- Umkehrfunktion -

Aufgabe 1: Fülle die Lücken wie im Beispiel gezeigt aus.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^2$ besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \boxed{\sqrt{x}}$.

a) Die Funktion $f(x) = x^3$ besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \boxed{\sqrt[3]{x}}$.

b) Die Funktion $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$ besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \boxed{\sqrt[7]{x^5}}$.

c) Die Funktion $f(x) = 4x$ besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \boxed{\frac{1}{4}x}$.

d) Die Funktion $f(x) = x + 2$ besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \boxed{x - 2}$.

Aufgabe 2: Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ hebt die Funktion $f(x)$ auf und anders herum. Dies ergibt sich zu Gleichung $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ oder $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$. Zeige an den gegebenen Funktionen und Umkehrfunktionen, dass beide Schreibweisen korrekt sind.

a) $f(x) = 5x \quad \wedge \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$

$$\begin{aligned}
x &= f\left(f^{-1}(x)\right) && \wedge \quad x = f^{-1}\left(f(x)\right) \\
x &= f\left(\frac{1}{5}x\right) && \wedge \quad x = f^{-1}(5x) \\
x &= 5\left(\frac{1}{5}x\right) && \wedge \quad x = \frac{1}{5}(5x) \\
x &= x && \wedge \quad x = x \quad \square
\end{aligned}$$

b) $f(x) = x^7 \quad \wedge \quad f^{-1}(x) = \sqrt[7]{x}$

$$\begin{aligned}
x &= f\left(\sqrt[7]{x}\right) && \wedge \quad x = f^{-1}\left(x^7\right) \\
x &= \sqrt[7]{x}^7 && \wedge \quad x = \sqrt[7]{x^7} \\
x &= x && \wedge \quad x = x \quad \square
\end{aligned}$$

c) $f(x) = 2x + 2 \quad \wedge \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$

$$\begin{aligned}
x &= f\left(f^{-1}(x)\right) && \wedge \quad x = f^{-1}\left(f(x)\right) \\
x &= f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) && \wedge \quad x = f^{-1}\left(2x + 2\right) \\
x &= 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2 && \wedge \quad x = \frac{1}{2}\left(2x + 2\right) - 1 \\
x &= (x - 2) + 2 && \wedge \quad x = (x + 1) - 1 \\
x &= x && \wedge \quad x = x \quad \square
\end{aligned}$$

d) $f(x) = 3x^2 - 4 \quad \wedge \quad f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{3(x+4)}}{3}$

$$\begin{aligned}
x &= f\left(f^{-1}(x)\right) && \wedge \quad x = f^{-1}\left(f(x)\right) \\
x &= f\left(\frac{\sqrt{3(x+4)}}{3}\right) && \wedge \quad x = f^{-1}\left(3x^2 - 4\right) \\
x &= 3\left(\frac{\sqrt{3(x+4)}}{3}\right)^2 - 4 && \wedge \quad x = \frac{\sqrt{3\left((3x^2 - 4) + 4\right)}}{3} \\
x &= 3\frac{3(x+4)}{9} - 4 && \wedge \quad x = \frac{\sqrt{3\left(3x^2\right)}}{3} \\
x &= (x + 4) - 4 && \wedge \quad x = \frac{\sqrt{\left(9x^2\right)}}{3} \\
x &= x && \wedge \quad x = x \quad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Die Funktion $G(n) = 1000\,€ \cdot 1,04^n$ beschreibt eine Kapitalanlage. Bestimme durch systematisches Probieren nach welchem Zeitraum n (in Jahren) das Kapital 1250 € beträgt.

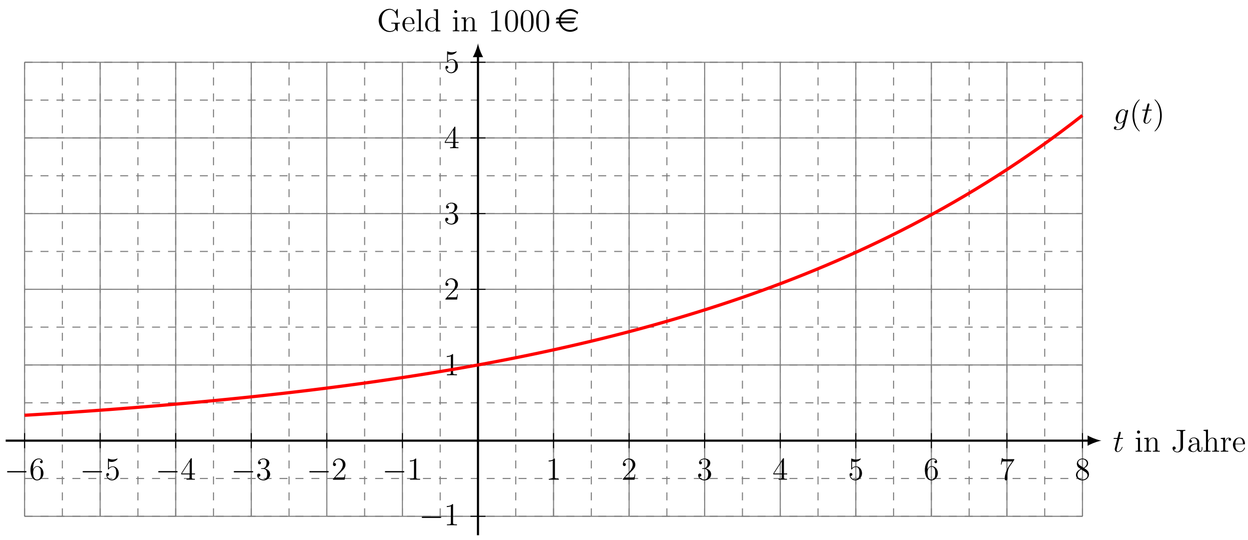
$$\begin{aligned}
G(4) &= 1000\,€ \cdot 1,04^4 = 1169,86\,€ \\
G(6) &= 1000\,€ \cdot 1,04^6 = 1265,32\,€ \\
G(5,5) &= 1000\,€ \cdot 1,04^{5,5} = 1240,75\,€ \\
G(5,7) &= 1000\,€ \cdot 1,04^{5,7} = 1250,52\,€
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Entnehme aus der Tabelle nach welchem Zeitraum t (in Jahren) das Kapital 1100 € beträgt und gib den Funktionsterm zu den Werten der Tabelle an.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
$k(t)$	889,00	924,56	961,54	1000	1040	1081,60	1124,86

Nach der Tabelle muss der Zeitpunkt bei $t = 2,5$ Jahren liegen. $k(t) = 1000\,€ \cdot 1,04^n$.

Aufgabe 5: Entnehme vom Graphen nach welchem Zeitraum t (in Jahren) das Kapital 2250 € beträgt und gib den Funktionsterm zu den Werten der Tabelle an.



Nach der Tabelle muss der Zeitpunkt bei $t = 4,5$ Jahren liegen. $g(t) = 1000\,€ \cdot 1,20^n$.

Aufgabe 6: Beschreibe die gemeinsame Problematik der Ergebnisse von Aufgabe 3, 4 und 5.

Keine der angewendeten Methoden liefert ein exaktes Ergebnis, da die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion noch nicht bekannt ist.

Aufgabe 7: Die Funktion $k(n) = 1000\,€ \cdot 1,02^n$ beschreibt eine Kapitalanlage. Schreibe einen Ansatz auf, um zu ermitteln, wann das Kapital exakt 1250 € beträgt.

$$k(n) \stackrel{!}{=} 1250\,€$$
$$1250\,€ = 1000\,€ \cdot 1,02^n$$

Aufgabe 8: Begründe, warum die dargestellte Umformung die Gleichung nicht nach x auflösen kann.

$$\begin{aligned} 2000 &= 100^x \\ \Rightarrow \quad \sqrt[x]{2000} &= 100 \end{aligned}$$

Da x nicht bekannt ist, kann man auch nicht die x-te Wurzel ziehen. x steht auch nicht alleine auf einer Seite, sodass die x-te Wurzel nicht die benötigt Umkehrfunktion ist. Eine Wurzel löst nicht zum Exponenten sondern zu Basis auf.

Aufgabe 9: Formuliere, was die gesuchte Umkehrfunktion leisten muss, damit die Gleichung aus Aufgabe 8 nach x aufgelöst werden kann. Formuliere dies als kurze Frage im Bezug zur Aufgabe.

Die Umkehrfunktion muss nach dem Exponenten fragen: „Wie oft musste die Basis 100 mit sich selbst multipliziert werden, damit 2000 raus kommt?“