Modul 1: Weiterentwicklung der Aufgabenkultur

Aufgaben spielen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht eine zentrale Rolle und sollten nicht allein der Routinebildung dienen.
Ziel dieses Moduls ist die Entwicklung und der Einsatz von Aufgaben, die

- unterschiedliche Lösungswege ermöglichen
- früher Gelerntes systematisch wiederholen und mit neuem Stoff verknüpfen
- zur Übertragung auf neue Problemstellungen anregen

Zentrales Modul

Modul 1 ist ein zentrales Modul und sehr eng mit vielen weiteren Modulen verknüpft. Die Aufgabenstellung allein ist kein Maß für Unterrichtsqualität. Entscheidend ist die Einbettung in die gesamte Unterrichtssituation. Variable Lösungsansätze, Diskussion und Interpretation lassen auch "klassische" Aufgaben zu interessanten und wertvollen Elementen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts werden. Es besteht keine Veranlassung sie generell als überholt über Bord zu werfen.

Einige Beispiele

Besuchen Sie die nachfolgenden Seiten, um einen ersten Eindruck von der Vielfalt der Aufgaben und ihrer Einsatzmöglichkeiten zu gewinnen.

Zu den Beispielen >>

Hier finden Sie weiteres Material zur Information und für den Unterrichtseinsatz:

Modulbeschreibung des Gutachtens (pdf, 17 kB)

Peter Baptist (1998), Elemente einer neuen Aufgabenkultur (pdf, 327 kB)

Regina Bruder (2006), Erläuterungen zu Modul 1 - Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht (pdf, 237 kB)
Ergänzendes Arbeitsblatt (pdf, 12 kB)

P. Häußler, G. Lind (1998), Erläuterungen zu Modul 1 mit Beispielen für den Physikunterricht (gezippte MS-Word-Datei, 65 kB)

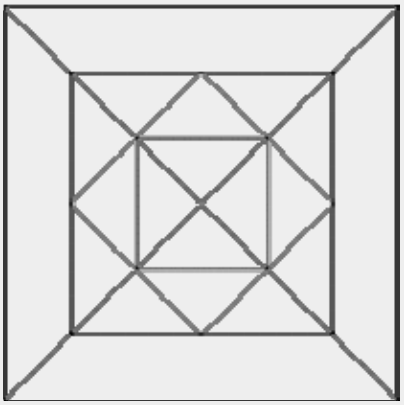
Andreas Büchter, Aufgabenkultur und Unterrichtsentwicklung, Präsentation April 2005 (pdf, 3,5 MB)

Die **Datenbank SMART** bietet Ihnen eine große Zahl an Aufgaben zum Mathematikunterricht. Neben einer "klassischen" Aufgabensammlung enthält SMART auch eine spezielle Abteilung SINUS-Transfer. Die Aufgaben dieser Sammlung wurden im Rahmen des Programms SINUS von Teilnehmerinnen und Teilnehmern entwickelt und gesammelt. Sie können diese Aufgaben individuell zusammenstellen und direkt im Unterricht einsetzen.
Zur Datenbank SMART >>
Kurze Anleitung zur Datenbank SMART (pdf, 261 kB)

Aufgabenbeispiele zu Modul 1

"Neue" Aufgaben sind oft gar nicht so neu. Es kommt eher darauf an, was man aus einer Aufgabe macht. Nachfolgend finden Sie einige Beispiele, die Ihnen Appetit auf mehr machen möchten.

Mathematik im Alltag



1. Entdecke möglichst viele Eigenschaften dieser Figur!
2. Überlege dir interessante Fragen zu dem Muster und lasse sie von deinem Nachbarn beantworten!
3. Präsentiere mit deinem Nachbarn gemeinsam die schönsten Ergebnisse im Klassenteam.

Aufgaben aus der Zeitung

In der Norderneyer Badezeitung war folgende Meldung zu lesen:

Fuhr vor einigen Jahren noch jeder zehnte Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile heute nur noch jeder fünfte. Doch auch fünf Prozent sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnellfahrer haben zu zahlen.

Nimm Stellung zum mathematischen Gehalt dieser Meldung!

Fermi-Fragen

Haare wachsen sehr langsam. In der heutigen Mathematikstunde wächst jedes Haar auf deinem Kopf ein kleines Stückchen heraus.
Stelle dir alle diese kleinen Stückchen aneinander gelegt vor. Welche Haarlänge wächst insgesamt während dieser Unterrichtstunde aus deinem Kopf heraus?

Die Beispiele stammen aus *"Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen" von V. Ulm, Kallmeyer 2004.*
Mehr Informationen zum Buch >>

Hier erfahren Sie mehr über

- das Öffnen von Aufgaben >>

- Variationen eines Themas >>

- das Lernen mit dynamischen Arbeitsblättern >>

Viele weitere Beispiele und Anregungen gibt es hier:

Datenbank SMART (Aufgabensammlung Mathematik zu SINUS-Transfer) >>

Offene Aufgabenstellungen

Phantasie haben heißt nicht, sich irgendetwas ausdenken, sondern aus den Dingen etwas machen.
Thomas Mann

Dieses Denkmal steht am Bundeskanzlerplatz in Bonn. Es zeigt den Kopf von Konrad Adenauer, der von 1949 bis 1963 erster Bundeskanzler der Bundesrepublik Deutschland war.

Wie groß müsste ein entsprechendes Denkmal sein, das Adenauer von Kopf bis Fuß im selben Maßstab darstellt?

Erkläre deine Überlegungen deinem Nachbarn.

Präsentiere mit deinem Nachbarn zusammen eure Ideen und Ergebnisse euren Mitschülern.

Bildquelle: GA-Archiv
Aufgabe nach: HERGET; JAHNKE; KROLL, Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I

Wie löst man diese Aufgabe? Hier finden Sie einige Anregungen zu Lösungsstrategien >>

Was sind offene Aufgaben?

Eine Aufgabe ist offen, wenn sie nicht kleinschrittig auf ein bestimmtes Ergebnis führt, es nicht nur eine Lösung bzw. einen Lösungsweg gibt.
Aber es ist nicht nur die Aufgabenstellung selbst, die ausmacht, ob eine Aufgabe offen oder geschlossen ist. Es geht auch und vor allem um die Phasen des Unterrichts, die sich um die Aufgabe herum entwickeln.

Aus geschlossenen Aufgaben können offene werden, wenn man

- Informationen weglässt
- Ausgangsbedingungen variiert
- eine Aufgabe umkehrt
- mehrere bzw. alle möglichen Lösungen suchen lässt
- das Vorgehen begründen lässt

Hier finden Sie weiteres Material zur Information und für den Unterrichtseinsatz:

W. Herget (2001), Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte ...
Messen, Schätzen, Überlegen - viele Wege, viele Antworten (pdf, 4 MB)

W. Herget, D. Scholz, Die etwas andere Aufgabe - aus der Zeitung, Kallmeyer 1998

Offene Aufgabenstellungen, ISB-Arbeitskreis (MS-Word, gezippt, 670 kB)

V. Ulm, "Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen", Kallmeyer 2004 (Kap. 3).
Mehr Informationen zum Buch >>

Weitere Materialien finden Sie in der Materialdatenbank zu SINUS-Transfer >>
Tipp: Geben Sie die Suchbegriffe "offene Aufgabe" ein, erweitern Sie die Suche auf kooperierende Materialserver (speziell Learnline-NRW bietet viele zusätzliche Aufgaben!).

Die Datenbank SMART (Aufgabensammlung Mathematik zu SINUS-Transfer) bietet ebenfalls eine große Zahl offener Aufgaben:
Zur Datenbank SMART >>

Der Fotoblog der "Mathekiste" enthält eine kontinuierlich wachsende Sammlung von Bildern mit Mathematik-Bezug.
Zum Fotoblog >>

Thema mit Variationen

Im Leben fragt derjenige, der etwas nicht weiß,
und bekommt Antwort von jemandem, der es weiß.

4. Variieren bedeutet auch Üben und Wiederholen
Ständig wird auf bereits behandelte Inhalte zurückgegriffen. Wir brauchen keine künstlichen Wiederholungsstunden, die wenig Nachhaltigkeit bewirken.

5. Variationsstrategien sind auch allgemeine Lösungsstrategien
Einige Beispiele: Spezialisieren, Verallgemeinern, (systematisches) Probieren. Frage: "Was passiert, wenn ...?"

6. "Mathematische Geschmacksbildung"
Aufgabenvariation verhilft auch zu einer Sensibilisierung für die Qualität mathematischer Fragestellungen.

7. "Schätze heben"
Aufgabenvariationen verdeutlichen oft erst die Reichhaltigkeit und Bedeutung der Start(Initial-)aufgabe

8. Aufgaben variieren verträgt sich mit allen Lehrplänen
Dieser Ansatz setzt keine neuen Inhalte voraus, er ist jederzeit praktizierbar. Nahezu jede Aufgabe eignet sich dazu. Es sind somit keine besonderen "neuen" Aufgaben erforderlich.

9. Variieren fördert das eigenständige Arbeiten
Ziel ist es, dass nach einer Einführungsphase die Schüler variieren und nicht die Lehrkraft. In der reflektierenden Phase müssen alle Vorschläge überdacht, bewertet, verworfen oder begründet werden.

Variationen eines Themas: Strategien

Phantasie haben heißt nicht, sich irgend etwas ausdenken, sondern aus den Dingen etwas machen.“
Thomas Mann

Manche Variationsmöglichkeiten einer Aufgabe liegen auf der Hand oder ergeben sich aus der abschließenden Diskussion bzw. Reflexion eines Lösungsweges oder Themas.

Einige Variationsverfahren

Die Variationsbreite lässt sich fördern, wenn einige Standardverfahren thematisiert und katalogisiert werden. Nachfolgend werden einige Verfahren vorgestellt und kurz erläutert. Sie entstammen dem Buch von H. Schupp, "Aufgabenvariation im Unterricht" (siehe unten), in dem Sie weitere Verfahren nachlesen können.

Wackeln: Geringfügig ändern
Beispiel: Ersetze in der Geradengleichung y = 3x+1 einzelne Parameter durch andere Zahlenwerte.

Ersetzen: Analogisieren
Beispiele:
Alle Dreiecke haben einen Umkreis. Gilt dies auch für alle Vierecke?
3 + 4 = 4 + 3. Gilt auch 3 - 4 = 4 - 3?

Weglassen: Verallgemeinern
Beispiele:
Vom Satz des Thales zum Umfangswinkelsatz.
Von der Gleichung y = 3x - 5 zur allgemeinen Geradengleichung y = mx + t.

Hinzufügen: Spezialisieren
Beispiel:
Betrachte statt der allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zunächst die Gleichung $x^2 + 4x + 4 = 0$.
Dieses Verfahren unterstützt die Verknüpfung von Neuem mit Bekanntem.

Zusammenlegen: Kombinieren
Beispiel:
$(a+b)^2$ ---> $(a+b+c)^3$
Kombinieren ist eine wichtige Strategie in der Endphase des Variierens: Man legt vorhandene Variationen zusammen.

Richtung wechseln: Umkehren
Beispiele:
a) Bekannt ist die Überprüfung der Gültigkeit von Umkehrsätzen.
b) Bestimme die Nullstellen (das Maximum) einer quadratischen Funktion. Finde eine (mehrere) weitere quadratische Funktionen mit diesen Nullstellen (diesem Maximum).

Rahmen wechseln: Kontext ändern
Beispiele:
Finde eine passende Situation zur Gleichung.
Welcher Graph beschreibt die Schilderung des Rennfahrers, Bergsteigers etc.?

Interessant machen: Anders bewerten
Beispiel: Autologos (siehe unten und Modul 5)
Das Logo besitzt offensichtlich eine Reihe geometrischer Eigenschaften. Viele Fragen können diese einfache Figur interessant machen:

- Wie ist dieses Logo aufgebaut?
- Gibt es Symmetrien?
- Welchen Anteil an der Gesamtfläche haben die Teilflächen?
- Ist das Logo schön?
- Wie ist dieses Logo entstanden?

Hier finden Sie weiteres Material zur Information und für den Unterrichtseinsatz:

H. Schupp, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (pdf, 180 kB)

H. Schupp,Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.
Hildesheim: Franzbecker 2002

B. Leneke, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (Teil 2) (pdf) >>

Mehr zum Thema Autologos in Modul 5 >>
Das Beispiel ist dem Artikel von E. Höniger, *Firmenlogos*, entnommen.
Sie können den Artikel hier herunterladen (pdf, 241 kb)

Variationen eines Themas: Unterrichtsablauf

Für das konkrete Variieren im Unterricht schlägt Schupp (siehe unten) folgende (idealtypisch zu verstehenden) Schritte vor:

Vorbereitung:

1. Vorgabe der Einstiegsaufgabe
2. Lösen dieser Aufgabe, nach Möglichkeit auf mehreren Wegen

In dieser Vorbereitungsphase kann der Unterricht durchaus traditionell verlaufen.

Freies Variieren

3. Aufforderung zum Variieren (ggf. unter Hinweis auf „What-if-not“)
4. Bewusst unkommentiertes Sammeln der Vorschläge

Diese Phase des „Brain-Storming“ sollte nicht durch vorschnelle Kommentare der Lehrperson beeinträchtigt werden. Schülerreaktionen (insbesondere auf offensichtlich unsinnige oder triviale Beiträge) wird man zulassen, wenn sie nicht verletzend sind.

Strukturierung und Bewertung

5. Gemeinsames Bewerten, Strukturieren und Ordnen der Vorschläge

Folgende Fragen können dabei hilfreich sein:

- Was ist leicht, schwer, zu schwierig für uns?
- Was folgt aus wem?
- Was machen wir zuerst?
- Was dann?
- Was heben wir uns bis zum Schluss auf?
- usw.

6. Versuch des Lösens ausgewählter Vorschläge

Das ist in recht unterschiedlichen Sozialformen, insbesondere auch in Gruppenarbeit möglich.

Ergebnispräsentation, Ausblick

7. Vorstellen der Lösungen
8. evtl. weitere Variationsvorschläge
9. evtl. Gesamtdarstellung aller Bemühungen

Hier finden Sie weiteres Material zur Information und für den Unterrichtseinsatz:

H. Schupp, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (doc, 146 kB)

H. Schupp,Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.
Hildesheim: Franzbecker 2002

Thema mit Variationen: Unterrichtsbeispiele

Es gibt kaum eine Aufgabe, die nicht zur Veränderung durch Variieren geeignet wäre.
Die folgenden Beispiele sind als Anregungen gedacht und lassen die Bandbreite der Möglichkeiten sichtbar werden.

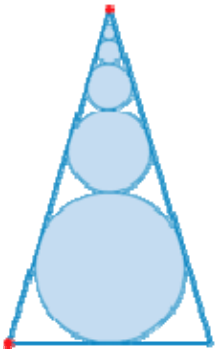
Beispiel 1: Addition natürlicher Zahlen

Addiere drei aufeinander folgende natürliche Zahlen.
Was fällt dir auf?

Hier finden Sie einige Vorschläge für Variationen >>

Beispiel 2: Kreise im Dreieck

Das Ausgangsproblem:



Kreise im Dreieck

In ein gleichschenkliges Dreieck mit
der Basis c = 8 cm und den Seiten a = b = 12 cm
werden fortwährend Kreise mit möglichst großen
Radien so einbeschrieben, dass der
nächstkleinere Kreis die Seiten a und b
und den vorhergehenden Kreis berührt.

Welchen Flächeninhalt haben alle Kreise zusammen?

Das Ausgangsproblem und Anregungen zur Variation stammen aus dem Buch von H. Schupp "Aufgabenvariation als Unterrichtsgegenstand" (siehe unten).

Diese anspruchsvolle Aufgabe eröffnet eine Fülle an Variationsmöglichkeiten.

Um Ihre eigene Kreativität ebenso wie die Kreativität Ihrer Schülerinnen und Schüler zu unterstützen, finden Sie auf den folgenden Seiten einige Vorschläge. Dynamische Figuren (GEONET -Applets) helfen bei der Erkundung der Aufgabenstellungen und regen zu vielen weiteren Variationen an.

Lesen Sie hier weiter >>

Hier finden Sie weiteres Material zur Information und für den Unterrichtseinsatz:

H. Schupp, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (Kurzfassung) (pdf, 180 kB)

H. Schupp,Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.
Hildesheim: Franzbecker 2002

Kreise im gleichschenkligen Dreieck

Das Ausgangsbeispiel:

In ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis c = 8 cm und den Seiten a = b = 12 cm werden fortwährend Kreise mit möglichst großen Radien so einbeschrieben, dass der nächstkleinere Kreis die Seiten a und b und den vorhergehenden Kreis berührt.
Welchen Flächeninhalt haben alle Kreise zusammen?

Das unten stehende Applet verdeutlicht nicht nur die Aufgabenstellung, sondern gibt Anregungen für Lösungsstrategien und weitere Fragestellungen.

Bitte beachten Sie: Um das Applet ausführen zu können, benötigt Ihr Browser Java-Unterstützung der Version 6 oder höher. Diese Unterstützung liefert die Firma Sun Microsystems mit ihrem Java™ Runtime Environment 6 oder höher.

Experimentieren Sie mit der Figur:
Durch Ziehen an den roten Punkten können Sie Basis und Schenkel des umhüllenden Dreiecks variieren.
Sie werden erkennen, dass maximal fünf einbeschriebene Kreise sichtbar werden.

Lösungsstrategien entwickeln

Die Erkundung des Lösungsweges bzw. die Entwicklung von Lösungsstrategien kann bereits zu ersten Variationen der Fragestellung führen.
Möglich sind z. B.

- Rückführung auf einen Kreis (Inkreis)
- Betrachtung zweier Kreise
- Verknüpfung mit zentrischer Streckung
- Zerlegung des Dreiecks in geeignete Trapeze
- usw.

Variationen des Themas

Die Beschäftigung mit der dynamischen Figur kann zu einer Vielzahl von neuen Aspekten führen. Nachfolgend einige Vorschläge:

- In welchem Verhältnis stehen die Radien der Kreise?
- Wie verändert sich dieses Verhältnis, wenn man die Basis des Dreiecks verdoppelt, verdreifacht, halbiert .....?
- Wie verändert sich dieses Verhältnis, wenn man die Schenkellänge (oder Höhe) des Dreiecks verdoppelt, verdreifacht, halbiert ....?
- Wählen Sie als umhüllendes Dreieck ein gleichseitiges Dreieck und untersuchen Sie diesen Spezialfall.
- Wie groß ist die Restfläche im Inneren des Dreiecks bei einem, zwei, drei ... einbeschriebenen Kreisen?
- Wie viel Prozent der Dreiecksfläche nimmt die Fläche eines, zweier, dreier ... Kreise ein?
- Gibt es ein Dreieck, bei dem Restfläche und Gesamtfläche der fünf Kreise gleich groß sind?
- Gibt es Dreiecke, bei denen die Fläche des größten Kreises und die Gesamtfläche aller restlichen Kreise gleich groß sind?
- Finden Sie Dreiecke, bei denen die Fläche der fünf einbeschriebenen Kreise mehr als 99% der Gesamtfläche aller (unendlich vielen) Kreise beiträgt.
- Wie groß ist der Gesamtumfang aller (zweier, dreier ...) Kreise?
- usw.

Es muss nicht immer rund sein - noch mehr Variationen

Lassen Sie sich von den Bildern am rechten Rand inspirieren zu weiteren Variationsmöglichkeiten. Sie finden auf der nächsten Seite ein weiteres Beispiel mit einbeschriebenen Rechtecken.

Zur Variation "Rechtecke im gleichschenkligen Dreieck" >>

Hier können Sie die GEONExT-Datei "Kreise im Dreieck" herunterladen (gxt, 4 kB)

Die freie Software GEONExT zur Weiterbearbeitung der Datei oder für eigene Konstruktionen finden Sie hier >>

Rechtecke im gleichschenkligen Dreieck

Dem umhüllenden Dreieck sind jetzt Rechtecke einbeschrieben. Es ist möglich, zunächst feste Maße für das umhüllende Dreieck und das einbeschriebene Rechteck vorzugeben. In Anlehnung an das Ausgangsbeispiel kann jetzt wieder die Gesamtfläche aller einbeschriebenen Rechtecke untersucht werden.

Bitte beachten Sie: Um das Applet ausführen zu können, benötigt Ihr Browser Java-Unterstützung der Version 6 oder höher. Diese Unterstützung liefert die Firma Sun Microsystems mit ihrem Java™ Runtime Environment 6 oder höher.

Experimentieren Sie mit der Figur:
Durch Ziehen an den roten Punkten können Sie Basis und Schenkel (Höhe) des umhüllenden Dreiecks sowie die Höhe des einbeschriebenen Rechtecks verändern. Sie können maximal zehn Rechtecke sichtbar machen.

Mögliche Aufgaben zur Figur

Zunächst können Sie die Fragestellungen des Ausgangsbeispiels (Kreise im Dreieck) an diese Variation anpassen.

Die Aufgabe ist auch geeignet zur Thematisierung von Näherungsverfahren zur Flächenbestimmung.
Einige Vorschläge:

- Untersuchen Sie, wie sich die gelbe Restfläche im Inneren des Dreiecks verändert, wenn man die Höhen der Rechtecke vergrößert bzw. verkleinert!
- Wählen Sie geeignete Maße für das Dreieck. Das Dreieck soll mit 100, 1.000, 10.000 .... Rechtecken gefüllt werden. Ist es möglich, mit diesen Rechtecken jeweils 99% der Dreiecksfläche zu füllen?
- Ändern Sie die Aufgabe ab: Wählen Sie für alle Rechtecke die gleiche Höhe. Finden Sie selbst interessante Ergebnisse, z. B. durch Vergleich mit der ursprünglichen Aufgabenstellung!

Hier können Sie die zugehörige GEONExT-Datei "Rechtecke im Dreieck" herunterladen (gxt, 4 kB)

Die freie Software GEONExT zur Weiterbearbeitung der Datei oder für eigene Konstruktionen finden Sie hier >>