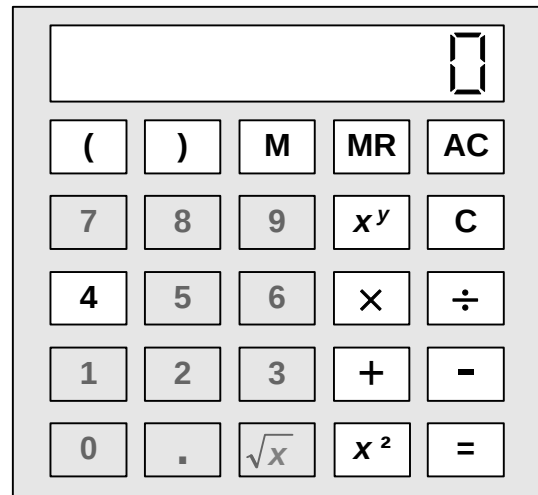


Vier Vieren, vier Zweien und andere Denkaufgaben zu Zahlentermen

Die folgenden Rätsel eignen sich zum produktiven Üben, weil Probleme vorliegen, die vielfältige Fähigkeiten fördern und entsprechende Tätigkeiten verlangen: Das Rechnen mit Zahlen, den Umgang mit Termen und „Vorfahrtsregeln“, das kreative und das systematische Suchen – und schließlich das Begründen. Mathematisch betrachtet geht es um Existenzbeweise und um Beweise der Nichtexistenz. Letztere lassen sich nur zum Teil vollständig erbringen, dennoch lohnt es sich, damit das Argumentieren zu üben.

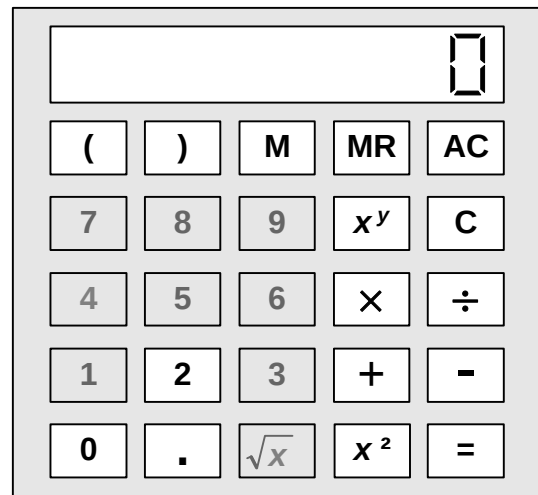
Vier Vieren

Stelle mit vier Vieren und den dir bekannten Rechenzeichen die Zahlen von 0 bis 9 dar.¹



Vier Zweien

Die Zahlen von 0 bis 9 und darüber hinaus lassen sich mit vier Zweien und den dir bekannten Rechenzeichen darstellen. Bei welcher Zahl werden aber erstmals fünf Zweien benötigt?²



¹ Quelle: DRÜKE-NOE, CHRISTINA und LEIß, DOMINIK, Standard-Mathematik von der Basis bis zur Spitze – Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht, Hessisches Institut für Qualitätsentwicklung, Wiesbaden 2005

² Nach: Mit Witz und Grips – aus der Denksport-Ecke der Sunday Times, dtv, München 1983. Es sind Dezimalbrüche zugelassen wie z.B. 0,2.

Lösungen

Vier Vieren

$0 = 4 + 4 - 4 - 4$ $= 4 + 4 - (4 + 4)$ $= 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4$ $= 4 : 4 - 4 : 4$ $= 4 - 4 - (4 - 4)$	$1 = 4 : 4 + 4 - 4$ $= 4 \cdot 4 : (4 \cdot 4)$ $= (4 : 4) \cdot (4 : 4)$ $= (4 + 4 - 4) : 4$	$2 = 4 : 4 + 4 : 4$ $= 4 \cdot 4 : (4 + 4)$
$3 = (4 + 4 + 4) : 4$ $= (4 \cdot 4 - 4) : 4$	$4 = (4 - 4) \cdot 4 + 4$ $= (4 - 4) : 4 + 4$	$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$
$6 = (4 + 4) : 4 + 4$	$7 = 4 + 4 - 4 : 4$ $= -4 : 4 + 4 + 4$ (mit Vorzeichen)	$8 = 4 + 4 + 4 - 4$ $= 4 \cdot 4 - 4 - 4$ $= (4 + 4) : 4 \cdot 4$
$9 = 4 : 4 + 4 + 4$		

Anmerkung: Lässt man auch Zahlen wie 44 zu, so ergeben sich weitere Lösungen wie z.B. $7 = 44 : 4 - 4$

Vier Zweien

Alle Terme für die 0 und für die 1 sind bei den Zweien analog zur 4, siehe oben.

$1 = (2 : 2) \cdot (2 : 2)$	$2 = (2 : 2) + (2 : 2)$	$3 = 2 + 2 - (2 : 2)$	$4 = 2 + 2 + 2 - 2$
$5 = (2 : 2) + 2 + 2$	$6 = 2 \cdot (2 + 2) - 2$	$7 = 2 : (2 \cdot 0,2) + 2$	$8 = 2 + 2 + 2 + 2$
$9 = (22 : 2) - 2$	$10 = (2 : 2) \cdot (2 : 0,2)$	$11 = (2 : 2) + (2 : 0,2)$	$12 = 22 - (2 : 0,2)$
$13 = (22 : 2) + 2$	$14 = 2 + 2 + (2 : 0,2)$	$15 = (2 + (2 : 2)) : 0,2$	$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Für die 17 ist eine fünfte Zwei notwendig, z.B. $22 - (2 : 2) : 0,2$ oder $22 - (2 : 0,2) : 2$. Das ist kein Beweis, dass es mit vier Zweien nicht geht. Jedoch lassen sich Teilbegründungen angeben. Dazu betrachtet man die Bausteine der Terme wie $2 \cdot 2$ oder $2 : 2$, die nur bestimmte Teilergebnisse zulassen und eine bestimmte Zahl von Zweien verbrauchen.

Für die 18 geht es wieder mit vier Zweien, nämlich $22 - 2 \cdot 2$.

Ähnliche Probleme

Eine ergiebige Fundgrube für Zahlenspielereien, Rätsel, Zaubertricks und zahlentheoretische Sachverhalte ist das Buch „Sonderlinge im Reich der Zahlen“ von WALTER LIETZMANN³. Als kleiner Ausschnitt, z.B. als ergänzendes oder differenzierendes Material zu den beiden vorgestellten Aufgaben seien die Darstellungen der Zahl 100 zitiert. An dieser Stelle muss jedoch eine Warnung ausgesprochen werden: Bitte quälen Sie Ihre Klasse nun nicht wochenlang mit Zahlenrätseln anstelle des sonst üblichen Quälens mit Buchstabentermen.

³ LIETZMANN, W., Sonderlinge im Reich der Zahlen, Dümmler, Bonn 1954

Hier gilt wie bei den Unterrichtsmethoden: mit einer gesunden, abwechslungsreichen Mischkost lebt es sich besser.

Darstellungen der Zahl 100

Schreibe die Zahl 100 als Rechenausdruck

mit lauter Einsen,

mit lauter Dreien,

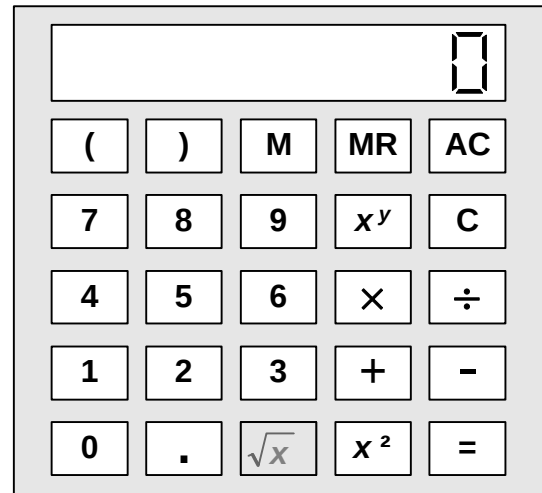
mit lauter Fünfen,

mit lauter Neunen,

mit den Ziffern von 1 bis 9, wobei jede nur einmal vorkommen darf.

mit den Ziffern von 0 bis 9, wobei jede nur einmal vorkommen darf.

Anstelle der 100 nimmt man auch gern die aktuelle Jahreszahl; unser Berufsstand begrüßt auf diese Weise gern das neue Jahr.



Darstellungen der Zahl 100 – Lösungen

$$100 = 111 - 11$$

$$100 = 3 \cdot 33 + 3 : 3$$

$$100 = (5 + 5) \cdot (5 + 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = (5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5 = (5 + 5) \cdot 5 + (5 + 5) \cdot 5$$

$$100 = 99 + 9 : 9 = 9 \cdot 9 + 9 + 9 + 9 : 9$$

$$100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$$

$$100 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 6 + 7 + 8 \cdot 9$$

$$100 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9$$

$$100 = 1 \cdot 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9$$

$$100 = 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9$$

$$100 = 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$$

$$100 = 123 + 4 - 5 + 67 - 89$$

$$100 = 123 + 45 - 67 + 8 - 9$$

$$100 = 123 - 45 - 67 + 89$$

$$100 = 98 - 76 + 54 + 3 + 21$$

mit Potenzen

$$100 = 1 - 2 + 3^4 + 5 \cdot 6 + 7 - 8 - 9$$

$$100 = 1 + 2^3 - 4 + 5 \cdot 6 - 7 + 8 \cdot 9$$

mit negativen Zahlen

$$100 = (1 + 2 - 3 - 4) \cdot (5 - 6 - 7 - 8 - 9)$$

mit der Zahl oder Ziffer 0

$$100 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6$$

$$100 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 - 7 - 8 - 9 + 10$$

$$100 = 9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 - 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0$$