Ursula BICKER, Bad Kreuznach

Produktives Üben und Argumentieren mit dem Pascal-Dreieck

Das Pascal-Dreieck regt auf verschiedenen Klassenstufen zu mathematischen Forschungen an. Die meisten Entdeckungen lassen sich auf einfache und elementare Weise erklären (ohne abstrakte Sprache oder mathematische Formeln). Beim Entdecken der Muster und Phänomene müssen oftmals elementare Rechenarten angewendet werden, ganz im Sinne produktiver Übungseinheiten.

Zahlen mauern – das Bauprinzip des Pascal-Deiecks

Da aus der Grundschule Zahlenmauern bekannt sind, wird bei Betrachtung des Dreiecks in der Regel sehr schnell und meist eigenständig das Bauprinzip des Pascal-Dreiecks entdeckt: Die Zahlen entstehen jeweils als Summe der beiden darüber stehenden Zahlen. Dies ist eine sehr wichtige Erkenntnis, die bei vielen der nachfolgenden Entdeckungen eine tragfähige Begründung liefert. Eine weitere elementare und hilfreiche Entdeckung ist die Symmetrie, mit der man sich etwa Rechnungen ersparen kann („symmetrisches Ausfüllen“).

Muster entdecken - Zahlenfolgen im Pascal-Deieck

Als erste Zahlenfolge werden die natürlichen Zahlen neben den Einserreihen entdeckt; damit ist das Augenmerk auf die Diagonalreihen gerichtet. Für die beiden folgenden Zahlenreihen lassen sich geometrische Veranschaulichungen finden: Die dritte Diagonalreihe 1, 3, 6, 10, ... enthält die Dreieckszahlen, die Folge daneben 1, 4, 10, 20, ... sind die Tetraederzahlen. Bei den Dreieckszahlen lässt sich das Bildungsmuster herausarbeiten; sie entstehen sukzessive durch Addition der natürlichen Zahlen 1+2+3+4+ ... , entsprechend der Vorstellung eines Dreiecks als Punktmuster.

Ein Verfahren, mit dem man die Bildungsmuster vieler Zahlenreihen entschlüsseln kann, ist das Differenzenprinzip. So haben etwa die Tetraederzahlen als Differenz die Dreieckszahlen. Da die Tetraeder durch Aufeinanderlegen der verschiedenen Dreiecksschichten entstehen, ist dies eine geometrische Veranschaulichung des Additionsprinzips.

Addiert man die Zahlen, die in einer Querreihe stehen, so erhält man die Zweierpotenzen. Auch dies lässt sich mit dem Bauprinzip des Pascal-Dreiecks begründen: Jede Zahl aus der oberen Reihe fließt bei der Summenbildung aus der oberen Reihe zweimal in die untere Reihe, nämlich nach rechts und nach links. Da die Reihe der Quer-Summen mit 1 bzw. 2 anfängt, ergeben sich so die Zweierpotenzen. Eine direkte Erklärung für die Zweierpotenzen als Summe der Zahlen in einer Reihe ergibt sich erst bei kombinatorischer Sichtweise (s.u.).

Mit den Querreihen lässt sich noch eine andere Zahlenfolge entdecken: Die Reihen, in denen alle Zahlen (außer den beiden Rand-Einsen) durch die Zahl neben der 1 teilbar sind, sind genau die Primzahl-Reihen. Eine Begründung ist hier auf elementare Weise nicht möglich.

Dreiecksmuster finden – Anwenden von Teilbarkeitsregeln

Zunächst wird eine Startzahl Z gewählt – am einfachsten 2, 5 oder 3, es gehen aber auch alle anderen Zahlen. Alle Felder, in denen die Zahl im Pascal-Dreieck durch Z teilbar ist, werden dann farbig markiert. Da die Zahlen in den unteren Reihen schnell groß werden, ist dies eine gute Übung zur Anwendung der Teilbarkeitsregeln. Als Muster finden die Schüler – unabhängig von der Startzahl – verschieden oder gleich große, nach unten gerichtete Dreiecke. Dies lässt sich begründen mit der „Summenregel" für die Teilbarkeit: Wenn zwei Zahlen durch eine bestimmte Zahl teilbar sind, dann ist auch deren Summe durch diese Zahl teilbar. Sobald also mehrere Zahlen nebeneinander durch dieselbe Zahl teilbar sind, entstehen wegen des additiven Bauprinzips automatisch nach unten hin geschlossene Dreiecke. Und wegen der Symmetrie des Pascal-Dreiecks ergeben sich ästhetische und regelmäßige Muster aus größeren und kleineren Dreiecken.

Wege laufen – Kombinatorik und strategisches Probieren

Der schönste – weil experimentelle – Zugang zum Pascal-Dreieck geht von einem 5x5-Geo-Brett aus, das diagonal hingelegt wird. Mit einem Faden sollen von oben an alle möglichen Wege gespannt werden, die zu einem bestimmten Nagel führen. Um alle 25 Nägel mit der entsprechenden Anzahl an Möglichkeiten beschriften zu können, sind zugrunde liegende Muster und Prinzipien hilfreich. Naheliegend ist das Symmetrieprinzip, das darauf beruht, dass beim Fadenspannen die Wege nach rechts und links vertauscht werden. Auch der Einser-Rand ist schnell einsichtig.

Eine effektive Lösungsmethode zum Finden aller Möglichkeiten ist das Rückwärtsarbeiten, indem man sich überlegt, von welchen Nägeln aus man auf den gewünschten Nagel kommt. Dies sind offensichtlich gerade die beiden diagonal darüber stehenden Nägel, so dass sich die Anzahl der möglichen Wege als Summe der Wege zu den beiden darüberstehenden Nägeln ergibt (Additionsprinzip). Insgesamt kann so die erstaunliche Entdeckung gemacht werden, dass jede Zahl im Pascal-Dreieck genau mit der Anzahl der Wege übereinstimmt, die zu ihr hinführen.

Eine klassische Einkleidung dieser Aufgabe ist das Stadtplanproblem – in einem (rechteckigen) Stadtplangitter, wie es idealerweise in Mannheim vorliegt, soll die Anzahl der Wege zu einem bestimmten Ziel hin gefunden werden. Das gleiche Prinzip liegt ebenfalls beim Galton-Brett vor – mit dem Nachteil, dass die Kugeln zu schnell fallen, um wirklich verfolgt werden zu können. Der Vorteil des Galton-Brettes ist, dass es eine elementare Erklärung liefert für die Zweierpotenzen als Quersummen der Zahlen in einer Reihe. Beim Durchlaufen der Kugeln gibt es an jeder Stelle zwei Alternativen, nämlich den Weg nach rechts oder nach links; insgesamt gibt es damit in n Reihen insgesamt 2^n Möglichkeiten, unten anzukommen.

Um ein Verständnis für das kombinatorische Bauprinzip des Pascal-Dreiecks zu gewinnen, sollte der Zusammenhang mit einem Baumdiagramm erarbeitet werden. Mehrere Wege, die zu jeweils gleichen Ergebnissen führen, werden dabei zusammengezogen. Ein Anwendungsbeispiel ist das Mischen von zwei Farben (z.B. rot und blau) in mehreren Durchgängen. Werden die Farben rot und blau durch die Variablen a und b ersetzt, erhält man im Pascal-Dreieck die Binomischen Formeln. Interpretiert man „blau“ und „rot“ durch „rechts“ und „links“, so simuliert man das Durchlaufen der Kugeln beim Galton-Brett. Und schließlich lassen sich auch die Lottozahlen im Pascal-Dreieck finden. Dazu werden die beiden Farben durch die Antworten „ja“ und „nein“ in der folgenden Situation ersetzt. In der Ebene 1 wird gefragt: Nimmst du die Zahl 1? In der nächsten Ebene wird gefragt, ob man die 2 nimmt, dann die 3 usw.. . Auf diese Weise kann verstanden werden, dass das Pascal-Dreieck die Anzahl der Möglichkeiten für „n aus k“ enthält. Dass dahinter die Binomialkoeffizienten stecken, wird dagegen nicht unmittelbar klarer.

Vielfache suchen - Multiplikation im Pascal-Dreieck

Überraschend einfach und spannend ist die Untersuchung von Mustern mit Hilfe der Multiplikation. Zunächst werden benachbarte Zahlen gesucht, von denen die rechte Zahl ein ganzzahliges Vielfaches der linken Zahl ist. Der reine Übungseffekt dieser Aufgabe ist nicht zu unterschätzen, da die Zahlen ja doch recht groß werden. Spannend wird es dann, wenn Muster entdeckt werden. Sie sind nicht unbedingt gut zu finden, weil sich die einzelnen Muster überlagern. Systematisch können sie entlang der Diagonalreihen gefunden werden.

In der ersten Doppelreihe (1 – 1, 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5, ...) treten der Reihe nach alle Vielfachen auf. In der zweiten Doppelreihe (3 – 3, 4 – 6, 5 – 10. 6 – 15, ...) kommen die Vielfachen jeweils in Zweiersprüngen vor. In der nächsten Doppelreihe (beginnend bei 10 – 10) braucht man bereits Dreiersprünge usw.

Brüche entdecken - Abzählbarkeit

Was passiert zwischen den einzelnen ganzzahligen Vielfachen? Hier erhält man ein hervorragendes Übungsfeld zum Rechnen mit Brüchen, insbesondere Grundaufgaben sowie Erweitern und Kürzen. Untersucht man die diagonale Doppelreihe mit den Zweiersprüngen, so erkennt man sehr schnell das zugrundeliegende Muster: Die rechte Zahl entsteht aus der linken jeweils durch Multiplikation mit 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, usw. Die Doppelreihe mit den Dreiersprüngen führt auf die Multiplikation mit 1, 4/3, 5/3, 2 = 6/3, 7/3, 8/3, 3 = 9/3, usw. Das Muster lässt sich auch in den folgenden Reihen (Viertel, Fünftel usw.) bestätigen. Man findet so tatsächlich alle Brüche im Pascal-Dreieck – jeweils zwischen zwei Zahlen als deren Multiplikationsfaktor.

Bisher haben wir nur Brüche größer als 1 entdeckt. Aber wenn man die Doppelreihen schräg nach oben fortsetzt, dann stimmt das Bild: In der Doppelreihe mit den Dritteln finden wir nach oben fortgesetzt 2/3 und 1/3, bei den Vierteln sind es die fehlenden ¾, 2/4 und ¼ usw.

Dies bedeutet, dass tatsächlich alle Brüche im Pascal-Dreieck vorkommen! Wenn man sie aufzählen will, so ist die naheliegendste Vorgehensweise reihenweise von oben nach unten... und damit lässt sich mit dem Pascal-Dreieck auch die Abzählbarkeit der Brüche veranschaulichen. Diese Aufzählung entspricht im Verlauf genau der Reihenfolge beim Cantorschen Diagonalverfahren.

Formel finden – Binomialkoeffizienten als explizite Terme für die Zahlen im Pascal-Dreieck

Alternativ zu der oben beschriebenen Vorgehensweise gibt es einen anderen attraktiven Zugang, der zu den Brüchen führt; hierbei werden die Querreihen betrachtet. Geeignet für den Anfang ist die folgende Reihe: 1 6 15 20 15 6 1.

Mit welcher Zahl muss jeweils multipliziert werden, um von einer Zahl zur nächsten Zahl zu kommen? Diese Reihe ist für die Entdeckung des Zahlenmusters geeignet, weil nach Kürzen die Zahlen in einer geeigneten Form erscheinen (6/1, 5/2, 4/3, ¾, 2/5, 1/6), um das zugrundeliegende Muster zu entdecken: Von links nach rechts wird der Zähler jeweils um 1 erniedrigt, der Nenner jeweils um 1 erhöht.

Dieses Zahlenmuster lässt sich auch in den anderen Reihen wiederfinden, dort müssen die Zahlen für die Multiplikation manchmal geschickt erweitert werden. Ein Nachvollziehen des Musters ist so auch in den oberen Reihen möglich, die Entdeckung des Musters ist dort aber praktisch unmöglich, weil die Zahlen durch Kürzen verfremdet sind.

Mit diesem Muster hat man ein neues Bauprinzip des Pascal-Dreiecks entdeckt. Es ist im Vergleich zum Additionsprinzip sicherlich komplizierter, hat aber den Vorteil, dass man damit jede beliebige Zahl direkt berechnen kann. So ergibt sich etwa die 5. Zahl in der Reihe mit 11 durch

1 * 11/1 * 10/2 * 9/3 * 8/4 – d.h. durch 11*10*9*8 / 1*2*3*4.

D.h. hier werden die Binomialkoeffizienten als Bauprinzip entdeckt – und außerdem der Vorteil einer direkten Berechnungsmöglichkeit (gewissermaßen einer „Formel“ für die Zahlen im Pascal-Dreieck) im Vergleich zu dem rekursiven Additionsprinzip.

Eine weitere frühere Entdeckung lässt sich jetzt ebenfalls elementar begründen, nämlich die Primzahleigenschaft: In Reihen, die mit einer Primzahl anfangen (neben der Rand-1), sind alle Zahlen in dieser Reihe durch diese Primzahl teilbar. Schauen wir uns exemplarisch das Bildungsgesetz der Zahlen in der Reihe mit 11 an. Gerechnet wird 11 * 10 * 9 * 8 * 7 *.../ 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * ...

Die Zahl 11 im Zähler kann nicht gekürzt werden, da die 11 als Primzahl keine der kleineren Zahlen im Nenner als Teiler hat. Daher bleibt der Faktor 11 in allen Zahlen der Reihe erhalten (außer bei der 1 am rechten Rand, da kürzt er sich mit der 11 im Nenner weg). In Reihen mit Nicht-Primzahlen wird die erste Zahl irgendwann durch einen ihrer Teiler teilweise gekürzt.