Ein Beispiel für das Öffnen einer Aufgabe (Leitfaden S. 34)

geschlossene Aufgabe

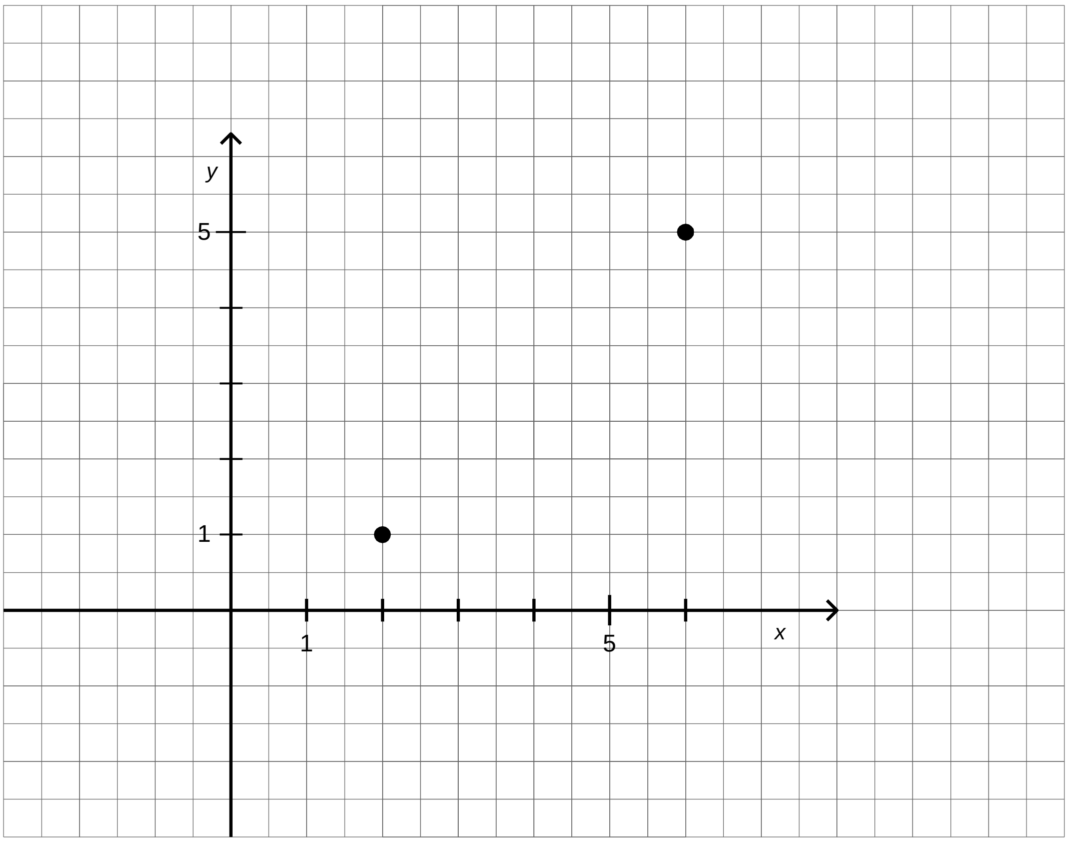
Zeichne die Punkte A (2 | 1), B (4 | 1) und C (6 | 5) in ein Koordinatensystem und finde einen Punkt D im 1. Quadranten, so dass ein Parallelogramm entsteht!

weniger geschlossene Aufgabe

(2 | 1), (4 | 1) und (6 | 5) sind Eckpunkte eines Parallelogramms. Wo innerhalb des 1. Quadranten kann der vierte Punkt liegen ?

offene Aufgabe

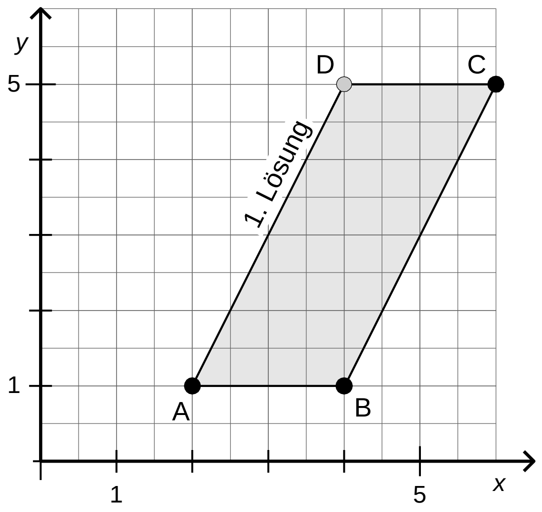
(2 | 1) und (6 | 5) sind Eckpunkte von verschiedenen, speziellen Vierecken. Bestimme solche Vierecke und vergleiche sie bezüglich ihrer Form!



Quelle: Marga Voigt, SINUS-SH

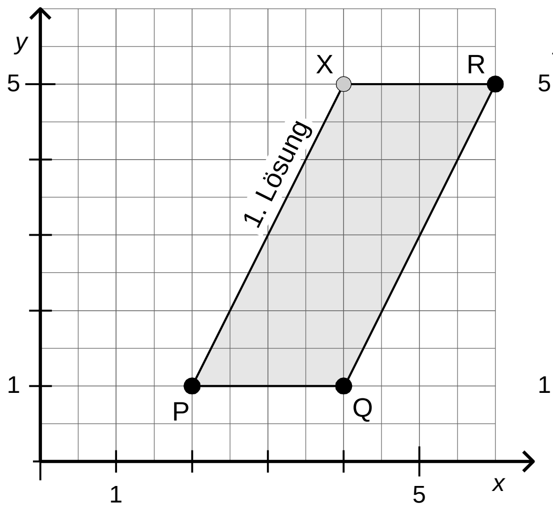
Lösungen

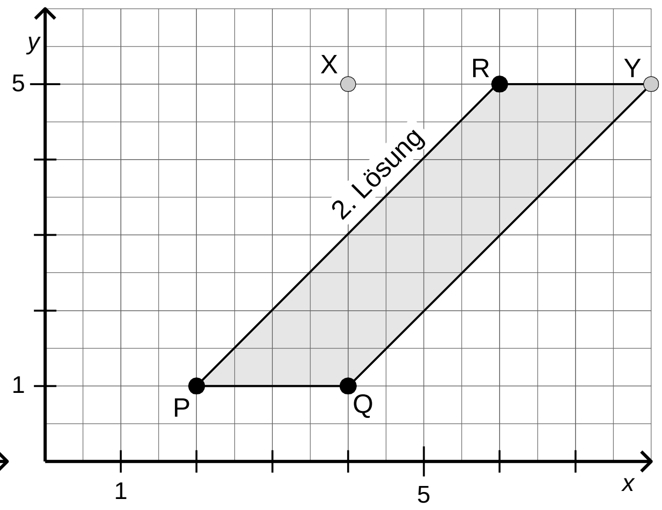
geschlossene Aufgabe



Der Punkt D hat die Koordinaten (4 | 5). Das Gitternetz und die Reihenfolge, in der die Punkte A, B und C bezeichnet werden, suggerieren, dass es keine andere Lösung gibt.

weniger geschlossene Aufgabe





1. Lösung: Der Punkt X hat die Koordinaten (4 | 5).

2. Lösung: Der Punkt Y hat die Koordinaten (8 | 5).

Durch das ausreichend großes Gitternetz und die bewusst weggelassenen Bezeichnungen der Punkte könnte die zweite Lösung entdeckt werden.

Weitere Erkenntnis: Der Punkt R ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{XY}$.

offene Aufgabe

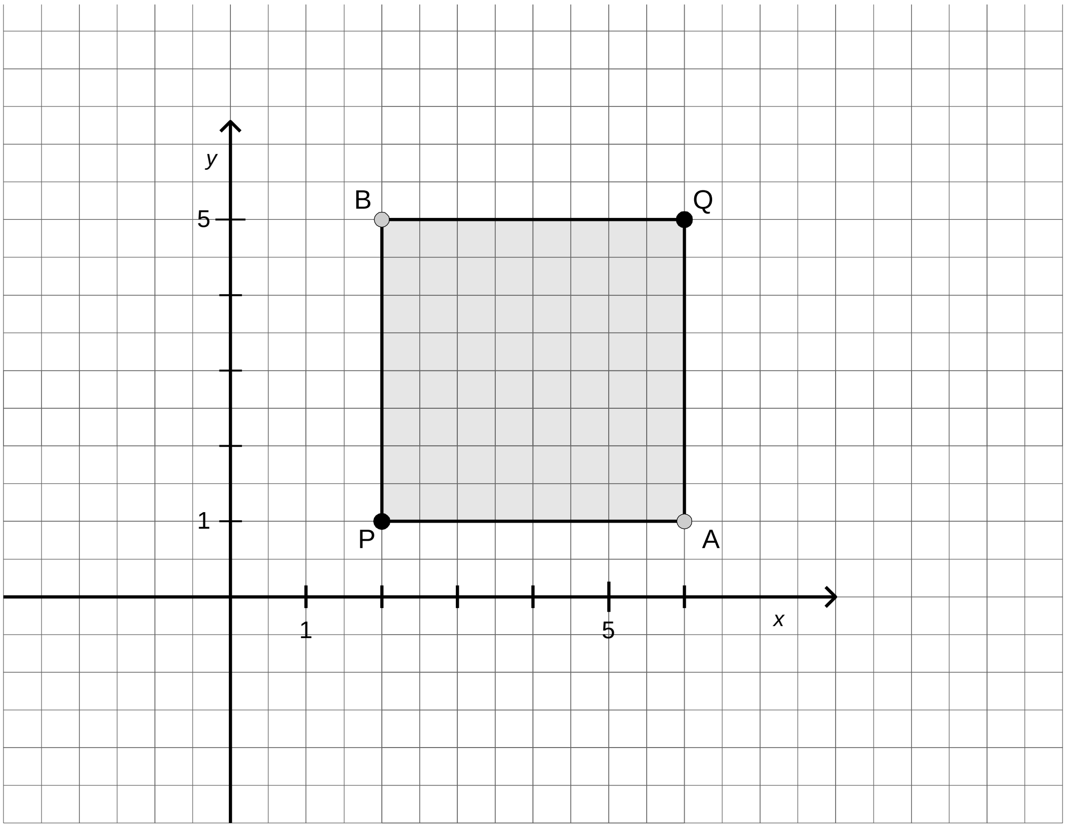
Durch die folgenden Erläuterungen soll das Potential der Aufgabe aufgezeigt werden. Die Vielfalt möglicher Lösungen wird in unaufdringlicher Weise durch das Gitternetz eingeschränkt – durch dessen Größe sowie durch Beschränkung auf Gitternetzpunkte. Dennoch können Musterlösungen bei offenen Aufgaben niemals alle denkbaren Ideen der Lernenden vollständig beschreiben. Auch sind die in den Erläuterungen aufgeführten Erkenntnisse keineswegs im Sinne eines verbindlichen „Outputs" gedacht, der von allen Lernenden erbracht oder von der Lehrkraft im Sinne eines Verfahrens gelehrt werden muss. Sehr wohl aber können einzelne Lernende durch die reichhaltige geometrische Situation angeregt zu einem Teil dieser weitergehenden Erkenntnisse gelangen – das ist der „didaktische Mehrwert" der Aufgabe. Um kreative Lösungen antizipieren zu können, werden als Beispiele nicht unbedingt solche Lösungen vorgestellt, bei denen die Strecken brav parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Grundsätzlich gibt es bei allen Lösungen stets zwei Möglichkeiten: $\overline{PQ}$ kann eine Seite des Vierecks oder eine Diagonale des Vierecks sein.

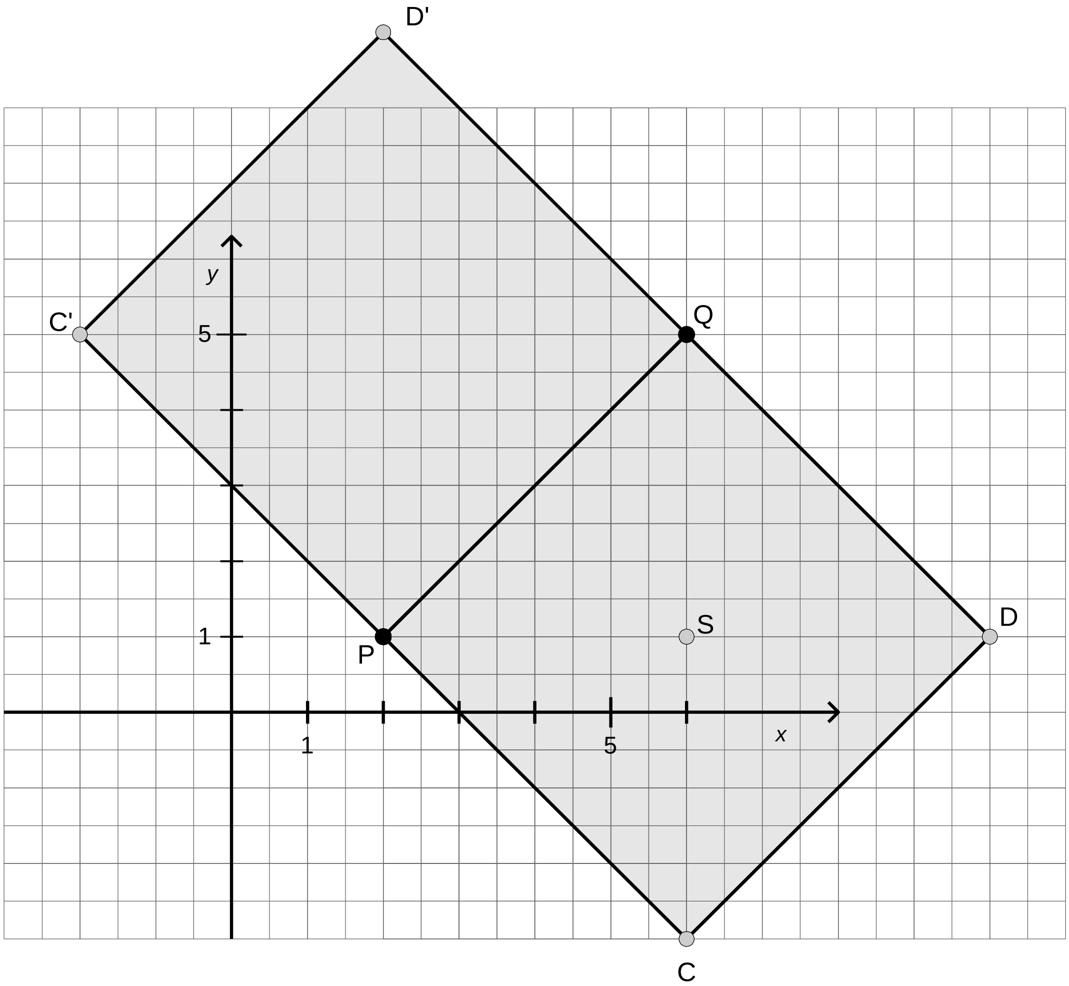
Quadrate

1. Lösung: $\overline{PQ}$ ist eine Diagonale des Quadrats.

Die Koordinaten der Punkte A (6 | 1) und B (2 | 5) entstehen durch Vertauschen aus den Koordinaten der Punkte P (2 | 1) und Q (6 | 5). Man kann entweder die Abszissen vertauschen und die Ordinaten beibehalten oder umgekehrt.



2. Lösung: $\overline{PQ}$ ist eine Seite des Quadrats.



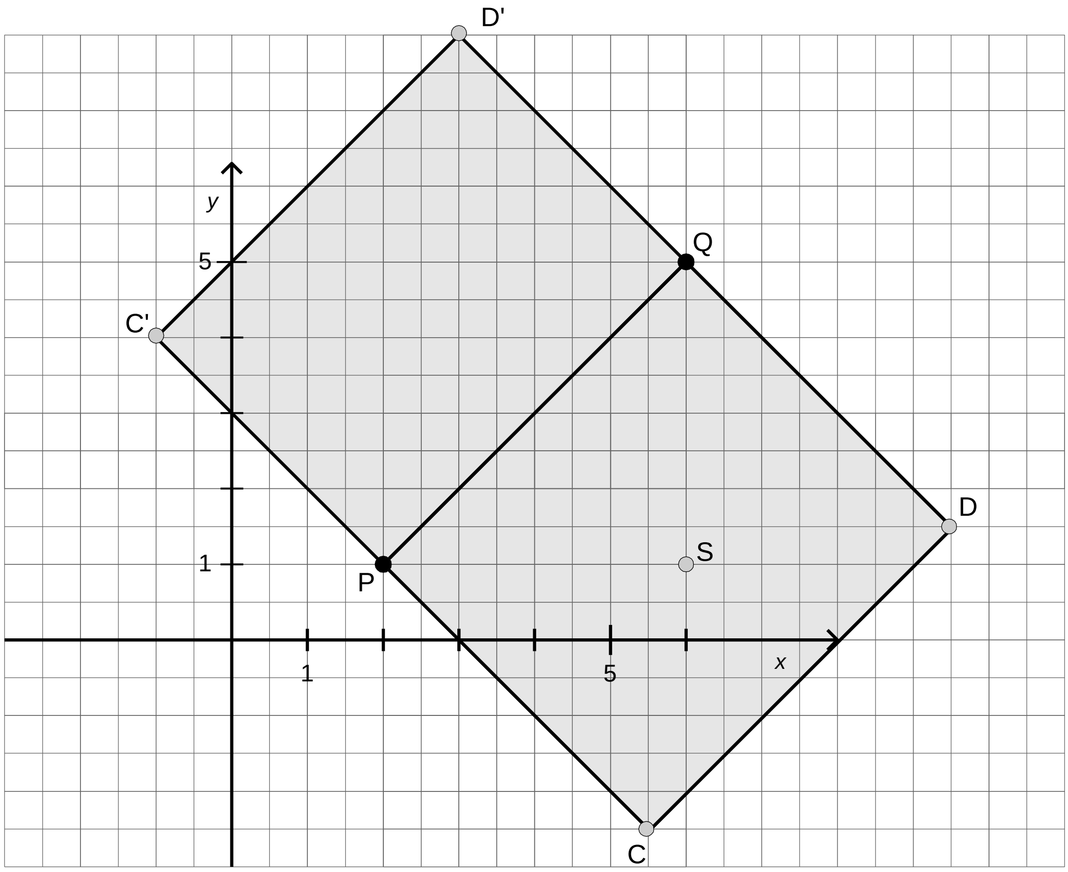
Wenn man mit Koordinaten arbeiten möchte, muss man für diese Lösung man negative Zahlen „erfinden“, die von den meisten Lernenden als selbstverständliche Fortsetzung der Skala auf der *y*-Achse nach unten akzeptiert werden.

Der Schwerpunkt des Quadrats, S (6 | 1), hat als Abszisse die Ordinate von Q (6 | 5) und als Ordinate die Abszisse von P (2 | 1). Die Koordinaten des Punktes C müssen so gewählt werden, dass S der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$ ist. Dazu muss C die Koordinaten (6 | –3) haben. 1 ist der arithmetische Mittelwert von 5 und –3. Die Koordinaten des Punktes D müssen so gewählt werden, dass S der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PD}$ ist. Dazu muss D die Koordinaten (10 | 1) haben. 6 ist der arithmetische Mittelwert von 2 und 10.

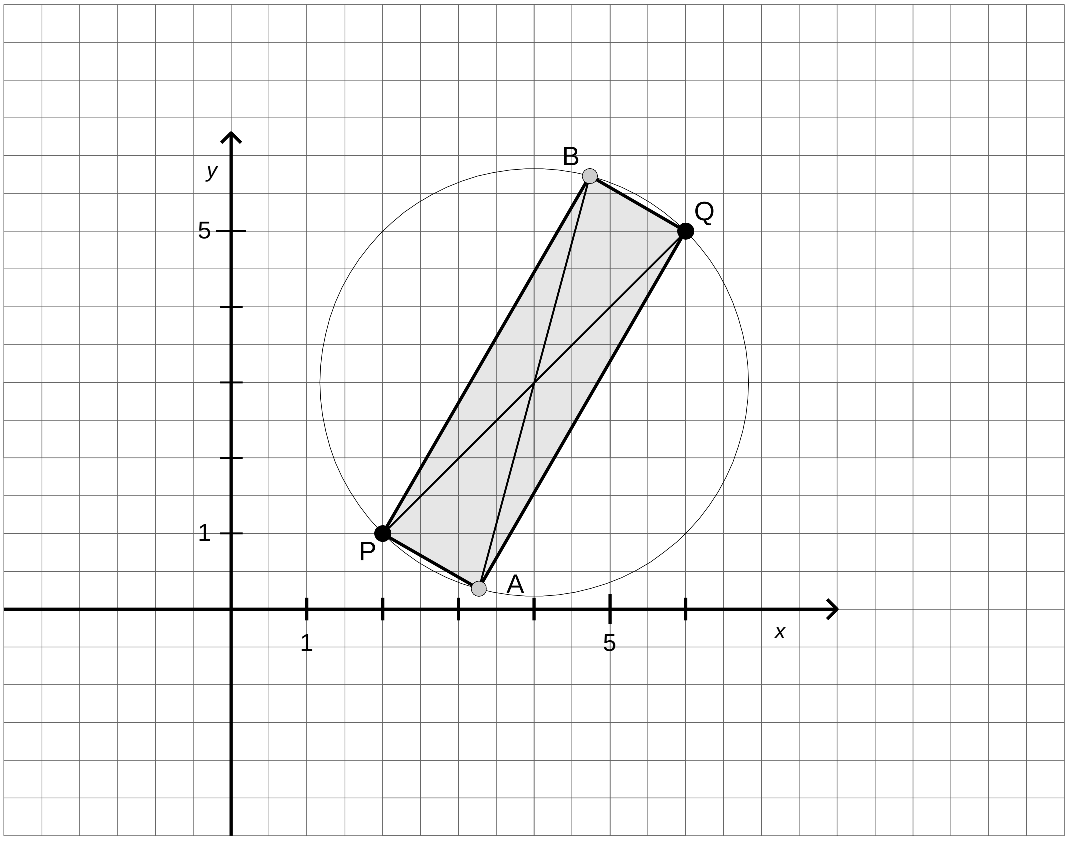
Bei der dritten Lösung sind S’ (2 | 5), C’ (–2 | 5) und D’ (2 | 9). Das Quadrat liegt teilweise außerhalb des vorgegebenen Gitternetzes.

Rechtecke

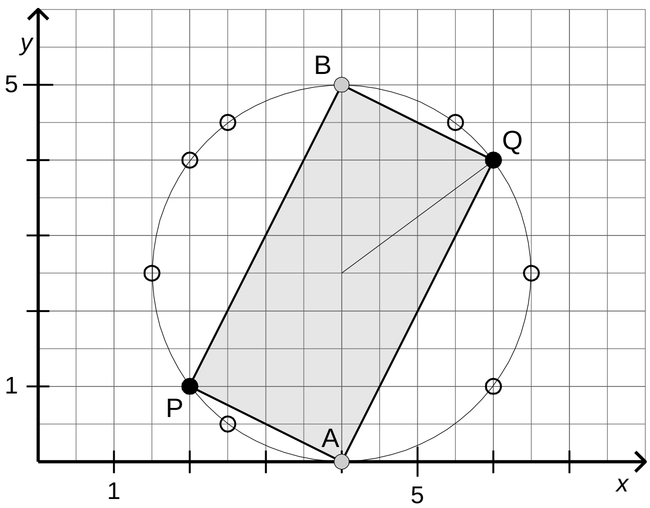
Die drei oben dargestellten Quadrate sind auch Lösungen für Rechtecke. Sucht man im Gitternetz Rechtecke, die keine Quadrate sind, muss $\overline{PQ}$ eine Seite des Rechtecks sein.



Verzichtet man auf die Einschränkung, dass C und D Gitternetzpunkte sein müssen, dann gibt es unendlich viele Lösungen, bei denen $\overline{PQ}$ eine Diagonale des Rechtecks ist.

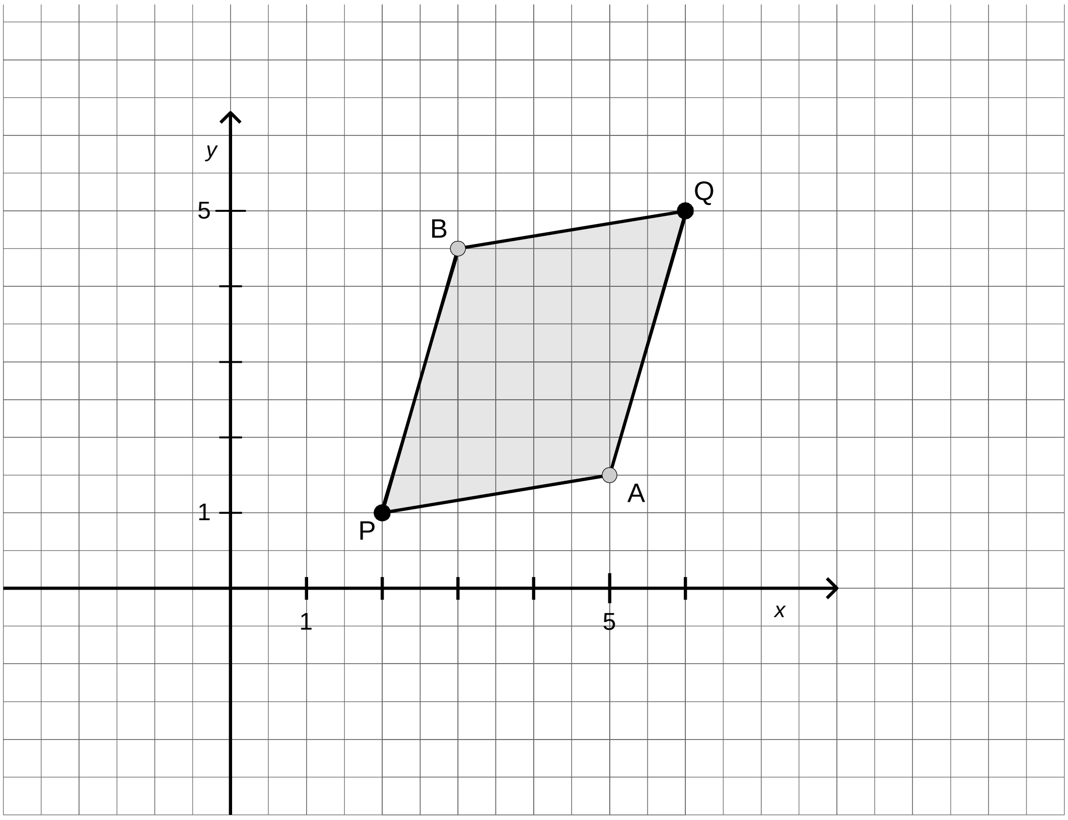


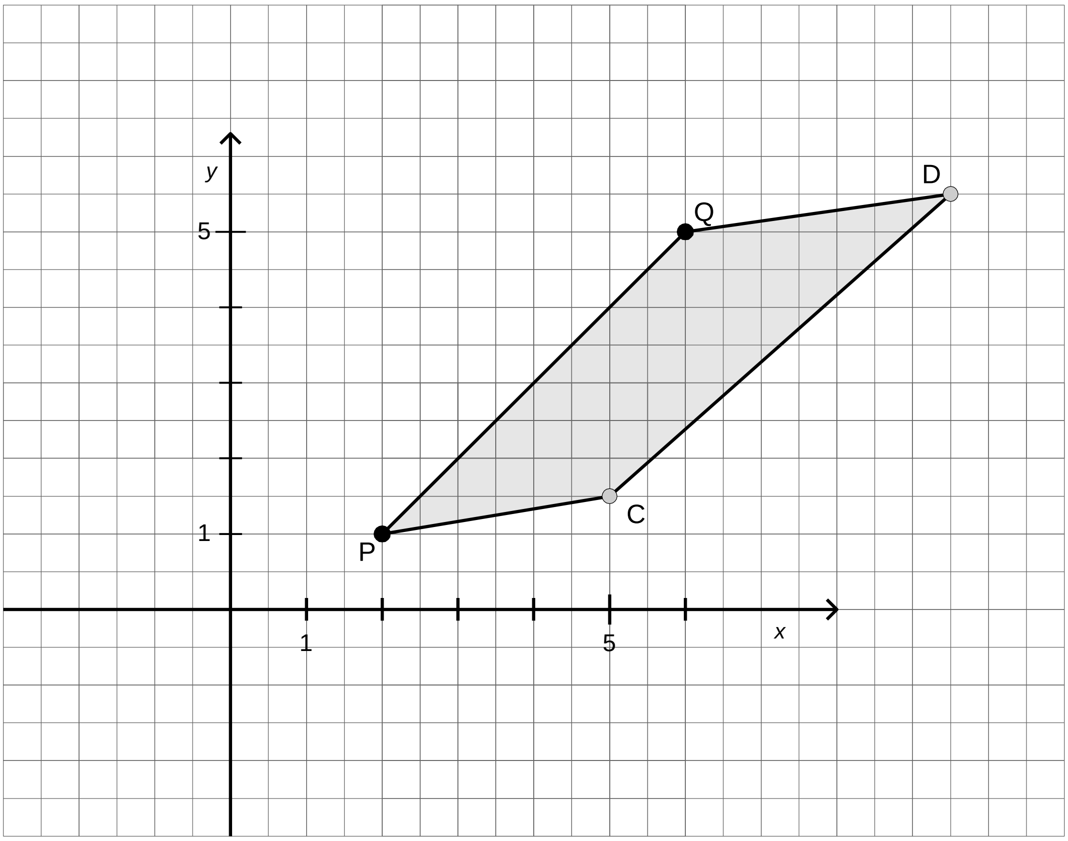
Möchte man erreichen, dass bei Lösungen dieser Art auch solche vorkommen, bei denen alle Eckpunkte Gitternetzpunkte sind, dann müssen der horizontale und der vertikale Abstand von P und Q Kathetenlängen eines pythagoreischen Tripels sein. Beispielsweise ergeben sich, wenn man $P(2|1)$ festhält, aus dem Tripel $(3;4;5)$ die Koordinaten $Q(6|4)$. Die kleinen Kreise markieren weitere Gitternetzpunkt, die als Ecken von Rechtecken in Frage kommen.



Parallelogramme

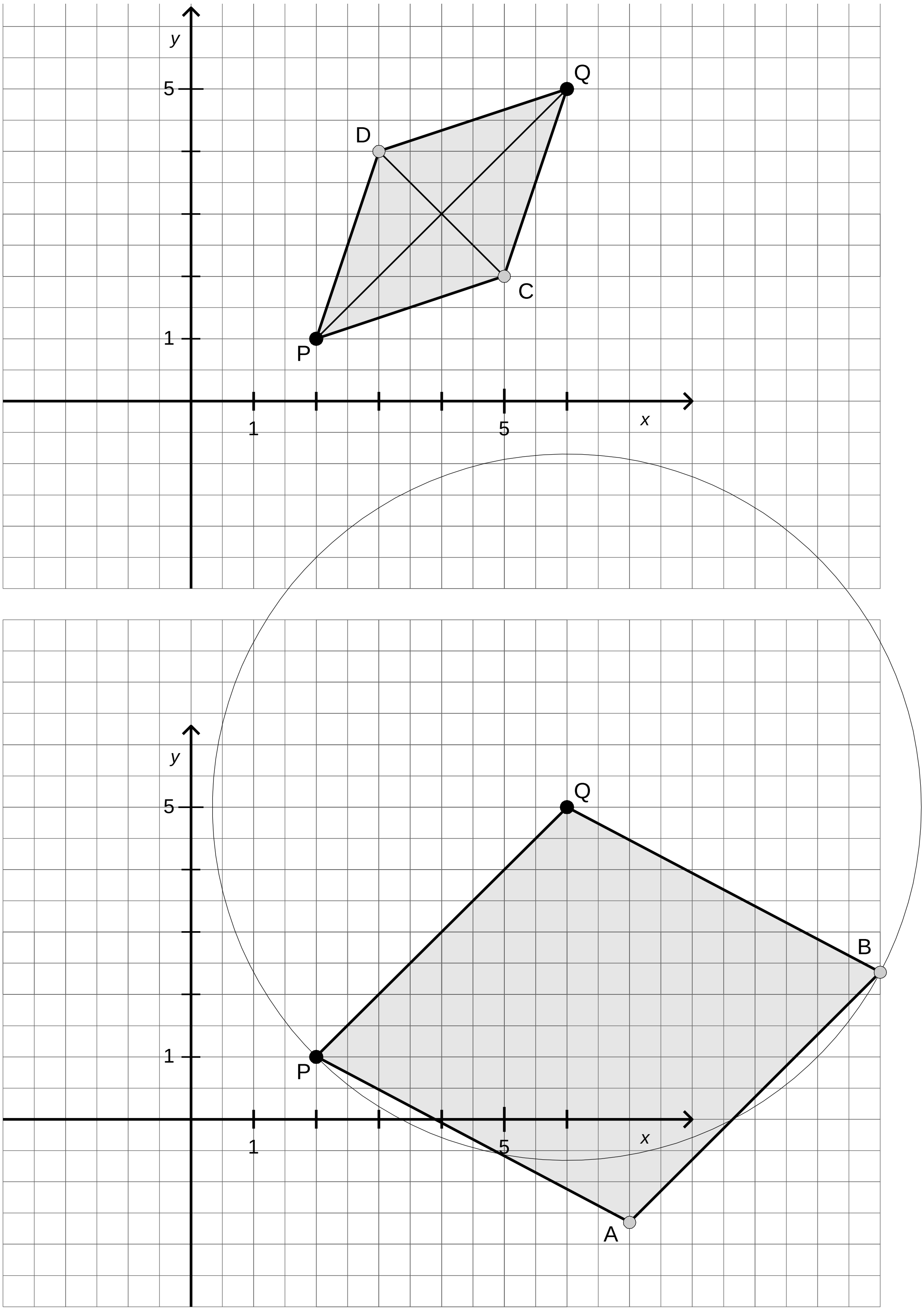
$\overline{PQ}$ kann eine Diagonale oder eine Seite des Parallelogramms sein. Die Seiten müssen nicht unbedingt achsenparallel sein. Außerdem sind alle oben dargestellten Rechtecke und Quadrate ebenfalls Parallelogramme.





Rauten

Wenn $\overline{PQ}$ eine Diagonale ist, gibt es Lösungen im Gitternetz (oberes Bild). Wenn $\overline{PQ}$ eine Seite des Parallelogramms sein soll, sind die einzigen Lösungen im Gitternetz die oben angegebenen Quadrate. Bei der unten angegebenen Raute, die kein Quadrat ist, sind A und B keine Gitternetzpunkte. Wenn A und B Gitternetzpunkte sein sollen, müssen die Koordinaten von Q mit Hilfe pythagoreischer Tripel gewählt werden.



Trapeze

$\overline{PQ}$ kann eine Diagonale oder eine Seite des Trapezes sein. Die Seiten müssen nicht unbedingt achsenparallel sein. Die Trapeze sind nicht gleichschenklig.