Satz des Pythagoras

Lösung von Aufgabe 1.1.1

Anforderungsbereich I (Reproduzieren) • Anforderungsebene ESA

a) Länge x der Hypotenuse:

Ansatz: $x^2 = 8^2 + 15^2$

$x = 17$ cm

b) Beispiel für den Nachweis der Rechtwinkligkeit:

$5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$

Satz des Pythagoras

Lösung von Aufgabe 1.1.2

Anforderungsbereich I (Reproduzieren) • Anforderungsebene ESA

Kompletter Satz:

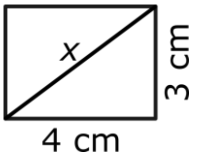
„In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen denselben Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.“

a) Länge x der anderen Kathete:

Ansatz: $x^2 = 26^2 - 10^2$

$x = 24$ cm

b) Länge x der Diagonalen:



Ansatz: $x^2 = 3^2 + 4^2$

$x = 5$ cm

Länge x der Flächendiagonalen:

Ansatz: $x^2 = 3^2 + 4^2$

$x = 5$ cm

Länge y der Raumdiagonalen:

Ansatz: $y^2 = x^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2$

$y = 13$ cm

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 1.2.3**

Anforderungsbereich I (Reproduzieren) • Anforderungsebene MSA

Kompletter Satz:

„In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen denselben Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse."

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 1.3.1**

Anforderungsbereich I (Reproduzieren) • Anforderungsebene ÜOS

Länge x der dritten Seite:

Ansatz: $x^2 = 14^2 - 6^2$

$x \approx 12{,}65$ cm

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 1.3.2**

Anforderungsbereich I (Reproduzieren) • Anforderungsebene ÜOS

Beispiel für eine Formulierung:

„Der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seitenlänge genauso lang ist wie die einer der beiden Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck, wird berechnet. Anschließend wird der Flächeninhalt eines Quadrats berechnet, dessen Seitenlänge genauso lang ist wie die der anderen Kathete im rechtwinkligen Dreieck. Beide Flächeninhalte werden addiert. Die Summe ist genauso groß wie der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seitenlänge genauso lang ist wie die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck."

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 2.1.1**

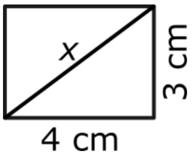
Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ESA

Länge x der dritten Seite:

Ansatz: $x^2 = 14^2 - 6^2$

$x \approx 12{,}65$ cm

Länge x der Diagonalen:



Ansatz: $x^2 = 3^2 + 4^2$

$x = 5$ cm

Länge x der Flächendiagonalen:

Ansatz: $x^2 = 3^2 + 4^2$

$x = 5$ cm

Länge y der Raumdiagonalen:

Ansatz: $y^2 = x^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2$

$y = 13$ cm

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 2.1.4**

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ESA

Ergänzter Satz

„Der Satz des Pythagoras gilt, wenn ein Dreieck rechtwinklig ist."

Bemerkung: Die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt nur dann, wenn die Hypotenuse mit c bezeichnet ist.

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 2.1.5**

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ESA

Länge x der Strecke CD:

Ansatz: $x^2 = 6^2 + 6^2$

$x \approx 8{,}49$ cm

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 2.2.1**

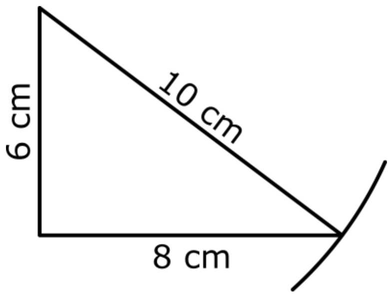
Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene MSA

Ergänzter rechter Winkel:

Ansatz für die Länge x der zweiten Kathete: $x^2 = 10^2 - 8^2$

$x = 6$ cm

Bemerkung: Die Konstruktion kann auch mit Zirkel und ohne Rechnung erfolgen.



Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 2.2.2**

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene MSA

Beispiel für die Berechnung des Flächeninhalts:

$A = 80 \cdot 60 + 60 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 6200$ cm²

Länge x der Strecke BC:

Ansatz: $x^2 = 20^2 + 20^2$

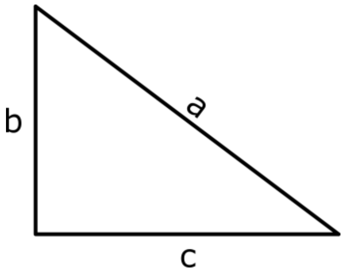
$x \approx 28{,}28$ cm²

Umfang:

$u = 60 + 80 + 80 + 60 + 28{,}28 = 308{,}28$ cm²

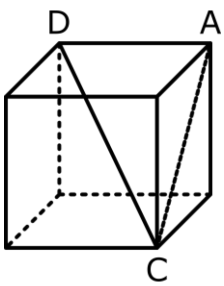
Passendes Dreieck:

Jedes rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse mit a bezeichnet ist, erfüllt die Vorgabe.



Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 2.2.4**
Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene MSA

Länge x der Strecke CD:



Länge f der Flächendiagonalen AC:
$f^2 = 6^2 + 6^2$
$f \approx 8{,}48$ cm

Länge x der Raumdiagonalen CD
$x^2 = f^2 + 6^2$
$x \approx 10{,}39$ cm

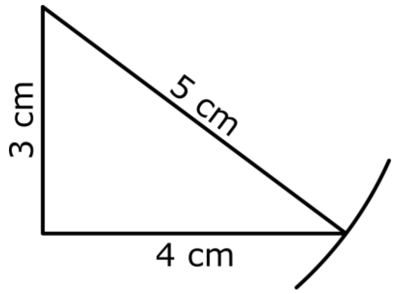
Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 2.3.1**

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ÜOS

Ergänzung des rechten Winkels:

Festlegen einer Kathete und Berechnen der anderen oder ‚Verdoppeln' des pythagoräischen Zahlentripels (3|4|5) zum Zahlentripel (6|8|10).

Bemerkung: Die Konstruktion kann auch mit Zirkel und ohne Rechnung erfolgen.



Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 2.3.2**

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ÜOS

Überprüfen auf Spitz-, Stumpf- oder Rechtwinkligkeit:

Dreieck A:
$10^2 + 24^2 = 676 = 26^2$
Das Dreieck ist rechtwinklig.

Dreieck B:
$10^2 + 24^2 = 676 < 28^2$
Das Dreieck ist stumpfwinklig.

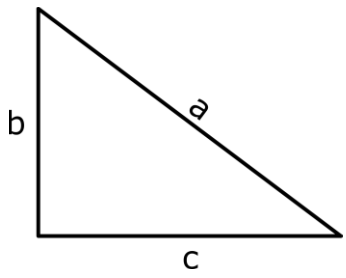
Dreieck C:
$10^2 + 24^2 = 676 > 24^2$
Das Dreieck ist spitzwinklig.

Satz des Pythagoras — Lösung von Aufgabe 2.3.3

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ÜOS

Passendes Dreieck:

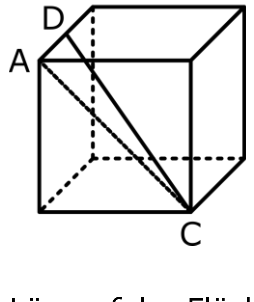
Jedes rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse mit a bezeichnet ist, erfüllt die Vorgabe.



Satz des Pythagoras — Lösung von Aufgabe 2.3.4

Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) • Anforderungsebene ÜOS

Länge x der Strecke CD:



Länge f der Flächendiagonalen AC:
$f^2 = 6^2 + 6^2$
$f \approx 8{,}48$ cm

Länge x der Raumdiagonalen CD
$x^2 = f^2 + 3^2$
$x = 9$ cm

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 3.1.1**

Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) • Anforderungsebene ESA

Übertragbarkeit auf Halbkreise:

Summe der Kathetenhalbkreise:
$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1{,}5^2 + 2^2) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6{,}25$

Hypotenusenhalbkreis:
$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6{,}25$

Der Satz des Pythagoras lässt sich übertragen.

Satz des Pythagoras **Lösung von Aufgabe 3.2.1**

Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) • Anforderungsebene MSA

Nachweis der Übertragbarkeit auf Halbkreise:

Summe der Kathetenhalbkreise:
$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{2} \cdot x)^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{2} \cdot y)^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot y^2) = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (x^2 + y^2)$

Hypotenusenhalbkreis:
$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{2} \cdot z)^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{4} \cdot z^2) = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot z^2$

Im rechtwinkligen Dreieck gilt $x^2 + y^2 = z^2$, also gilt auch $\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (x^2 + y^2) = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot z^2$.

Der Satz des Pythagoras lässt sich übertragen.

Satz des Pythagoras — Aufgabe 3.3.1 • Teil 1

Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) • Anforderungsebene ÜOS

a) Nachweis der Übertragbarkeit auf Halbkreise:

Summe der Kathetenhalbkreise:

$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{2}\cdot x)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{2}\cdot y)^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{4}\cdot y^2) = \frac{1}{8}\cdot\pi\cdot(x^2+y^2)$

Hypotenusenhalbkreis:

$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{2}\cdot z)^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{4}\cdot z^2) = \frac{1}{8}\cdot\pi\cdot z^2$

$\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot(x^2+y^2) = \frac{1}{8}\cdot\pi\cdot z^2$, weil $(x^2+y^2) = z^2$

Satz des Pythagoras — Aufgabe 3.3.1 • Teil 2

Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) • Anforderungsebene ÜOS

b) Überprüfung der Übertragbarkeit auf gleichseitige Dreiecke:

Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge *a*:

$h^2 = a^2 - (\frac{1}{2}\cdot a)^2 = a^2 - \frac{1}{4}\cdot a^2 = \frac{3}{4}\cdot a^2$

$h = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a$

$A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot a^2$

Summe der Kathetendreiecke:

$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot x^2 + \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot y^2 = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot(x^2+y^2)$

Hypotenusendreieck:

$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot z^2$

$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot(x^2+y^2) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot z^2$, weil $(x^2+y^2) = z^2$