Beispielaufgabe ‚vier aufeinanderfolgende Zahlen' (Leitfaden S. 43)

Die Lehrkraft gibt acht Terme vor und stellt die Arbeitsaufträge „Berechne den Wert von mindestens drei Termen. Beschreibe und vergleiche die Terme."

$7+6+5-4$ $\quad 4\cdot(7-5)+6$ $\quad (4+6)\cdot 7:5$ $\quad (5-3)\cdot 4+6$

$8+7-6+5$ $\quad (6\cdot 7):(8-5)$ $\quad (6\cdot 5):3+4$ $\quad (6:3)\cdot 5+4$

Mögliche Ergebnisse: Alle Terme haben den Wert 14. Alle Terme enthalten vier aufeinanderfolgende Zahlen, aber nicht unbedingt in aufsteigender oder absteigender Reihenfolge. Einige beginnen bei 4, andere bei 5.

Anschließend nennt die Lehrkraft die Bedingung „im Wettbewerb um die Zahl 14 gewinnt der Term, der den Wert 14 mit den vier kleinsten aufeinanderfolgenden Zahlen darstellt" und zeigt ggf. einen Term, dessen Zahlen die der genannten Terme unterbieten. $2+3+4+5$

Die Lehrkraft hängt eine große Tabelle aus und eröffnet den Wettbewerb um die Werte 0 bis 100.

Stelle die Zahlen 0 bis 100 als Term aus vier möglichst kleinen aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen (einschließlich 0) dar. Du darfst die Rechenzeichen + **·** **:** und – sowie Klammern verwenden. Trage den Term und deinen Namen ein.

Wert Term	Name	Term	Name
0 =			
1 =			
2 =			
3 =			
4 =			

Die Aufgabe basiert auf dem Sachverhalt, dass sich jede natürliche Zahl als Term aus vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt. Dabei gewinnt $n=\frac{(n-1)+(n+1)}{n}+(n-2)$ jedoch i.A. nicht den Wettbewerb um die vier kleinsten Zahlen. Faires Verhalten in diesem Wettbewerb bedeutet, sich um das korrekte Anwenden der Rechengesetze zu bemühen. **Intentionen:** auf der grundlegenden Anforderungsebene Berechnen des Wertes von Termen unter Beachtung der Vorrangregeln, Aufstellen von Termen; auf den höheren Anforderungsebenen Beschreiben und Untersuchen sowie gezieltes Verändern von Termen. Druckvorlagen und eine ausführliche Musterlösung finden sich auf den folgenden Seiten.

Anmerkung: Im obigen Beispiel gewinnen die Terme $1\cdot 2+3\cdot 4$ und $1\cdot 2\cdot(3+4)$.

Material:

Die beiden Tabellen (siehe Seite 2 und 3) ausdrucken und auf DIN A 3 vergrößern.

Die Lehrkraft kann Kärtchen mit Termen so wie im obigen Einstiegsbeispiel vergrößert ausdrucken, siehe letzte Seite.

Klassenraumwettbewerb

Stelle die Zahlen 0 bis 100 als Term aus vier möglichst kleinen aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen (einschließlich 0) dar. Du darfst die Zeichen + · **:** und – sowie Klammern verwenden. Trage den Term und deinen Namen ein.

Term	Name	Term	Name
0 =			
1 =			
2 =			
3 =			
4 =			
5 =			
6 =			
7 =			
8 =			
9 =			
10 =			
11 =			
12 =			
13 =			
14 =			
15 =			
16 =			
17 =			
18 =			
19 =			
20 =			
21 =			
22 =			
23 =			
24 =			
25 =			
26 =			
27 =			
28 =			
29 =			
30 =			
31 =			
32 =			
33 =			
34 =			
35 =			
36 =			
37 =			
38 =			
39 =			
40 =			
41 =			
42 =			
43 =			
44 =			
45 =			
46 =			
47 =			

Term	Name	Term	Name
48 =			
49 =			
50 =			
51 =			
52 =			
53 =			
54 =			
55 =			
56 =			
57 =			
58 =			
59 =			
60 =			
61 =			
62 =			
63 =			
64 =			
65 =			
66 =			
67 =			
68 =			
69 =			
70 =			
71 =			
72 =			
73 =			
74 =			
75 =			
76 =			
77 =			
78 =			
79 =			
80 =			
81 =			
82 =			
83 =			
84 =			
85 =			
86 =			
87 =			
88 =			
89 =			
90 =			
91 =			
92 =			
93 =			
94 =			
95 =			
96 =			
97 =			
98 =			
99 =			
100 =			

Lösungen Angegeben ist jeweils ein Beispiel mit den kleinsten möglicher Zahlen.

0 = 0 · (1 + 2 + 3)		50 = (4 · 3 – 2) · 5
1 = (2 + 3) · 0 + 1		51 = (4 + 5) · 6 – 3
2 = 2 + (1 + 3) · 0		52 = (5 · 2 + 3) · 4
3 = 2 + 1 + 3 · 0		53 = (4 + 6) · 5 + 3
4 = 2 – 1 + 3 – 0		54 = (4 + 5) · 2 · 3
5 = 2 · 1 + 3 – 0		55 = (4 · 2 + 3) · 5
6 = 2 + 1 + 3 – 0		56 = (6 + 3 + 5) · 4
7 = 1 + 2 · 3 – 0		57 = 3 + (4 + 5) · 6
8 = (1 + 3) · 2 + 0		58 = 3 · 4 · 5 – 2
9 = 0 + 3 · (2 + 1)		59 = 7 · 5 + 4 · 6
10 = 1 + 2 + 3 + 4		60 = 5 · 4 · (6 – 3)
11 = 1 + 2 · 3 + 4		61 = 5 · (7 + 6) – 4
12 = 4 · 3 · (2 – 1)		62 = 5 · 4 · 3 + 2
13 = (1 + 2) · 3 + 4		63 = (6 + 8 – 5) · 7
14 = (4 + 3) · 2 · 1		64 = 2 · (3 + 5) · 4
15 = 1 + 2 + 3 · 4		65 = (3 + 4 + 6) · 5
16 = 4 · (3 + 2 – 1)		66 = 3 · (2 + 4 · 5)
17 = (1 + 4) · 3 + 2		67 = 4 · 6 · 3 – 5
18 = (1 · 2 + 4) · 3		68 = 4 · (2 + 3 · 5)
19 = 1 + (2 + 4) · 3		69 = (4 + 5) · 7 + 6
20 = 1 · (2 + 3) · 4		70 = (4 + 3) · 5 · 2
21 = (1 + 2) · (3 + 4)		71 = 5 + (4 + 7) · 6
22 = (3 · 4 – 1) · 2		72 = ((3 + 4) + 5) · 6
23 = 4 · 3 · 2 – 1		73 = 7 · (5 + 6) – 4
24 = 4 · 3 · 2 · 1		74 = 19 · 20 – 17 · 18
25 = 4 · 3 · 2 + 1		75 = (6 + 4) · 7 + 5
26 = 2 · (1 + 3 · 4)		76 = 6 · (5 + 7) + 4
27 = (2 · 4 + 1) · 3		77 = 5 + 4 · 6 · 3
28 = (3 · 2 + 1) · 4		78 = (6 · 5 – 4) · 3
29 = 2 + (5 + 4) · 3		79 = (21 – 18) · 20 + 19
30 = (1 + 4) · 2 · 3		80 = (6 + 4) · (3 + 5)
31 = (5 + 2) · 4 + 3		81 = (6 + 3) · (4 + 5)
32 = 2 · (3 + 1) · 4		82 = 6 · 7 + 8 · 5
33 = (2 + 4 + 5) · 3		83 = 6 · 8 + 7 · 5
34 = 2 · (5 + 4 · 3)		84 = (5 + 2) · 4 · 3
35 = 3 · (6 + 4) + 5		85 = (6 + 7 + 4) · 5
36 = (1 + 2) · 3 · 4		86 = 6 · 3 · 5 – 4
37 = (4 + 3) · 5 + 2		87 = (6 · 4 + 5) · 3
38 = (5 · 3 + 4) · 2		88 = 6 · (7 + 9) – 8
39 = (2 · 4 + 5) · 3		89 = 7 · (6 + 8) – 9
40 = (2 + 3 + 5) · 4		90 = 5 · (4 + 2) · 3
41 = (3 + 4) · 5 + 6		91 = 8 – 7 + 9 · 10
42 = 3 · (4 + 5 · 2)		92 = (6 · 3 + 5) · 4
43 = 3 + 4 · 5 · 2		93 = (6 + 8) · 7 – 5
44 = (3 · 2 + 5) · 4		94 = 6 · 3 · 5 + 4
45 = (4 + 5) · (3 + 2)		95 = 6 · (7 + 8) + 5
46 = (4 · 5 + 3) · 2		96 = (5 + 4 + 7) · 6
47 = 6 · (3 + 4) + 5		97 = 6 + 7 · (8 + 5)
48 = (2 + 4) · (5 + 3)		98 = (5 · 4 – 6) · 7
49 = (2 + 5) · (4 + 3)		99 = (6 + 7) · 8 – 5
		100 = 5 · 4 · (3 + 2)

weitere Erkenntnisse und allgemeingültige Terme

Summen

Ab 6 ist jede vierte Zahl als Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellbar: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4\cdot n+6$. Jedoch erfüllen die so entstehenden Lösungen meist nicht die Forderung nach den kleinsten vier aufeinanderfolgenden Zahlen. Die ersten Zahlen, bei denen diese vier Zahlen die kleinste Möglichkeit darstellen, sind 6, 10 und 74. Allerdings gibt es neben der Summe der vier auch immer noch andere Möglichkeiten.

n	$4\cdot n+6$			
0	6	=	2 + 1 + 3 – 0	= 2 · 3 + 1 · 0
1	10	=	1 + 2 + 3 + 4	= 3 · 4 – 2 · 1
17	74	=	17 + 18 + 19 + 20	= 19 · 20 – 17 · 18

Nur bei 74 und 79 sind im Vergleich zur Umgebung die vier aufeinanderfolgenden Zahlen auffallend groß.

eine allgemeingültige Lösung

Jede Zahl n lässt sich durch den Term $\frac{(n-1)+(n+1)}{n}+(n-2)$ aus den vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $(n-2)$, $(n-1)$, n und $(n+1)$ darstellen, denn $\frac{(n-1)+(n+1)}{n}+(n-2)=\frac{2n}{n}+(n-2)=2+(n-2)=n$. Die kleinste mögliche Lösung ergibt sich mit dieser Formel jedoch nur bei der Zahl $\frac{1+3}{2}+0=2$.

der jeweils größte Term

Ab $n=2$ ist der größte Term, der sich aus vier aufeinanderfolgenden natürliche Zahlen bilden lässt, deren Produkt $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$.

Für $n=0$ muss die 0 durch Addieren unschädlich gemacht werden. Hier lohnt es sich, die 1 nicht als Faktor zu verschwenden, sondern mit ihrer Hilfe durch Addieren die kleinere der beiden anderen Zahlen zu vergrößern. Es gewinnt der Term $n+(n+1+n+2)\cdot(n+3)$.

Für $n=1$ vergrößert man ebenfalls mit Hilfe der 1 durch Addieren die kleinste der drei anderen Zahlen; es gewinnt der Term $(n+n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$.

n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$	$n+(n+1+n+2)\cdot(n+3)$	$(n+n+3)\cdot(n+1)\cdot(n+2)$	$(n+n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$	$(n+n+2)\cdot(n+1)\cdot(n+3)$	$n\cdot(n+1+n+2)\cdot(n+3)$	$n\cdot(n+1+n+3)\cdot(n+2)$
0	1	2	3	0	**9**	6	6	6	0	0
1	2	3	4	24	21	30	**36**	32	20	18
2	3	4	5	**120**	37	84	100	90	70	64
3	4	5	6	**360**	57	180	210	192	162	150
4	5	6	7	**840**	81	330	378	350	308	288
5	6	7	8	**1680**	109	546	616	576	520	490
6	7	8	9	**3024**	141	840	936	882	810	768
7	8	9	10	**5040**	177	1224	1350	1280	1190	1134

$$7+6+5-4$$

$$4\cdot(7-5)+6$$

$$(4+6)\cdot 7:5$$

$$(5-3)\cdot 4+6$$

$$8+7-6+5$$

$$\boxed{(6 \cdot 7) : (8 - 5)}$$

$$\boxed{(6 \cdot 5) : 3 + 4}$$

$$\boxed{(6 : 3) \cdot 5 + 4}$$

$$\boxed{2 + 3 + 4 + 5}$$

$$\boxed{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4}$$

$$\boxed{1 \cdot 2 \cdot (3+4)}$$