Ablauf:

1. Stunde	Gemeinsame Einstiegsaufgabe
2. Stunde	Stammgruppenaufgaben 4 Stammgruppen (a 4 bis 6 Schüler) Jedes Gruppenmitglied erhält eine unterschiedliche Aufgabe A, B, C, D → in EA zu bearbeiten Bei größeren Schülergruppen sind ergänzend Aufgaben E, F, G möglich oder Aufgaben A, B, C, D teilweise doppelt zu vergeben
3. + 4. Stunde	Expertenaufgabe 4 Expertengruppen: A, B, C, D → diejenigen Schüler, die dieselbe Aufgabe bearbeitet haben: Vergleichen + Austausch zur bearbeiteten Aufgabe Plakat erstellen
5. Stunde	Stammgruppenaufgabe Stammgruppe trifft sich zum Museumsrundgang Experte erklärt jeweils sein Plakat
6. Stunde	Expertenaufgabe Klärung, ob fremde Themen verstanden wurden Präsentation eines fremden (vom Lehrer bestimmten) Themas im Plenum
Vertiefung	Übungsaufgaben 1 bis 3
Literatur	Themenheft: „Funktionen mit Parametern, Kurvenscharen“, Klett Verlag, Stuttgart 2003

LÖSUNG: Einstiegsaufgabe

a) Alle Graphen sind nach unten geöffnete Parabeln

b)

v_0 in m/s	20	40	60	80	100
h_{max} in m	20	80	180	320	500
t_{max} in s	2	4	6	8	10
t_{gesamt} in s	4	8	12	16	20

c) Aus der Tabelle ist zu entnehmen, dass Höhen von 400 bis 500 m bei Anfangsgeschwindigkeiten von etwa 90 m/s bis 100 m/s erreicht werden.

d) Maximum der Funktion h:
$h'(t) = v_0 - 10\,t$
$h'(t) = 0$
$\rightarrow t_{max} = v_0 / 10$

t_{max} in h eingesetzt liefert:
$h_{max} = v_0^2/20$

Für die gesamte Flugzeit gilt:
$t_{gesamt} = 2 \cdot t_{max}$

LÖSUNG: Einstiegsaufgabe

a) Alle Graphen sind nach unten geöffnete Parabeln

b)

v_0 in m/s	20	40	60	80	100
h_{max} in m	20	80	180	320	500
t_{max} in s	2	4	6	8	10
t_{gesamt} in s	4	8	12	16	20

c) Aus der Tabelle ist zu entnehmen, dass Höhen von 400 bis 500 m bei Anfangsgeschwindigkeiten von etwa 90 m/s bis 100 m/s erreicht werden.

d) Maximum der Funktion h:
$h'(t) = v_0 - 10\,t$
$h'(t) = 0$
$\rightarrow t_{max} = v_0 / 10$

t_{max} in h eingesetzt liefert:
$h_{max} = v_0^2/20$

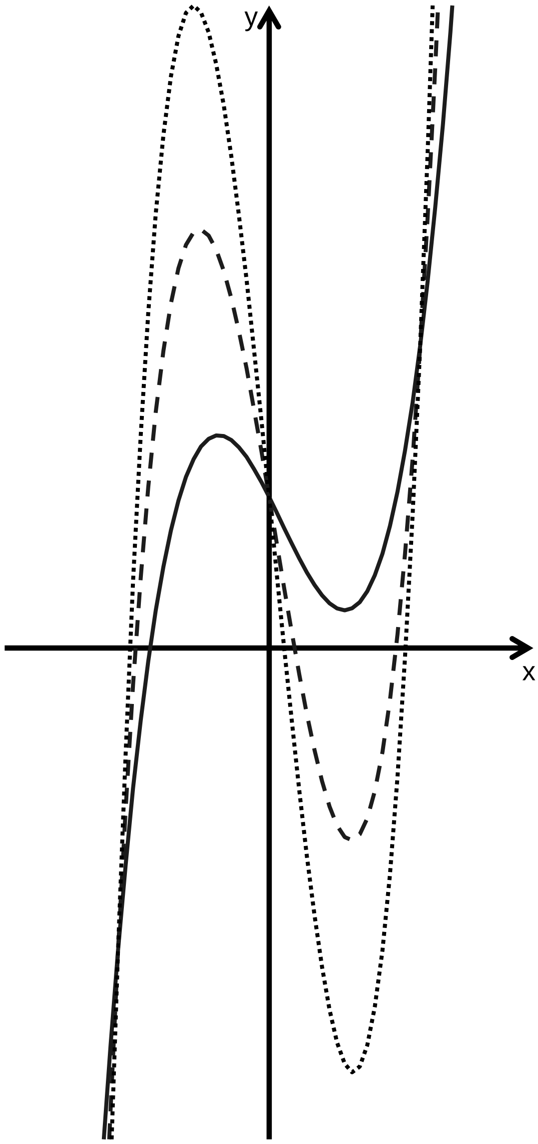
Für die gesamte Flugzeit gilt:
$t_{gesamt} = 2 \cdot t_{max}$

Arbeitsblatt A: Gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen

Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + (2 - 4a) \cdot x + 2$$

Ihr Graph ist die Kurve C_a.



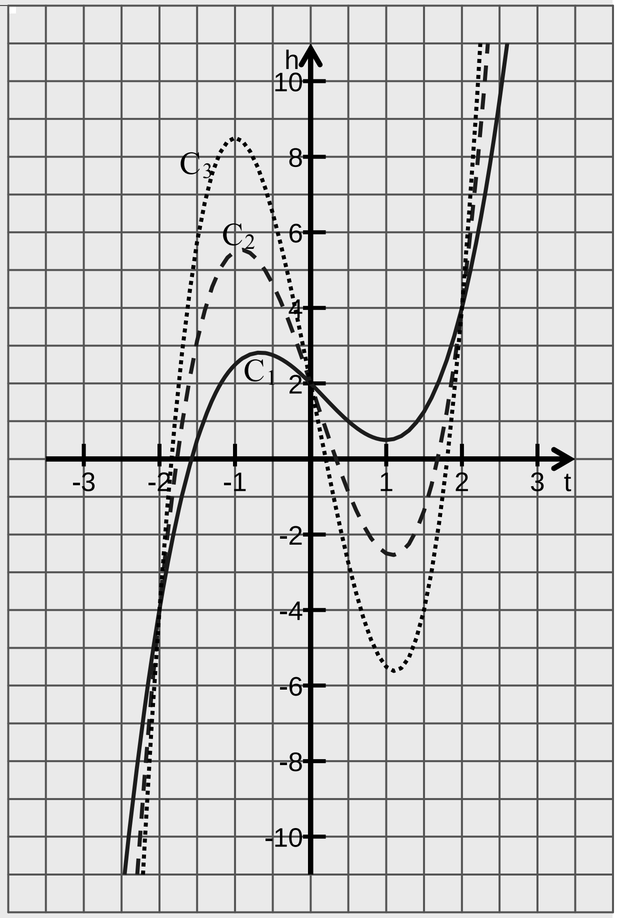
a) In der Abbildung sind die Kurven C_1, C_2 und C_3 gegeben. Ordnen Sie jeder Kurve den richtigen Namen zu.

b) Welche Vermutung bezüglich gemeinsamer Punkte ergibt sich aufgrund der Graphen?

c) Überprüfen Sie Ihre Vermutung rechnerisch und weisen Sie nach, dass die von Ihnen ermittelten Punkte auf jeder Kurve C_a liegen

--> Tippkarte

LÖSUNG: Arbeitsblatt A: Gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen



a) Zuordnung ergibt sich

z.B. durch Bestimmung des Funktionswertes der Funktionen an der Stelle x = 1:

$f_1(x) = x^3 - 0{,}5\,x^2 - 2x + 2$, also $f_1(1) = 0{,}5$;

$f_2(x) = 2x^3 - 0{,}5\,x^2 - 6\,x + 2$, also $f_2(1) = -2{,}5$;

$f_3(x) = 3x^3 - 0{,}5\,x^2 - 10\,x + 2$, also $f_3(1) = -5{,}5$;

oder durch Betrachtung des Verhaltens für $x \to \infty$:

die Funktionswerte für $x \to \infty$ werden bestimmt durch die höchste Potenz, da $3x^3 > 2\,x^3 > x^3$gilt, folgt die angegebene Benennung.

b) Gemeinsame Punkte scheinen zu sein:

A(-2;-4) ; B (0;2); C(2; –4)

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$.

Es gilt: $f_a(x) = f_b(x)$

$$a\cdot x^3 - 0{,}5\cdot x^2 + (2-4a)\cdot x + 2 = b\cdot x^3 - 0{,}5\cdot x^2 + (2-4b)\cdot x + 2$$

$$a\cdot x^3 + (2-4a)\cdot x = b\cdot x^3 + (2-4b)\cdot x$$

$$a\cdot x^3 - b\cdot x^3 + (2-4a)\cdot x - (2-4b)\cdot x = 0$$

$$(a-b)\cdot x^3 + (-4\,a + 4b)\,x = 0$$

$$x\cdot ((a-b)\cdot x^2 + (-4\,a + 4b) = 0$$

Somit ist $x_{S1} = 0$ oder $(a-b)\cdot x^2 + (-4\,a + 4b)\,) = 0$,

$$(a-b)\;x^2 = 4a - 4\,b$$

$$(a-b)\;x^2 = 4(\,a - b)$$

$x^2 = 4$, also $x_{S2} = 2$ oder $x_{S3} = -2$

Für die Funktionswerte folgt $f_a(-2) = a\cdot(-2)^3 - 0{,}5\cdot(-2)^2 + (2-4a)\cdot(-2) + 2$

$= -8a - 2 \quad -4 + 8a + 2$

$= -4$, also **A(–2; –4)**

$f_a(0) = a\cdot 0^3 - 0{,}5\cdot 0^2 + (2-4a)\cdot 0 + 2 = 2$, also **B (0;2)**

$f_a(2) = a\cdot 2^3 - 0{,}5\cdot 2^2 + (2-4a)\cdot 2 + 2 = = 8a - 2 \quad + 4 - 8a + 2 = 4$, also **C (2;4).**

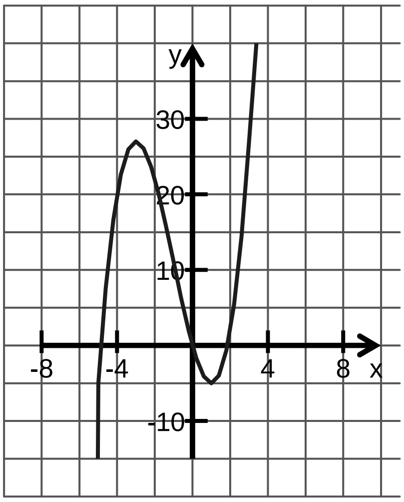
Da die Punktkoordinaten unabhängig vom Scharparameter sind, liegen sie auf allen Kurven der Schar**.**

Arbeitsblatt B: Unterschiedliche Eigenschaften der Kurven (Fallunterscheidung)

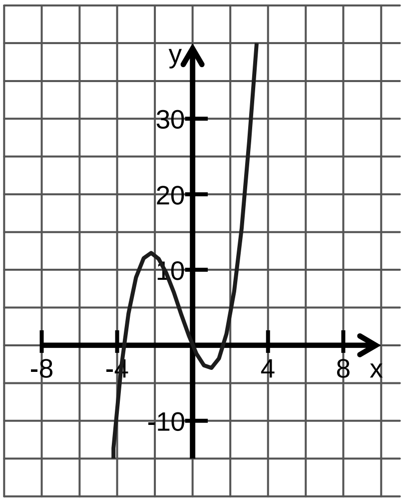
Für jede Zahl $k \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = x \cdot (x^2 - k \cdot x + 3 \cdot k)$.

Der Graph von f_k ist die Kurve C_k.

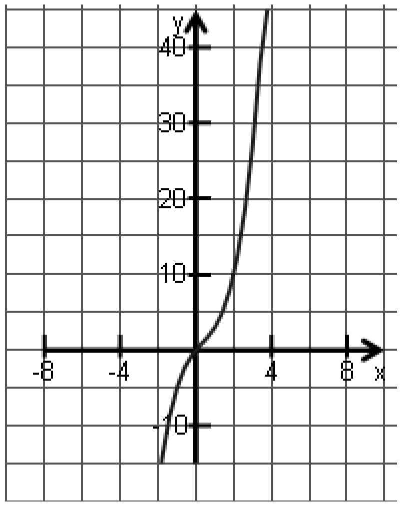
Gegeben sind die Graphen der folgenden Funktionen:



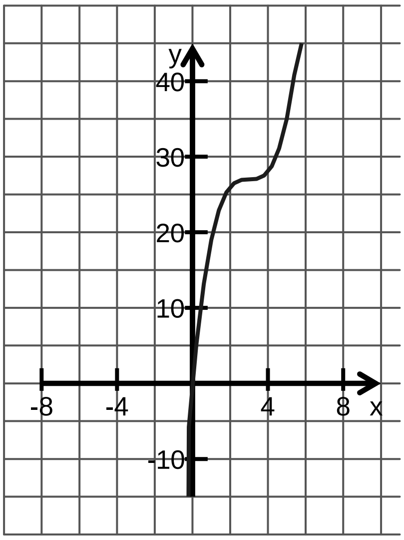
k = –3



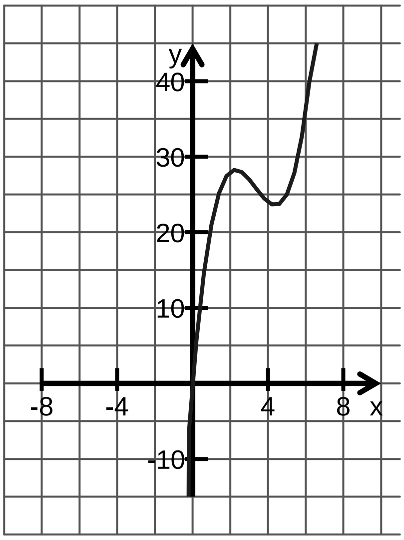
k = –2



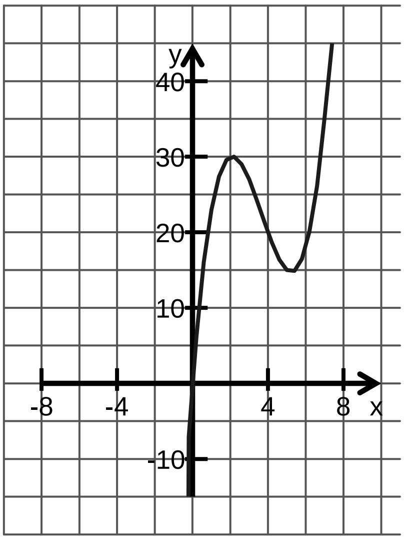
k = 1



k = 9



k = 10



k = 11

Stellen Sie eine Vermutung über die Anzahl der Extrempunkte bei den Kurven der Schar auf.

Beweisen Sie Ihre Vermutung.

➔ Tippkarte

LÖSUNG: Arbeitsblatt B: Unterschiedliche Eigenschaften der Kurve(Fallunterscheidung)

Offenbar haben nicht alle Kurven der Schar Extrempunkte. Aus den Abbildungen folgt, dass es Kurven entweder zwei Extrema haben (Hoch- und Tiefpunkt) ($k = -3$ / $k= -2$ / $k= 10$ /$k= 12$) oder keine ($k = 1$ / $k=9$). Es muss also einen Bereich für k geben, wo Extrema ausgeschlossen sind.

Bestimmung der Extrempunkte der Schar:

$f_k(x) = x \cdot (x^2 - k \cdot x + 3 \cdot k)$

$\quad = x^3 - k\,x^2 + 3\,k\,x$

$f_k'(x) = 3\,x^2 - 2\,k\,x + 3\,k$

$f_k''(x) = 6\,x - 2\,k$

Die möglichen Extremstellen ergeben sich als Nullstellen der ersten Ableitung.

$0 = f_k'(x) = 3\,x^2 - 2\,k\,x + 3\,k$

$$0 = x^2 - \frac{2}{3}k\,x + k \quad (*)$$

$x_{E1} = +\frac{1}{3}k + \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - k}$ und $x_{E2} = +\frac{1}{3}k - \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - k}$, wobei die Diskriminate größer gleich Null sein muss. Ist sie dies nicht der Fall, so hat die Gleichung (*) keine Lösung.

$\frac{1}{9}k^2 - k \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9}k^2 \geq k \Leftrightarrow k^2 \geq 9\,k \Leftrightarrow k^2 - 9\,k \geq 0 \Leftrightarrow k \cdot (k-9) \geq 0$, da $k^2 - 9\,k$ der Funktionsterm einer nach oben geöffneten Parabel ist, die die Nullstellen 0 und 9 hat, folgt:

$\frac{1}{9}k^2 - k \geq 0$ genau dann wenn $k \leq 0$ oder $k \geq 9$ ist.

Somit folgt für die möglichen Extremstellen:

1. Fall: $k < 0$ oder $k > 9$: $x_{E1} = +\frac{1}{3}k + \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - k}$ und $x_{E2} = +\frac{1}{3}k - \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - k}$,

Da der Graph von f_k' eine nach oben geöffnete Parabel ist, sind beide Extremstellen.

2. Fall : $k = 0$ oder $k = 9$: $x_{E1} = x_{E2} = +\frac{1}{3}k$, der Graph von f_k' berüht also an dieser Stelle die

x-Achse. Da kein Vorzeichenwechsel bei f_k' erfolgt, liegt kein Extrempunkt vor. Insbesondere ist an dieser Stelle ein Sattelpunkt zu finden.

3. Fall: $0 < k < 9$: Da gilt $\frac{1}{9}k^2 - k < 0$, also hat (*) keine Lösungen, also gibt es keine Extremstellen.

Erweiterung zum Arbeitsblatt B: gemeinsame Punkte

Welche Vermutung über gemeinsame Punkte der Kurven der Schar lässt sich aufstellen?
Beweisen Sie ihre Vermutung.

LÖSUNG: Erweiterung zum Arbeitsblatt B:

Vermutung : A(0;0) und B(3; 27).

gemeinsame Punkte: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$.

Es gilt:

$$f_a(x) = f_b(x)$$

$$x \cdot (x^2 - a\cdot x + 3\cdot a) = x \cdot (x^2 - b\cdot x + 3\cdot b)$$

$$x \cdot (x^2 - a\cdot x + 3\cdot a) - x \cdot (x^2 - b\cdot x + 3\cdot b) = 0$$
$$x \cdot (x^2 - a\cdot x + 3\cdot a - x^2 + b\cdot x - 3\cdot b) = 0$$
$$x \cdot (- a\cdot x + 3\cdot a + b\cdot x - 3\cdot b) = 0$$

Somit ist $x_{S1} = 0$ oder $- a\cdot x + 3\cdot a + b\cdot x - 3\cdot b = 0$, also

$$(b - a)\cdot x = 3\cdot b - 3\cdot a$$
$$(b - a)\cdot x = 3\cdot (b - a)$$
$$x_{S2} = 3$$

Es ist $f_k(0) = 0$ und $f_k(3) = 3 \cdot (3^2 - k \cdot 3 + 3k) = 27$.

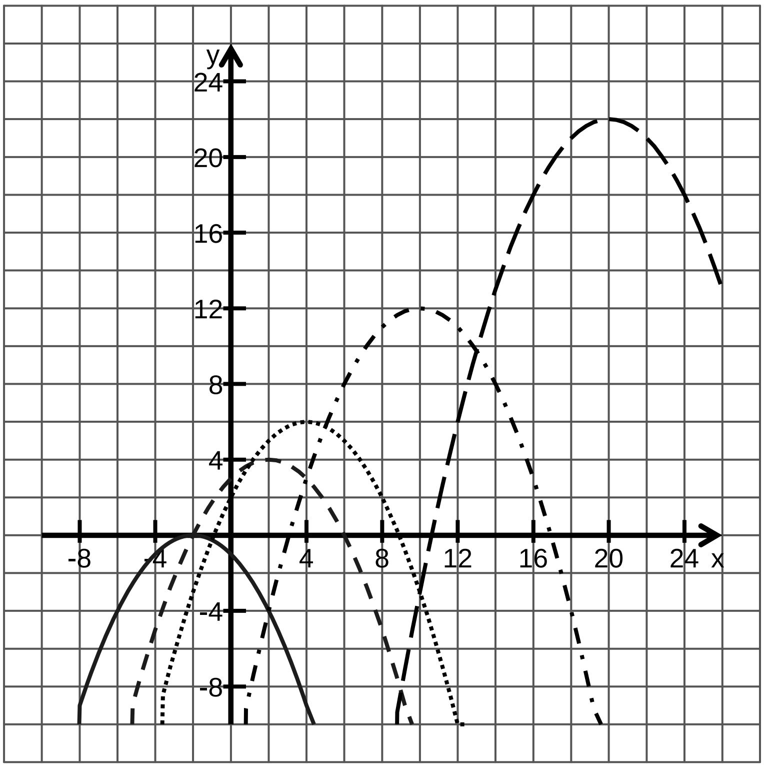
Also sind die gemeinsamen Punkte: A(0;0) und B(3; 27).

Arbeitsblatt C: Ortskurve von Extrempunkten bei Kurvenscharen

Zu jeder Zahl $b \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_b gegeben durch $f_b(x) = -0{,}25x^2 + b \cdot x + 2 + 2 \cdot b - b^2$.

Der Graph von f_b ist die Kurve K_b.

Gegeben sind die Graphen der einiger Funktionen:



a) Ordnen Sie den Graphen die jeweilige Funktionsvorschrift f_1, f_2, f_{-1}, f_5 und f_{10} zu.

b) Welche Vermutung ergibt sich für die Lage der Hochpunkte der Kurvenscharen?

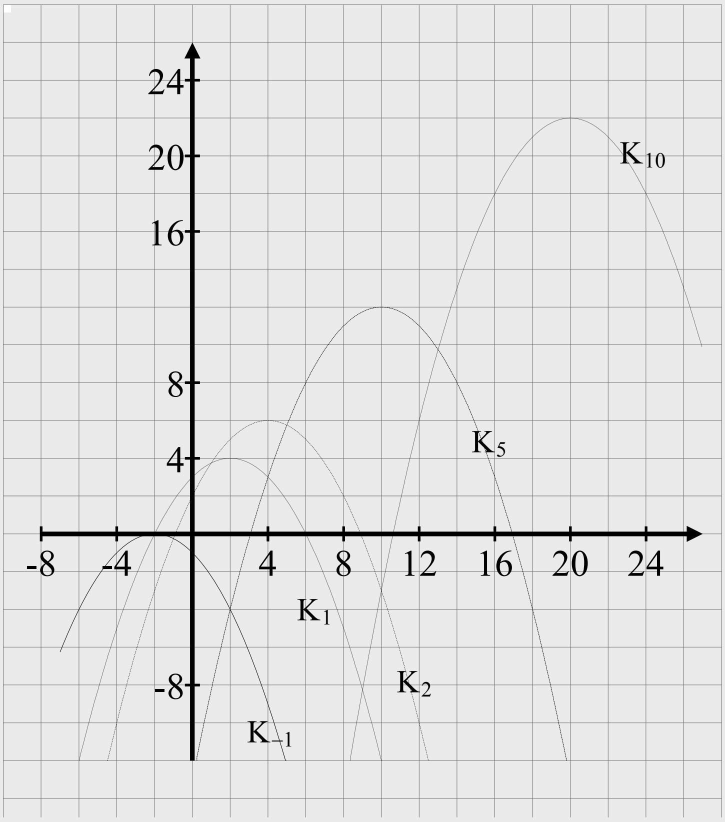
c) Bestimmen Sie für allgemeines b den Hochpunkt der Kurve K_b und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Information:
Die Kurve auf der alle Hochpunkte liegen heißt *Ortskurve* (oder *Ortslinie*) *der Hochpunkte*.

--> Tippkarte

LÖSUNG Arbeitsblatt C: **Ortskurve von Extrempunkten bei Kurvenscharen**

a)



b) Die Hochpunkte der Schar scheinen auf einer Geraden zu liegen.

c) Sei $b \in \mathbb{R}$.

Es gilt: $f_b(x) = -0{,}25x^2 + b \cdot x + 2 + 2 \cdot b - b^2$

$f_b'(x) = -0{,}5x + b$

$f_b''(x) = -0{,}5 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die möglichen Extremstellen sind die Nullstellen der ersten Ableitung:

$0 = f_b'(x) = -0{,}5x + b \Leftrightarrow x_E = 2b$.

Da $f_b''(2b) = -0{,}5 \neq 0$, ist $x_E = 2b$ Extremstelle, insbesondere ist x_E Maximalstelle.

Für den Funktionswert an der Stelle $x_E = 2b$ folgt:

$f_b(2b) = -0{,}25 \cdot (2b)^2 + b \cdot 2b + 2 + 2 \cdot b - b^2$

$= -b^2 + 2b^2 + 2 + 2 \cdot b - b^2$

$= 2b + 2$

Somit ist der Hochpunkt H (2b; 2b +2) für alle $b \in \mathbb{R}$.

Um die Ortskurve der Hochpunkte zu bestimmen, sucht man die Funktionsgleichung, die jeder x-Koordinate des Hochpunktes die jeweilige y-Koordinate zuordnet.

Hier lässt sich sofort sehen, dass die Hochpunkte alle auf der Funktion $x \mapsto x+2$ liegen.

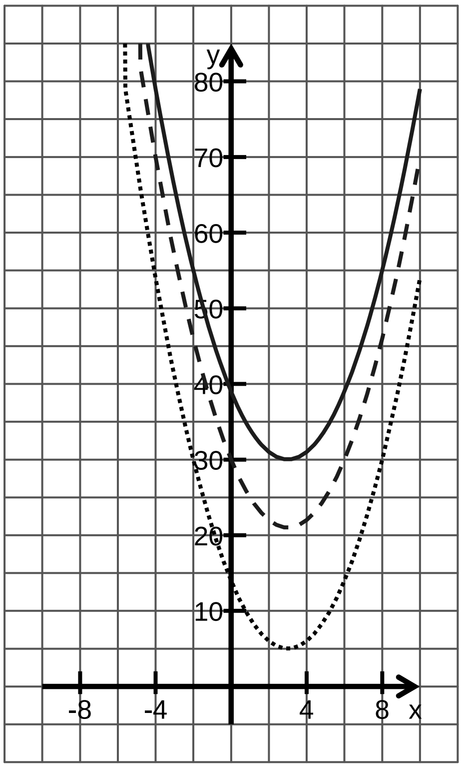
Rechnerisch lässt sich dies wie folgt nachrechnen:

Für die x-Koordinate des Hochpunktes gilt: $x = 2b \Rightarrow b = 0{,}5\,x$ (*)

Für die y-Koordinate des Hochpunktes gilt: $y = 2b + 2$. (**)

Setzt man (*) in (**) ein, folgt: $y = 2\,(0{,}5x) + 2 = x + 2$, also liegen alle Hochpunkte auf der Geraden mit der Gleichung $y = x + 2$.

Für jede Zahl a $\in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = x^2 - 6x + 30 + a^2 + 8a$ gegeben.
Ihr Graph ist die Kurve C_a.



a) In der Abbildung sind die Kurven C_0, C_1 und C_{-4} gegeben. Ordnen Sie jeder Kurve den richtigen Namen zu.

b) Bestimmen Sie allgemein den Tiefpunkt von C_a.

c) Für welche Kurve der Schar ist der Tiefpunkt am weitesten unten, d.h. die y-Koordinate am kleinsten?

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Tiefpunktes.

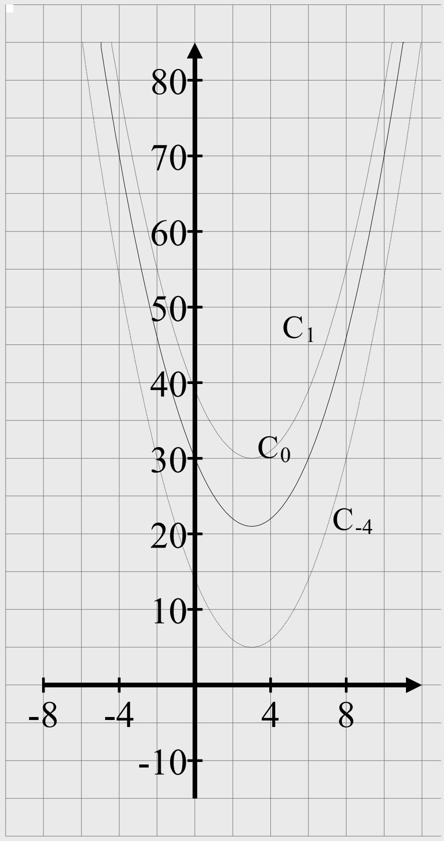
--> Tippkarte zu c)

LÖSUNG Arbeitsblatt D: Der tiefste Tiefpunkt, der höchste Hochpunkt

a) C_0 gehört zur Funktion $f_0(x) = x^2 – 6x + 30$, also $f_0(0) = 30$.

C_1 gehört zur Funktion $f_1(x) = x^2 – 6x + 39$, also $f_1(0) = 39$.

C_{-4} gehört zur Funktion $f_{-4}(x) = x^2 – 6x + 14$, also $f_{-4}(0) =$ 14.



b) Es gilt : $f_a\,'(x) = 2\,x – 6$.

$f_a\,''(x) = 2$

Somit: $0 = f_a\,'(x) = 2\,x – 6$ liefert als mögliche Extremstellen: $x = 3$. Somit ist die x-Koordinate der Tiefpunkte der Schar unabhängig von a.

Da $f_a\,''(x) = 2 > 0$ für alle $x \in IR$, liegt bei $x = 3$ eine Minimalstelle vor.

Für den Tiefpunkt T_a gilt somit: $T_a\,(3; 21+a^2 + 8\,a)$.

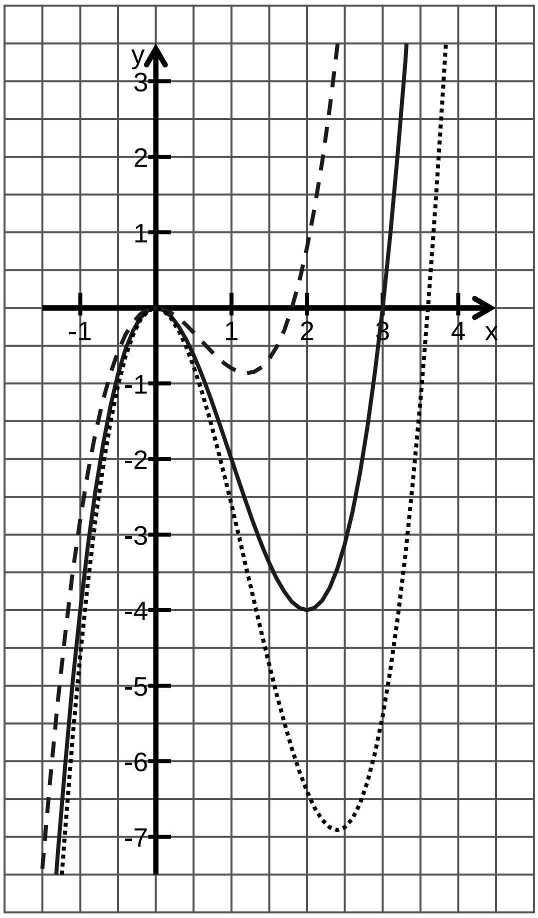
c) Die y-Koordinaten der Tiefpunkte erfüllen die Gleichung $t(a) = 21+a^2 + 8a$.

$0 = t\,'(a) = 2\,a + 8 \Leftrightarrow a = – 4$. Da t(a) eine Gerade mit positiver Steigung ist, liegt bei $a = – 4$ ein Vorzeichenwechsel vom Negativen zum Positivem vor. Somit ist a eine Extremstelle, insbesondere eine Minimalstelle.

Für $a = –4$ folgt $T_{-4}(3; 5)$, welches somit der am tiefsten liegende Tiefpunkt der Kurvenschar ist.

Arbeitsblatt E: Kurven einer Schar mit einer speziellen Eigenschaft

Für jede Zahl a $\in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = x^3 - 3ax^2$ ($a \in \mathbb{R}$; $a > 0$).
Ihr Graph ist die Kurve C_a.

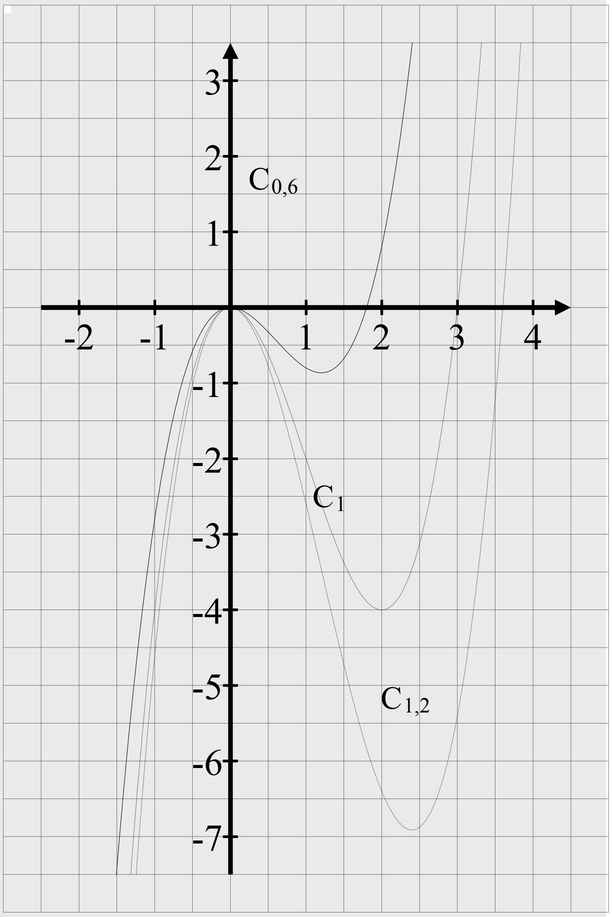


a) In dem Schaubild sind die Graphen $C_{0,6}$, C_1 und $C_{1,2}$ gegeben. Ordnen Sie die Graphen richtig zu.

b) Welche Kurve der Schar hat bei x = 3 einen Tiefpunkt?

c) Welche Kurve der Schar besitzt eine Wendetangente, die durch die Punkt P (0;8) geht?

LÖSUNG: Arbeitsblatt E: Kurven einer Schar mit einer speziellen Eigenschaft



a) Es ist $f_{0,6}(1) = 1^3 - 3 \cdot 0,6 \cdot 1^2 = 0,8$;
$f_1(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1^2 = -2$;
$f_{1,2}(1) = 1^3 - 3 \cdot 1,2 \cdot 1^2 = -2,6$.

b) Es ist $f_a(x) = x^3 - 3\,a\,x^2$;
$f_a'(x) = 3x^2 - 6\,a\,x$
$= 3\,x \cdot (x - 2a)$
$f_a''(x) = 6x - 6\,a$

Mögliche Extremstellen sind die Nullstellen der ersten Ableitung, also:
$0 = f_a'(x) = 3x^2 - 6\,a\,x = 3\,x \cdot (x - 2a)$,
somit sind $x_{E1} = 0$ und $x_{E2} = 2a$ mögliche Extremstellen.
Da $f_a''(0) = 6 \cdot 0 - 6\,a = -6a < 0$ für $a>0$, ist $x_{E1} = 0$ Extremalstelle, insbesondere Maximalstelle: H (0;0)
Da $f_a''(a) = 6 \cdot 2a - 6\,a = 6a > 0$ für $a>0$, ist $x_{E2} = 2a$ Extremalstelle, insbesondere Minimalstelle: $T_a(2a;\ -4\,a^3)$

Für die gesuchte Kurve der Schar muss gelten: $2a = 3$, also $a = 1,5$.

c) Die möglichen Wendestellen sind die Nullstellen der zweiten Ableitung, somit gilt:
$0 = f_a''(x) = 6x - 6\,a \Leftrightarrow x_W = a$.
Da die zweiten Ableitung einer Geraden entspricht, findet bei xw ein Vorzeichenwechsel statt und somit ist $x_W = a$ Wendestelle.
Es gilt $f_a(a) = a^3 - 3\,a\,a^2 = -2\,a^3$, also W $(a\,;\,-2a^3)$.
Im Wendepunkt ist die Steiung: $f_a'(a) = 3a^2 - 6\,a \cdot a = -3a^2$.
Allgemein gilt somit für die Wendetangente: $t(x) = -3a^2 \cdot x + c$.
Da W auf der Wendetangenten liegen soll, gilt: $-2a^3 = t(a) = -3a^2 \cdot a + c \Leftrightarrow c = a^3$.
Somit gilt für die Wendetangente: $t(x) = -3a^2 \cdot x + a^3$.

Da die Funktion der Schar gesucht ist, deren Wendetangente den Punkt P(0;8) enthält, folgt: $8 = t(0) = -3a^2 \cdot 0 + a^3 = a^3$. Also $a = 2$.

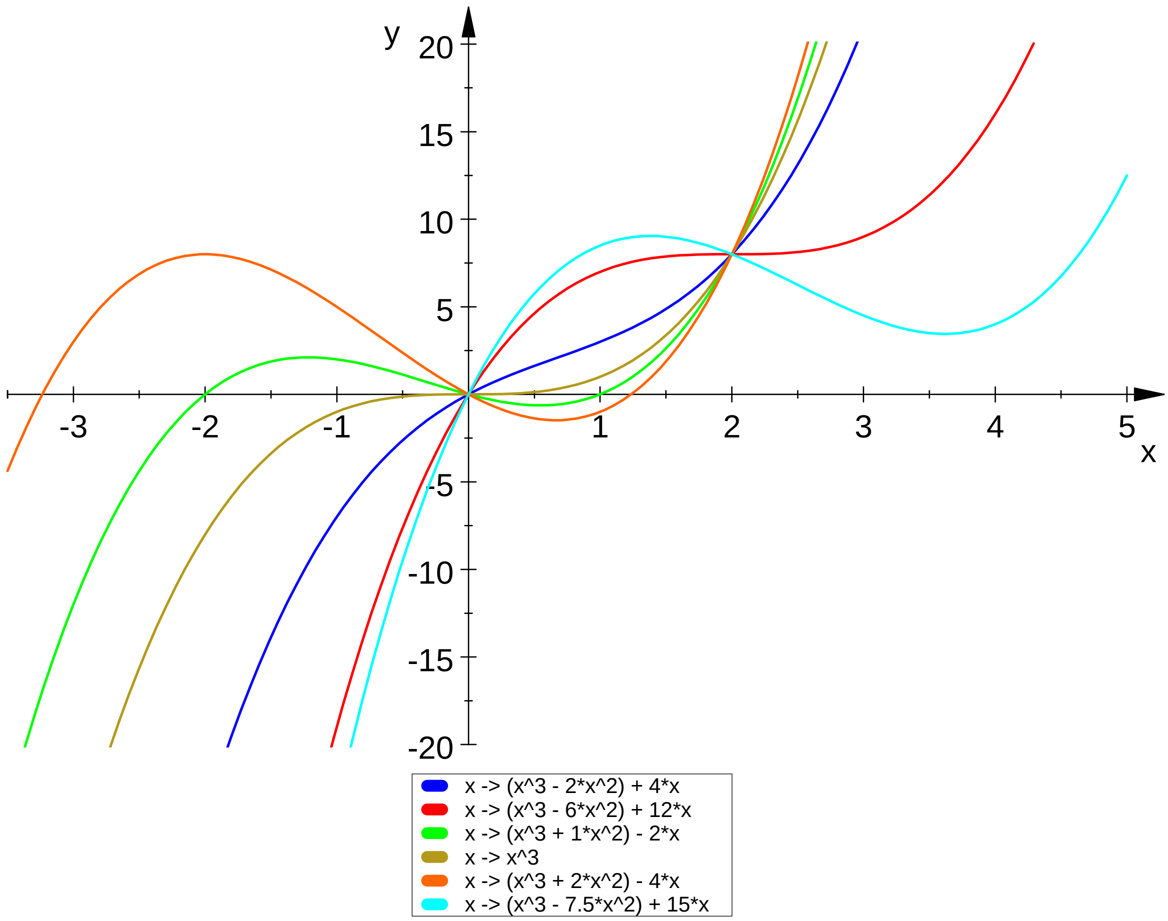
Somit ist $f_2(x) = x^3 - 6\,x^2$ die Funktion der Schar, deren Wendetangente $t(x) = -12 \cdot x + 8$ durch P(0;8) verläuft.

Arbeitsblatt F: Ortskurve von Wendepunkte bei einer ganzrationalen Kurvenschar

Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion gegeben durch $f_t(x) = x^3 - t \cdot x^2 + 2 \cdot t \cdot x$.

a) Zeichnen Sie die Graphen in fünf verschiedenen Farben nach. Markieren Sie für die fünf Kurven die ungefähre Lage der Wendestelle.

b) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Ortskurve der Wendepunkte.



LÖSUNG Arbeitsblatt F: Ortskurve von Wendepunkte bei einer ganzrationalen Kurvenschar

a) Die Wendepunkte scheinen auf einem Funktionsgraphen mit Tiefpunkt im Ursprung und Hochpunkt in der Nähe der Stelle x = 2 zu liegen.

b) Man bestimmt zunächst allgemein die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von t. Die Wendestelle ergibt sich mithilfe der 2. Ableitung.

$f'(x) = 3x^2 - 2tx + 2t \qquad f''(x) = 6x - 2t \qquad f'''(x) = 6$

Für eine Wendestelle x_w muss $f''(x_w) = 0$ gelten: $0 = 6x_w - 2t \Leftrightarrow x_w = 1/3\ t$ (1)

Die 3. Ableitung an der Stelle x_W bestätigt die Wendestelle: $f'''(x_W) = 6 \neq 0$.

Man berechnet die y-Koordinate des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in die Ausgangsgleichung:

$$f_W(x_w) = \frac{1}{27}t^3 - \frac{1}{9}t^3 + \frac{2}{3}t^2 = -\frac{2}{27}t^3 + \frac{2}{3}t^2 \qquad (2)$$

Für die Gleichung der Ortskurve muss in (2) der Parameter t durch eine Abhängigkeit von x_W ersetzt werden. Deshalb löst man zunächst (1) nach dem Parameter t auf.

$$x_W = \frac{1}{3}t \quad \Leftrightarrow \quad t = 3 \cdot x_W$$

Dann ersetzt t in (2) durch den neuen Zusammenhang.

$$f_W(x_W) = -\frac{2}{27} \cdot 27\, x_W{}^3 + \frac{2}{3} 9x_W{}^2 = -2\, x_W{}^3 + 6x_W{}^2$$

Die Ortskurve der Wendepunkte hat also die Gleichung

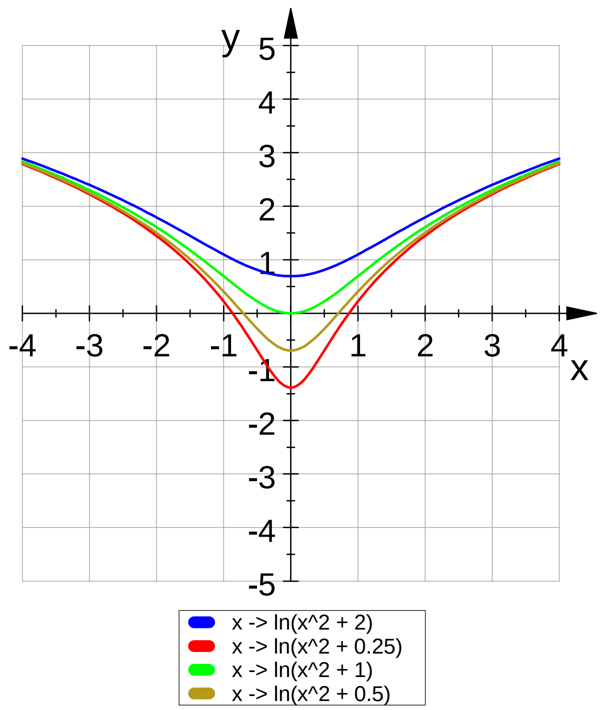
$$f_W(x_W) = -2\, x_W{}^3 + 6x_W{}^2 \text{ bzw. } y(x) = -2\, x^3 + 6x^2.$$

Für jede Zahl t ist eine Funktion gegeben durch
$f_t(x) = \ln(x^2 + t)$ mit t>0.

Der Graph von f_t sei K_t .

a) Zeichnen Sie die Graphen in vier verschiedenen Farben nach. Markieren Sie für die fünf Kurven die ungefähre Lage der Wendestelle.

b) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Ortskurve der Wendepunkte.



LÖSUNG Arbeitsblatt G: Ortskurve von Wendepunkte bei einer logarithmischen Kurvenschar:

a) Die Wendepunkte scheinen auf 2 y-achsensymmetrischen Hyperbeln zu liegen, die für x -> 0 nach - ∞ streben.

b) $f_t'(x) = \frac{1}{x^2+t} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+t}$

$f_t''(x) = \frac{2(x^2+t) - 2x \cdot 2x}{(x^2+t)^2} = \frac{-2x^2+2t}{(x^2+t)^2}$

$f'''(x) =$

$$\frac{-4x\cdot(x^2+t)^2 - (-2x^2+2t)\cdot 2(x^2+t)\cdot 2x}{(x^2+t)^4} = \frac{-4x(x^2+t) - (-2x^2+2t)\cdot 4x}{(x^2+t)^3} = \frac{4x^3 - 12tx}{(x^2+t)^3}$$

Aus $f_t''(x_W) = 0$ folgt $-2x_W{}^2 + 2t = 0$.

Damit ist $x_W = \sqrt{t}$ oder $x_W = -\sqrt{t}$ (1)

Da $f'''(x_W) \neq 0$, liegen tatsächlich zwei Wendestellen vor.

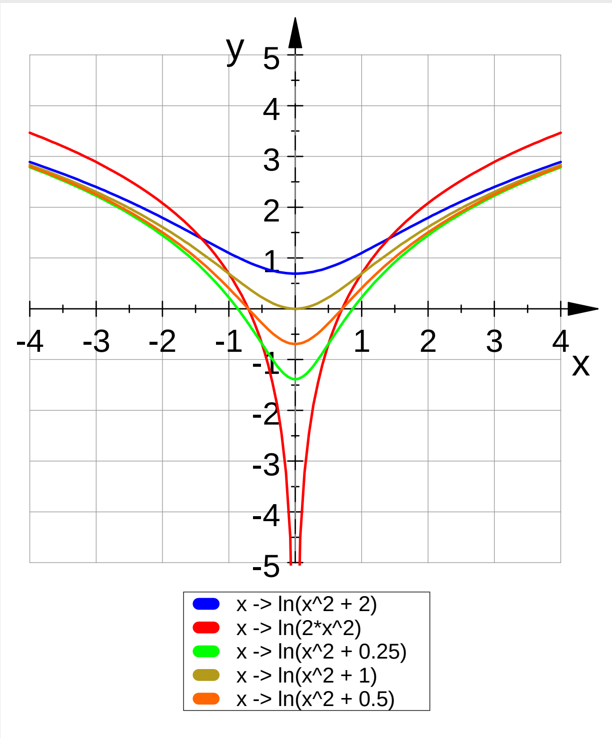
Einsetzen von x_W in die Funktionsgleichung ergibt die Koordinaten y_W der Wendepunkte.

$y_W = f(x_W) = \ln(2t)$ (2)

Die Wendepunkte liegen also bei $(\sqrt{t}\ |\ln(2t))$ und $(-\sqrt{t}\ |\ln(2t))$.

Aus (1) ergibt sich unabhängig von der positiven oder der negativen Lösung für die Wendestelle $t = x_W{}^2$. Setzt man dies in die y_W -Koordinatengleichung (2) ein, so erhält man

$y_W = \ln(2\, x_W{}^2)$. Die Wendepunkte liegen also auf dem Graphen von $y(x) = \ln(2\, x^2)$.



<u>Tippkarte für Arbeitsblatt A und Erweiterung vom Arbeitsblatt B</u>

Bei der Suche nach gemeinsamen Punkten einer Schar können zunächst <u>zwei spezielle Scharkurven</u> auf Schnittpunkte untersucht werden (z.B. $f_a(x) = f_b(x)$ mit $a \neq b$; a und b werden dabei jeweils als konstant angenommen).

Anschließend ist nachzuprüfen, ob <u>alle Kurven der Schar</u> durch die gefundenen Punkte gehen. Dies ist dann der Fall, wenn die Punktkoordinaten unabhängig vom Scharparameter sind.

<u>Tippkarte zum Arbeitsblatt B</u>

Berechnen Sie allgemein die möglichen Extremstellen der Kurvenschar f_k.

Bei der Berechnung muss sich in Abhängigkeit von k eine Fallunterscheidung ergeben.

In diesem Fall stoßen Sie auf eine zu lösende quadratische Gleichung, die nur dann lösbar ist, wenn die der Ausdruck unter der Wurzel (die Diskriminate) größer als Null ist.

Suchen Sie also die k, für die die Diskriminate größer gleich Null ist.

<u>Tippkarte für Arbeitsblatt C:</u>

Tipp 1: Verbinden Sie die Hochpunkte. Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

Tipp 2: Suchen Sie eine Funktionsvorschrift, die der x-Koordinate des Hochpunktes die berechnete y-Koordinate zuordnet.
Überprüfen Sie ihr Ergebnis im Schaubild.

<u>Tippkarte für Arbeitsblatt D Aufgabenteil c):</u>

Die y-Koordinaten der Tiefpunkte erfüllen die Gleichung $t(a) = 21+a^2 + 8a$.

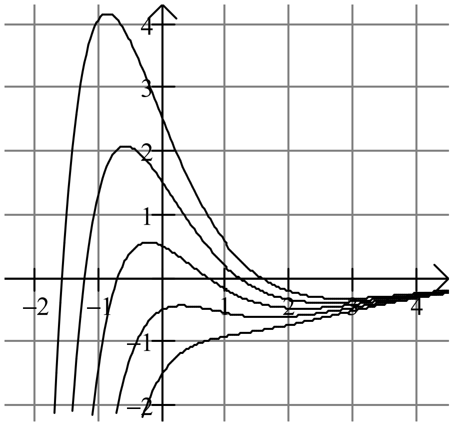
Nun soll das a gesucht werden, bei dem t(a) minimal wird.

Nutze dafür die Kenntnisse der Analysis.

Übungsaufgabe 1: Funktionenschar, exponentiell

Nebenstehend sehen Sie fünf Graphen der Funktionenschar

$$f_a(x) = (a - x^2) \cdot e^{-x}$$



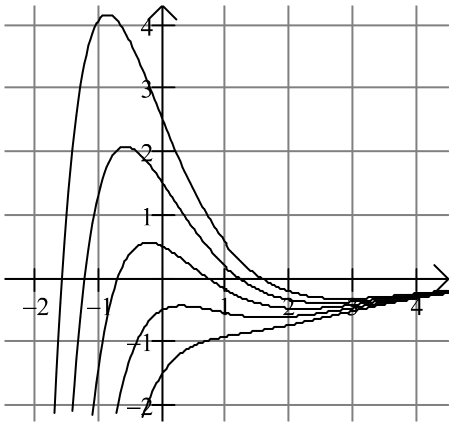
a) Welcher Schar-Parameter könnte zum mittleren Funktionsgraphen gehören? (Mit Begründung!)

b) Für welche Schar-Parameter a hat der Graph G_a genau einen Punkt mit Steigung Null ? Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes und begründen Sie, von welcher Art dieser Punkt ist.

Übungsaufgabe 1: Funktionenschar, exponentiell

Nebenstehend sehen Sie fünf Graphen der Funktionenschar

$$f_a(x) = (a - x^2) \cdot e^{-x}$$



a) Welcher Schar-Parameter könnte zum mittleren Funktionsgraphen gehören? (Mit Begründung!)

b) Für welche Schar-Parameter a hat der Graph G_a genau einen Punkt mit Steigung Null ? Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes und begründen Sie, von welcher Art dieser Punkt ist.

LÖSUNG Übungsaufgabe 1: Funktionenschar, exponentiell

zu a)

Der y-Achsenabschnitt von f_a ist $f_a(0) = a\cdot e^{-0} = a$. Demnach könnte zum mittleren Funktionsgraphen der Schar-Parameter a=0,5 gehören.

zu b)

Für Punkte P(x|f(x)) mit Steigung Null gilt $f_a'(x)=0$

$f_a'(x) = -2x \cdot e^{-x} + (a-x^2) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (x^2-2x-a) \cdot e^{-x}$

$f_a'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 0=x^2-2x-a \quad \Rightarrow x = 1\pm\sqrt{1+a}$

Nur eine Lösung für a = –1, nämlich x = 1.

Art des Punktes:

$f_{-1}'(x) = (x^2-2x+1) \cdot e^{-x}$

$f_{-1}''(x) = (2x-2) \cdot e^{-x} + (x^2-2x+1) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (-x^2+4x-3) \cdot e^{-x}$; $f_{-1}''(1) = (-1+4-3) \cdot e^{-1} = 0$

$f_{-1}'''(x) = (-2x+4) \cdot e^{-x} + (x^2+4x-3) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (x^2+2x+1) \cdot e^{-x}$; $f_{-1}'''(1) = 3/e \neq 0$

(Nur) G_{-1} hat einen einzigen Punkt mit Steigung Null. Dies ist ein Sattelpunkt S(1|-2/e).

Übungsaufgabe 2: Funktionenschar, exponentiell

Für jede Zahl t ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^2$$

Ihr Graph ist die Kurve C_t.

a) Untersuchen Sie C_t auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
b) Zeichnen C_2 Sie für –4 < x <1,5.
c) C_2 schließt mit den Geraden mit den Gleichungen y = 4 und x = u (u < 0) eine Fläche ein. Bestimmen Sie die Größe dieser Fläche.

Übungsaufgabe 2: Funktionenschar, exponentiell

Für jede Zahl t ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^2$$

Ihr Graph ist die Kurve C_t.

a) Untersuchen Sie C_t auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
b) Zeichnen C_2 Sie für –4 < x <1,5.
c) C_2 schließt mit den Geraden mit den Gleichungen y = 4 und x = u (u < 0) eine Fläche ein. Bestimmen Sie die Größe dieser Fläche.

Übungsaufgabe 2: Funktionenschar, exponentiell

Für jede Zahl t ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^2$$

Ihr Graph ist die Kurve C_t.

a) Untersuchen Sie C_t auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
b) Zeichnen C_2 Sie für –4 < x <1,5.
c) C_2 schließt mit den Geraden mit den Gleichungen y = 4 und x = u (u < 0) eine Fläche ein. Bestimmen Sie die Größe dieser Fläche.

Übungsaufgabe 2: Funktionenschar, exponentiell

Für jede Zahl t ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^2$$

Ihr Graph ist die Kurve C_t.

a) Untersuchen Sie C_t auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
b) Zeichnen C_2 Sie für –4 < x <1,5.
c) C_2 schließt mit den Geraden mit den Gleichungen y = 4 und x = u (u < 0) eine Fläche ein. Bestimmen Sie die Größe dieser Fläche.

LÖSUNG Übungsaufgabe 2: Funktionenschar, exponentiell

Zu a)

Ableitungen:

$f_t'(x) = 2e^{2x} - 2te^x$

$f_t''(x) = 4e^{2x} - 2te^x$

$f_t'''(x) = 8e^{2x} - 2te^x$

Nullstellen:

$f_t(x) = 0$

$e^{2x} - 2te^x + t^2 = 0$ Substitution: $z = e^x$

$z^2 - 2tz + t^2 = 0$

$\Rightarrow z = t \Rightarrow x = \ln(t)$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

$2e^{2x} - 2te^x = 0$

$\Rightarrow e^x \cdot (2e^x - 2t) = 0$

$\Rightarrow 2e^x - 2t = 0$, da $e^x \neq 0$ für alle x.

$\Rightarrow e^x = t \qquad \Rightarrow x = \ln(t)$

Hinreichende Bedingung: $f_t'(x) = 0 \wedge f_t''(x) \neq 0$

$f_t''(\ln(t) = 4e^{2\cdot\ln(t)} - 2t \cdot e^{\ln(t)}$

$= 4 \cdot t^2 - 2t \cdot t = 2t^2 \neq 0$ für $t \neq 0$

→ Extrempunkt existiert für $t \neq 0$

Für $t \neq 0$ ist $f_t''(x) > 0$ → Minimum

y–Koordinaten:

$f_t(\ln(t) = e^{2\cdot\ln(t)} - 2t \cdot e^{\ln(t)} + t^2 = t^2 - 2t \cdot t + t^2 = 0$ → $T(\ln(t)\,|\,0)$

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f_t''(x) = 0$

$\Rightarrow 4e^{2x} = 2te^x \qquad \Rightarrow e^x = \frac{t}{2} \qquad \Rightarrow x = \ln\left(\frac{t}{2}\right)$

Hinreichende Bedingung:

$f_t''(x) = 0 \wedge f_t'''(x) \neq 0$

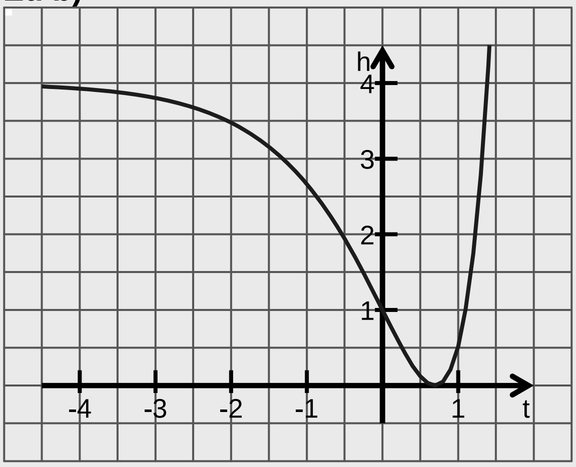
$f_t'''(\ln\left(\frac{t}{2}\right)) \neq 0$

y-Koordinaten:

$f_t\left(\ln\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{t^2}{4}$ → $W\left(\ln\left(\frac{t}{2}\right)\middle|\frac{t^2}{4}\right)$

LÖSUNG Übungsaufgabe 2: Funktionenschar, exponentiell

Zu b)



Zu c)

Berechne zunächst Schnittstelle des Graphen von y = 4 und C_2:

$$e^{2x} - 4e^{x} + 4 = 4 \Rightarrow x = \ln(4)$$

Der Flächeninhalt der gesuchten Fläche entspricht dem Integral:

$$\int_{u}^{\ln(4)} \left(-e^{2x} + 4e^{x}\right) dx = \left[-0{,}5e^{2x} + 4e^{x}\right]_{u}^{\ln(4)}$$

$$= -0{,}5 \cdot 4^{2} + 4 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot e^{2u} - 4 \cdot e^{u} = 8 + 0{,}5e^{2u} - 4e^{u}$$

Übungsaufgabe 3: Funktionenschar, exponentiell

Zu jedem $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = x + ae^{-x} .$$

Ihr Graph ist die Kurve C_a.

a) Untersuchen Sie C_a auf Extrempunkte. Begründen Sie, weshalb nur für positive Werte von a Extrempunkte existieren.
b) Für welche Scharkurve liegt der Extrempunkt auf der x-Achse? Bei welcher Scharkurve liegt der Extrempunkt auf der y-Achse?
c) Alle Extrempunkte liegen auf einer Geraden. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden.
d) Welche Ursprungsgerade mit der Gleichung $h_a(x) = mx$ berührt den Graphen von f_a? Berechnen Sie die Berührstelle sowie die Geradengleichung.

Übungsaufgabe 3: Funktionenschar, exponentiell

Zu jedem $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = x + ae^{-x} .$$

Ihr Graph ist die Kurve C_a.

a) Untersuchen Sie C_a auf Extrempunkte. Begründen Sie, weshalb nur für positive Werte von a Extrempunkte existieren.
b) Für welche Scharkurve liegt der Extrempunkt auf der x-Achse? Bei welcher Scharkurve liegt der Extrempunkt auf der y-Achse?
c) Alle Extrempunkte liegen auf einer Geraden. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden.
d) Welche Ursprungsgerade mit der Gleichung $h_a(x) = mx$ berührt den Graphen von f_a? Berechnen Sie die Berührstelle sowie die Geradengleichung.

Übungsaufgabe 3: Funktionenschar, exponentiell

Zu jedem $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = x + ae^{-x} .$$

Ihr Graph ist die Kurve C_a.

a) Untersuchen Sie C_a auf Extrempunkte. Begründen Sie, weshalb nur für positive Werte von a Extrempunkte existieren.
b) Für welche Scharkurve liegt der Extrempunkt auf der x-Achse? Bei welcher Scharkurve liegt der Extrempunkt auf der y-Achse?
c) Alle Extrempunkte liegen auf einer Geraden. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden.
d) Welche Ursprungsgerade mit der Gleichung $h_a(x) = mx$ berührt den Graphen von f_a? Berechnen Sie die Berührstelle sowie die Geradengleichung.

LÖSUNG Übungsaufgabe 3: Funktionenschar, exponentiell

Zu a)

Ableitungen:

$f_a{}'(x) = 1 - a \cdot e^{-x}$ $\quad\quad$ $f_a{}''(x) = a \cdot e^{x}$

Extrempunkte

Notwendige Bedingung: $f_a{}'(x) = 0$

$1 - a \cdot e^{-x} = 0 \quad\quad \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{a} \quad\quad \Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(1) - \ln(a)$

$\Rightarrow x = \ln(a)$ $\quad\quad$ $a > 0$, da Logarithmus nur für positive Werte definiert

Hinreichende Bedingung: $f_a{}'(x) = 0 \wedge f_a{}''(x) \neq 0$

$f_a{}''(\ln(a)) = 1 > 0$ → Minimum

y–Koordinate: $f_a(\ln(a)) = \ln(a) + 1$ $\quad\quad$ → $T(\ln(a) | \ln(a) + 1)$

Zu b)

Für einen Extrempunkt auf der x–Achse gilt: $y_E = 0$

Also: $\ln(a) + 1 = 0$

$\Rightarrow \ln(a) = -1 \quad\quad \Rightarrow e^{\ln(a)} = e^{-1} \quad\quad \Rightarrow a = \frac{1}{e}$

→ Für $a = \frac{1}{e}$ liegt der Extrempunkt auf der x–Achse.

Für einen Extrempunkt auf der y-Achse gilt: $x_E = 0$

Also: $\ln(a) = 0$

$\Rightarrow e^{\ln(a)} = e^{0} \quad\quad \Rightarrow a = 1$

→ Für $a = 1$ liegt der Extrempunkt auf der y–Achse.

Zu c)

Ortskurve der Extrempunkte: $y_E = \ln(a) + 1 = x + 1$

Zu d)

$h_a(x) = mx$ ist Tangente an C_a. Also gilt: $m = f_a{}'(x) = 1 - a \cdot e^{-x}$

Weiter haben der Graph von h_a und C_a einen gemeinsamen Punkt – den Berührpunkt: Also: $h_a(x) = f_a(x)$

$\Rightarrow (1 - ae^{-x}) \cdot x = x + a \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow x = -1$

Daraus folgt für die Steigung m:

$m = 1 - a \cdot e^{1}$

und für die Gleichung der Tangente:

$h_a(x) = (1 - ae) \cdot x$