

Exemplarisch wird hier eine Unterrichtseinheit skizziert, wie sie Bestandteil des Schulinternen Fachcurriculum Mathematik sein könnte. Dieses soll dabei als ein mögliches Instrument der Unterrichtsentwicklung verstanden werden. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen aus Kapitel 2 dienen als Ausgangspunkt der Überlegungen. Durch eine entsprechende didaktisch-methodische Planung des Unterrichts werden in diesem allgemeine mathematische Kompetenzen (und natürlich auch die Selbst- und Sozialkompetenz) gezielt gefördert. Diese Kompetenzen werden zunächst auf der Grundlage der Orientierungshilfe G8 explizit ausgewiesen. Die folgende Tabelle gibt exemplarisch und schwerpunktmäßig (Bereich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen) die wesentlichen Aspekte der Unterrichtseinheit wieder – sie könnte Teil des Schulinternen Fachcurriculums Mathematik sein. Nach diesem Muster zusammengestellte Tabellen verschaffen einen Überblick über wesentliche Aspekte der Unterrichtseinheit. Gerade in Verbindung mit Materialhinweisen oder konkreten Materialien entlasten sie die Lehrkräfte bei ihrer zukünftigen Unterrichtsplanung.

Thema	Erarbeitung der Kongruenzsätze
Voraussetzungen	<ul style="list-style-type: none"> • Begriff der Kongruenz wurde bereits eingeführt • Die Standardbezeichnung für die 6 Bestimmungsstücke (3 Seiten und 3 Winkel) eines Dreiecks ist bekannt • ein fachsprachlicher Ausdruck für Konstruktionsbeschreibungen ist etabliert worden (siehe Anlagen)
Zeitraumen	<ul style="list-style-type: none"> • 3 – 4 Stunden
Zentrale prozessbezogene Kompetenzen	<ul style="list-style-type: none"> • Mathematische Probleme lösen (K2) Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> - reflektieren die Minimaleigenschaften und die Eindeutigkeit der Konstruktion - lösen Konstruktionsaufgaben • Kommunizieren und Argumentieren (K6 und K1) Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> - diskutieren Fragen nach der Konstruierbarkeit von Dreiecken - verarbeiten Dreiecks-Informationen sachgerecht in der Gruppe und geben diese weiter - verfassen einen Konstruktionstext nach determinierter Sprache
Inhaltsbezogene Kompetenzen aus Orientierungshilfe G8 Kapitel 2	<ul style="list-style-type: none"> • Raum und Form (L3): Dreiecksgeometrie Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> - kennen die elementargeometrischen Sätze und nutzen diese für Begründungen und zum Beweisen - konstruieren Figuren aus gegebenen Stücken • Messen (L2): Größen Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> - zeichnen Strecken und Winkel und schätzen und messen deren Größe
Methodische Schwerpunkte	<ul style="list-style-type: none"> • Leistungsgleiche Gruppenarbeit • Selbstständiges Arbeiten • Teamarbeit • Koordination in der Gruppe und zwischen den Gruppen • Offene Aufgabenstellung •
Differenzierung	<ul style="list-style-type: none"> • Siehe konkrete Aufgabenbeispiele • Hilfekarten bzw. Helfersysteme • Computereinsatz • Selbstregulierende Prozesse
Material	Siehe Anlagen

Thema	Erarbeitung der Kongruenzsätze
Anschluss	An die eben skizzierte Erarbeitung sollten sich Konstruktionsübungen (per Hand und mit einem dynamischen Geometrieprogramm) und Übungen zur Argumentation und Beweisen mit den Kongruenzsätzen anschließen. Gerade bei der Konstruktion am Computer ist eine binnendifferenzierte Arbeit der einzelnen Schülerinnen und Schüler sehr gut realisierbar, da diese unterschiedliche Aufgaben bearbeiten können (Möglichkeit des Einsatzes von elektronischen Arbeitsblättern) und durch das Geometriesystem eine direkte Rückmeldung über ihren Erfolg bei der Bearbeitung von Aufgaben bekommen.
Diagnose	Siehe Anlage

Skizze der Einheit mit einigen Materialien:

In dieser Unterrichtseinheit diskutieren die Schülerinnen und Schüler zunächst sehr eigenständig und durch Arbeit in Gruppen mit je 3 – 4 Personen, welche und wie viele von den sechs Bestimmungsstücken eines vorgegebenen Dreiecks man an eine andere Gruppe weitergeben muss, damit diese das Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig konstruieren kann. Nach der Weitergabe der ausgewählten Informationen (s. Organisationstabelle) wird dann die Konstruktion durch die empfangende Gruppe versucht, woraus sich evtl. eine Bestätigung der Auswahl oder aber neue Fragen ergeben wie:

- Kann man das Dreieck wirklich aus den gegebenen Stücken konstruieren?
- Reichen nicht auch weniger Stücke aus?
- Wie konstruiert man das Dreieck aus den gegebenen Stücken?
- Gibt es weitere Möglichkeiten einer geeigneten Auswahl der Stücke?

Durch die Wahl der Sozialform und die offene Aufgabenstellung werden Schülertätigkeiten initiiert, die die Kompetenzen des Kommunizierens, des Argumentierens und des Problemlösens weiterentwickeln.

In einer nächsten Phase werden die bisherigen Informationen zusammengetragen, indem Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse und Erfahrungen präsentieren. Es ist zu erwarten, dass hauptsächlich wsw- und sws-Vorschläge und -Konstruktionen gemacht werden und dass die Lernenden folgende Fragen aufwerfen und diskutieren:

- Reichen 3 gegebene Stücke immer aus?
- Ist es egal, welche 3 Stücke ausgewählt werden?
- Warum sind sich die Vorgaben b,a,c und a,b,c so ähnlich?
- Kann man auch eine sss-Konstruktion durchführen? Wenn ja, wie?
- ...

Nach bzw. während der Klärung dieser Fragen können dann die verschiedenen Konstruktionen klassifiziert und, für den Fall, dass ein Konstruktionstyp ein bis auf die Kongruenz eindeutiges Dreieck liefert, Kongruenzsätze für Dreiecke formuliert werden. Auf den Fall Ssw muss bei Bedarf gesondert eingegangen werden.

Schließlich bietet sich auch die Durchführung einer Schülerbefragung mit Hilfe eines Kompetenzrasters an:

Dieser exemplarische Diagnosebogen kann in der Einheit genutzt werden, um

- die Schülerinnen und Schüler zu einer Selbsteinschätzung der erworbenen Fähigkeiten anzuhalten
- den Schülerinnen und Schülern Hinweise für Hilfen und Übungsmaterialien bei individuellen Schwächen zu geben (individuelle Förderung)
- der Lehrkraft eine Rückmeldung über die Selbsteinschätzung der einzelnen Schülerinnen und Schüler zu geben. Diese kann nach Abgleich mit den eigenen Einschätzungen Grundlage für eine gezielte Förderung der Kompetenzen einzelner Schülerinnen und Schüler sein.

Dieser Bogen sollte daher nicht zur Benotung herangezogen werden.

Bitte schätze ehrlich ein, wie gut du die einzelnen Punkte aus deiner Sicht beherrschst. Sei bitte ehrlich, dieser Bogen wird nicht bewertet. In der letzten Spalte findest du Hinweise auf Hilfen und Übungsmaterialien.						
Inhalt	Ich ...	Trifft voll zu	Trifft teilweise zu	Trifft kaum zu	Trifft nicht zu	Bei Schwächen finde ich Hilfen
Dreiecks- geometrie • Kongruenz • Konstruktion von Dreiecken	<ul style="list-style-type: none"> • kann entscheiden, ob ein Dreieck aus gegebenen Stücken eindeutig konstruierbar ist 					Hier sollten den Schülerinnen und Schülern Hinweise zu passenden Hilfen/ Übungsmaterialien gegeben werden
	<ul style="list-style-type: none"> • kann die Dreieckskonstruktionen nach gegebenen Stücken (sss, sws, wsw, Ssw) per Hand durchführen 					
	<ul style="list-style-type: none"> • kann die Dreieckskonstruktionen mit Hilfe eines dynamischen Geometriesystems durchführen 					
	<ul style="list-style-type: none"> • kann die Dreieckskonstruktion mit Hilfe der Fachsprache beschreiben 					
	<ul style="list-style-type: none"> • kann anhand der Angabe von Größen der Stücke zweier Dreiecke entscheiden, ob diese Dreiecke kongruent zueinander sind. 					
	<ul style="list-style-type: none"> • ... 					

Materialien zur Gruppenarbeit, Kurzübersicht

Hier werden die Materialien zu o.g. Gruppenarbeit zusammengetragen. Eine solche Bereitstellung sollte innerhalb der Fachschaft zu Entlastungen führen, wenn alle Fachschaftsmitglieder über die Materialien verfügen und Experten (die die Einheit bereits durchgeführt haben) befragen können. Auch aus diesem Grund ist eine sorgfältige Dokumentation innerhalb des schulinternen Fachcurriculums Mathematik wichtig.

Gegeben werden 3 verschiedene Dreiecke I, II, III
Zuordnung der Dreiecke zu den Gruppen s. Organisationstabelle

Jede Gruppe erhält:

- 1 Aufgabenblatt mit 2 Informationszetteln
- 4 identische Dreiecke (Art siehe Organisationstabelle)
- 1 Blatt „Konstruktionsbeschreibungen“

Aufgabe einer Gruppe:

- gegebenes Dreieck vermessen (3 Seiten, 3 Winkel)
- Angaben auswählen und an eine andere Gruppe schicken, welche dann das Dreieck konstruieren soll
- selbst Dreieck aus Angaben einer anderen Gruppe konstruieren und Konstruktion mit eingeführter Sprache beschreiben
- danach: Überprüfung der Deckungsgleichheit mit Foliendreieck

Ziele (auch fernere) der Auswertung:

- Möglichkeiten der eindeutigen Beschreibung von Dreiecken erkennen
- Klassifikation sss, sws, wsw, Ssw
- Problematisierung Ssw
- Formulierung der Kongruenzsätze
- Konstruktionsbeschreibungen erstellen
- Konstruktionen (auch mit einem DGS) durchführen

Aufgabenstellung Gruppe Nr. ____:

Ziel ist es, die Größen ausgewählter Stücke des gegebenen Dreiecks ABC auszuwählen und an eine andere Gruppe zu schicken. Diese Gruppe soll dann aus euren Angaben ein zum gegebenen Dreieck kongruentes Dreieck zeichnen (konstruieren). Ihr selbst werdet ebenfalls von einer Gruppe Daten erhalten, aus denen ihr ein Dreieck konstruieren müsst.

Hier noch einmal die einzelnen Arbeitsschritte:

1. Messt alle Stücke des Dreiecks sehr genau aus (jeder misst einzeln, dann wird kontrolliert) und schreibt die Ergebnisse auf.
2. Diskutiert, wie viele und welche Stücke man der Gruppe ____ bekannt geben muss, damit diese ein zum gegebenen Dreieck kongruentes Dreieck zeichnen kann. Ihr sollt möglichst wenige Angaben machen. Wenn ihr euch geeinigt habt (es gibt mehrere Möglichkeiten, sucht eine aus!), schreibt ihr diese Stücke mit ihren Größen auf den Informationszettel unten und gebt diesen an Gruppe ____ weiter. Außerdem gebt ihr einen Infocettel an den Lehrer.
3. Nachdem ihr von der Gruppe ____ deren Informationszettel erhalten habt, versucht ihr nach deren Angaben das Dreieck zu konstruieren. Dazu schreibt jeder die Angaben in sein Heft und konstruiert alleine, dann wird verglichen. Sollte die Konstruktion aus den erhaltenen Angaben nicht (eindeutig) möglich sein, so könnt ihr die Gruppe ____ um weitere Informationen bitten. Zum Schluss fasst ihr in der Gruppe einen Text, der die Konstruktion des gesuchten Dreiecks beschreibt, beachtet dabei bitte unsere Vereinbarungen zum Ausdruck bei den Beschreibungen.

Informationszettel von Gruppe ____ an Gruppe ____:

Von unserem Dreieck geben wir euch die Größe der folgenden Stücke bekannt:

a	b	c	α	β	γ

Informationszettel von Gruppe ____ an den Lehrer:

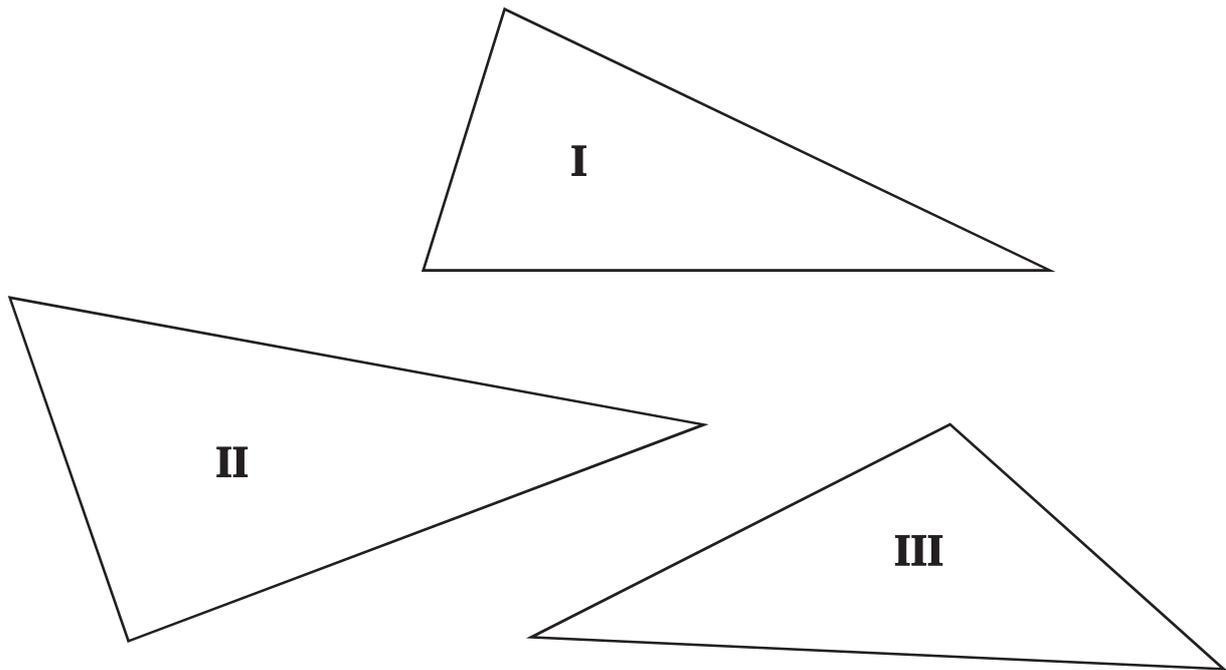
In unserer Gruppe arbeiten die folgenden Schülerinnen und Schüler:

1	
2	
3	
4	

Wir haben folgende Informationen an Gruppe ____ weitergegeben:

a	b	c	α	β	γ

Vorgegebene Dreiecke



Konstruktionsbeschreibungen

Hier findet ihr nochmals die vereinbarten Konstruktionschritte und die dazugehörigen Schaltflächen in unserem Geometrieprogramm. Bei der Beschreibung eurer Dreieckskonstruktion(en) sollt ihr euch an die vereinbarte Ausdrucksweise halten.

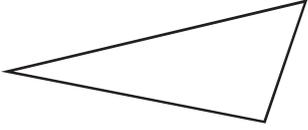
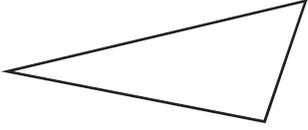
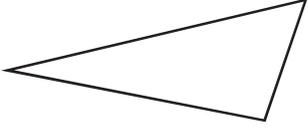
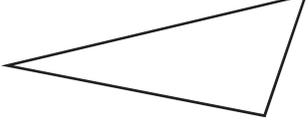
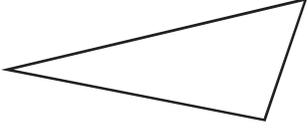
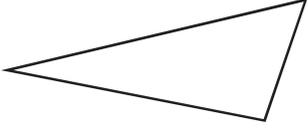
Nr.	Beschreibung	DGS-Schaltfläche	DGS-Konstruktionstext
1	Zeichne einen Punkt A auf der Zeichenfläche.		A ist ein freier Basispunkt
2	Zeichne zu zwei Punkten A und B die Strecke s (\overline{AB}).		s ist die Strecke [A ; B]
3	Zeichne eine Strecke s der Länge 4cm und nenne die Endpunkte der Strecke A bzw. B.		s ist eine Strecke der festen Länge 4 cm zwischen den Punkten A und B.
4	Zeichne zu zwei Punkten A und B die Gerade AB.		g ist die Gerade (A ; B)
5	Wähle einen Punkt C auf einer Linie.		C ist ein Basispunkt, der an g gebunden ist.
6	Zeichne einen Kreis k um den Mittelpunkt M, der durch A verläuft.		k ist ein Kreis um M durch A
7	Zeichne einen Kreis k mit dem Radius 5cm um den Mittelpunkt M.		k ist ein Kreis mit Radius 5 cm um M
8	Zeichne eine Gerade h durch A im Winkel der Weite 60° zur Geraden AB.		h ist eine Gerade durch A im Winkel der Weite 60° zur Geraden (A ; B)
9	Markiere den Schnittpunkt S (die Schnittpunkte X und Y) zweier Linien g und k.		S ist ein Schnittpunkt der Linie g mit der Linie k

Organisationstabelle (für die Hand der Lehrkraft)

Gruppe		Namen	Info an Gruppe	weitergegebene Informationen	Info von Gruppe	erhaltene Informationen
1	I		2		7	
2	II		3		1	
3	III		4		2	
4	I		5		3	
5	II		6		4	
6	III		7		5	
7	II		1		6	

Dieser Zettel dient der Übersicht, welche Gruppe welche Informationen an welche Gruppe weitergeben/von welcher Gruppe erhalten hat.

Ergebnisübersicht: Gruppenarbeit

Gruppe	weitergegebene Informationen	Skizze (soll visualisieren, welche Stücke weitergegeben wurden)	Typ
1	a, c, α , γ		
2	b, c, α		
3	a, β , γ		
4	a, c, β		
5	b, α , γ		
6	b, c, α		
7	a, b, α , β	