dazu:



$3 \cdot (n-2) + 3$
$= 3 \cdot n - 3 \cdot 2 + 3$
$= 3 \cdot n - 6 + 3$
$= 3 \cdot n - 3$

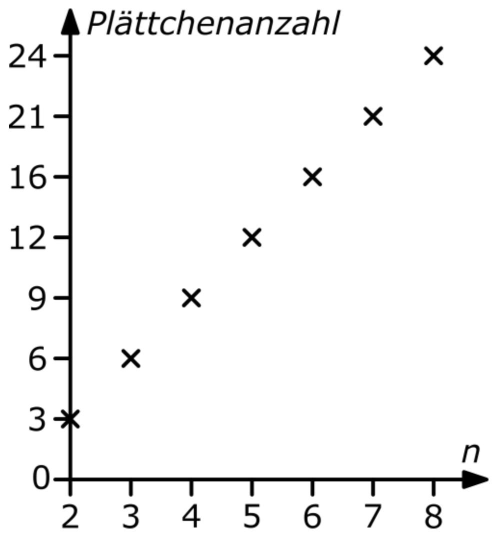
Von jeder Seite alle Plättchen bis auf das letzte, denn das ist das erste der nächsten Seite:



$3 \cdot (n-1)$
$= 3 \cdot n - 3$

Eine Argumentation mit sich gegenüberliegenden Seiten ist nicht möglich.

Übertragung auf Dreiecke – Darstellung der Plättchen-Anzahlen:



Die Punkte liegen auf einer Geraden; die Zunahme der Plättchen geschieht gleichmäßig.

a) Quadrate mit Diagonalen – Plättchen-Anzahlen:

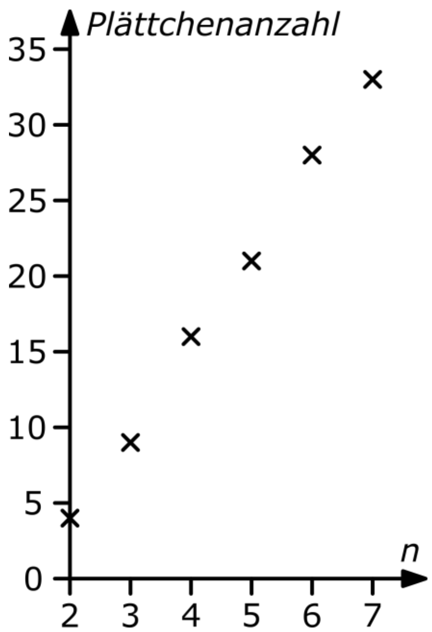
n	Plättchenanzahl
2	4
3	9
4	16
5	21
6	28
7	33

Quadrate mit Diagonalen – Terme:

Bei geradem *n* kommen gegenüber dem „normalen" Quadrat $2 \cdot (n-2)$ Plättchen für die Diagonalen hinzu.
Beispiel für einen Term: $4 \cdot n - 4 + 2 \cdot (n-2) = 6 \cdot n - 8$

Bei ungeradem *n* kommen gegenüber dem „normalen" Quadrat $(n-2) + (n-3) = 2 \cdot n - 5$ Plättchen für die Diagonalen hinzu, weil es ein mittleres Plättchen gibt, das zu beiden Diagonalen gehört.

Quadrate mit Diagonalen – Darstellung:

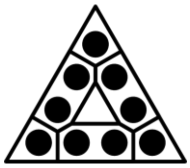
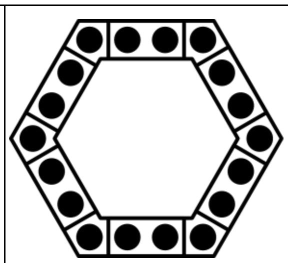
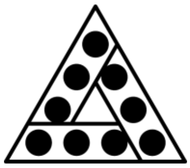
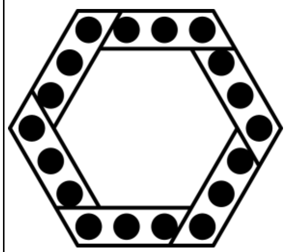
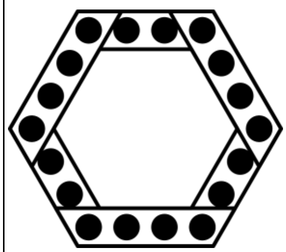
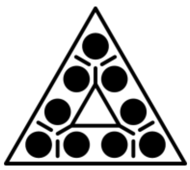
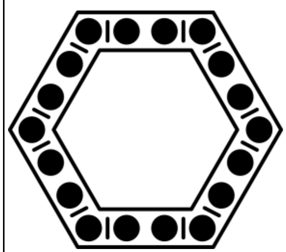
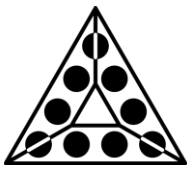
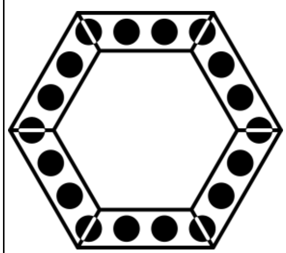


Die Punkte liegen nicht auf einer Geraden, weil für gerades und ungerades *n* unterschiedliche Terme angewendet werden müssen.
Bei geradem *n* steigt die Anzahl der Plättchen um 7 gegenüber der letzten Figur; bei ungeradem *n* steigt die Anzahl der Plättchen um 5.

b) Übertragung auf m-Ecke – Plättchen-Anzahlen:

n	Plättchenanzahl im Dreieck	Plättchenanzahl im Fünfeck	Plättchenanzahl im Sechseck
2	3	5	6
3	6	10	12
4	9	15	18
5	12	20	24
6	15	25	30
7	18	30	36
8	21	35	42
9	24	40	48
10	27	45	54

c) Übertragung auf *m*-Ecke – Terme:

Zuerst die Mittelstücke und die Ecken dazu.	 $3 \cdot (n-2) + 3$	 $5 \cdot (n-2) + 5$	 $6 \cdot (n-2) + 6$
Von jeder Seite alle Plättchen bis auf das letzte.	 $3 \cdot (n-1)$	 $5 \cdot (n-1)$	 $6 \cdot (n-1)$
Jede zweite Seite komplett und die Zwischenstücke dazu.	Das Verfahren ist nur bei Figuren mit gerader Ecken-Anzahl möglich. Es entspricht dem Vorgehen beim Quadrat, zwei sich gegenüberliegende Seiten und dann die Zwischenstücke zu betrachten.		 $3 \cdot n + 3 \cdot (n-2)$
Alle Seiten komplett und die doppelt gezählten Ecken weg.	 $3 \cdot n - 3$	 $5 \cdot n - 5$	 $6 \cdot n - 6$
Alle Seiten aber mit nur halb gezählten Ecken.	 $3 \cdot (n-2 + 2 \cdot ½)$	 $5 \cdot (n-2 + 2 \cdot ½)$	 $6 \cdot (n-2 + 2 \cdot ½)$

Der Ansatz über die Flächeninhaltsformel für Quadrate, bei dem zuerst alle Felder genommen und dann die inneren weggenommen werden, lässt sich nicht übertragen.

c) Beispiel für einen Term für die *n*-te Figur in *m*-Ecken:

$m \cdot n - m = m \cdot (n - 1)$

d) Beispiel für eine begründete Stellungnahme:

„Grundsätzlich sind Figuren zweidimensional. ‚Zweiecke' oder ‚Einecke' sind dies nicht, sodass Überlegungen hierzu als Gedankenspiel angesehen werden sollten, das aber durchaus interessant sein kann."

„In einem *n*-Eck wird die erste Ecke mit der nächsten verbunden, die mit der übernächsten usw. – bis schließlich die *n*-te Ecke wieder mit der ersten verbunden wird. In einem ‚Zweieck' ist die zweite Ecke bereits die *n*-te. Es käme für $n=4$ folgende ‚Figur' aus scheinbar 4 Plättchen zustande:"

„Der Term $m \cdot n - m$ liefert für $m=2$ und $n=4$ den Wert 6. Dies ist aber nachvollziehbar, denn von der letzten Ecke einer Figur werden Plättchen zur ersten gelegt, auf das erste Feld jedoch nicht mehr, denn dort liegt schon das ‚Startplättchen'. Nachdem die ersten 4 Plättchen bis zur zweiten Ecke gelegt sind, müssen also Plättchen in Richtung erste Ecke gelegt werden. Auf den beiden mittleren Positionen des Beispiels liegen also zwei Plättchen übereinander! Insgesamt sind es also 6 Plättchen und das passt zum Wert, den der Term liefert. (Hierzu passt, dass in einem ‚Zweieck' die beiden Seiten aufeinanderliegen müssen.)"

„Für ein ‚Eineck' liefert der Term $m \cdot n - m$ für die *n*-te Figur den Wert $n-1$. Das widerspricht der Anschauung, das ein ‚Eineck' nur aus einem Plättchen bestehen kann. Auch die Vorstellung, dass hier mit zunehmendem *n* Plättchen auf der einzigen Position gestapelt werden könnten, erscheint nicht nachvollziehbar."

a) Gesamt-Anzahl mit der Summenformel:

Term für die n-te Figur: $4 \cdot n - 4$

$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$
$4 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = 2 \cdot n \cdot (n+1)$

Für jede der n Figuren wird 4 subtrahiert, insgesamt wird also $4 \cdot n$ subtrahiert.

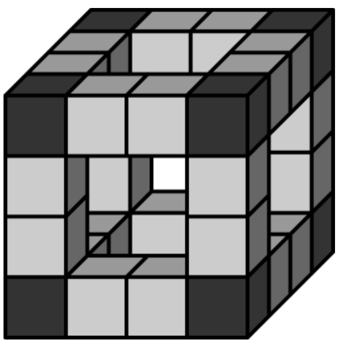
Somit ergibt sich folgender Term für die Gesamt-Anzahl der Plättchen:
$2 \cdot n \cdot (n+1) - 4 \cdot n = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 4 \cdot n = 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n = 2 \cdot n \cdot (\mathrm{n}-1)$

b) Übertragung auf Würfel-Kantenmodelle – Plättchen-Anzahlen:

n	Anzahl kleiner Würfel
2	8
3	20
4	32
5	44
6	56
7	68
8	80

Übertragung auf Würfel-Kantenmodelle – Terme:

Ein Beispiel für das Finden eines Terms ist es, die zwölf Kanten sowie die acht Ecken zu betrachten.

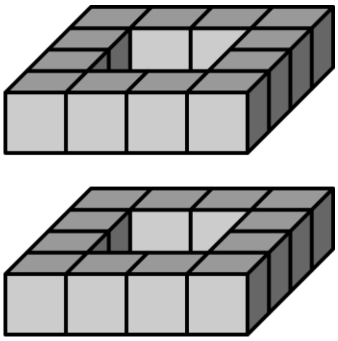


Abgeleiteter Term: $12 \cdot (n-2) + 8 = 12 \cdot n - 24 + 8 = 12 \cdot n - 16$

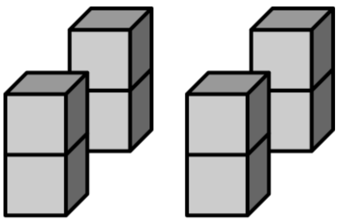
Aus dem Term kann unmittelbar Linearität geschlossen werden; in einem Punktdiagramm liegen die Punkte also auf einer Geraden. Die Anzahl der benötigten kleinen Würfel nimmt in jedem Schritt um 12 zu.

c) Beispiel für eine Erklärung von Leas Überlegung:

„Die obere und die untere Ebene des Kantenmodells sind gleich. Die Anzahl der kleinen Würfel entspricht jeweils der Anzahl der Plättchen der entsprechenden ‚Quadrat-Aufgabe'. Deshalb kann auch ein Term aus diesem Kontext genommen und verdoppelt werden.
Beispiel: $2 \cdot (4 \cdot n - 4) = 8 \cdot n - 8$
(Vergleiche auch Aufgabe 2A.2.)"



„Anschließend kommen die vier ‚Verbindungssäulen' hinzu. Die Anzahl der kleinen Würfel dafür ist $4 \cdot (n-2) = 4 \cdot n - 8$."



„Für die Gesamtzahl der kleinen Würfel ergibt sich folgender Term:"
$(8 \cdot n - 8) + (4 \cdot n - 8) = 12 \cdot n - 16$