

- Übersicht: Logarithmengesetze -

Wie für die *Potenzen* gelten auch für die *Logarithmen* Regeln, welche sich aus den *Potenzgesetzen* ableiten lassen.

- Da der *Logarithmus* die *Umkehrfunktion* der *Exponentialfunktion* ist, gilt:

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0 \quad (0.1)$$

- Da der *Logarithmus* die *Umkehrfunktion* der *Exponentialfunktion* ist, gilt:

$$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1 \quad (0.2)$$

- Da der *Logarithmus* die *Umkehrfunktion* der *Exponentialfunktion* ist, heben sich diese gegenseitig auf: $k^{\log_k(x)} = \log_k(k^x) = x$.

$$a^{\log_a n} = n \quad (0.3)$$

- Analog zur *Multiplikation* mit gleicher *Basis* ergibt sich aus dem dazugehörigen *Potenzgesetz* das *Logarithmengesetz*:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{(n+m)} \\ \log_a (a^n \cdot a^m) &= \log_a (a^{(n+m)}) \\ \log_a (a^n \cdot a^m) &= n + m \end{aligned} \quad (0.4)$$

Mit $u = a^m$ und $v = a^n$ substituiert ergibt sich $\log_a(u) = m$ und $\log_a(v) = n$, sodass sich der vorherige Ausdruck durch das *Einsetzen* verändert:

$$\begin{aligned} \log_a (a^n \cdot a^m) &= n + m \\ \log_a (a^{\log_a(u)} \cdot a^{\log_a(v)}) &= \log_a(u) + \log_a(v) \\ \log_a (u \cdot v) &= \log_a(u) + \log_a(v) \end{aligned} \quad (0.5)$$

- Analog zum vorherig gefundenen *Logarithmusgesetz* ergibt sich bei der *Division*:

$$\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m \quad (0.6)$$

- Die Fortsetzung der vorherigen Regeln liefert bei der *Substitution* $u = m$ und $\log_a(v) = n$:

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= a^{nm} \\ \log_a ((a^n)^m) &= \log_a (a^{nm}) \\ \log_a ((a^n)^m) &= nm \\ \log_a \left((a^{\log_a(v)})^u \right) &= \log_a(v)u \\ \log_a (v^u) &= u \log_a(v) \end{aligned} \quad (0.7)$$

- Wie auch bei der *Exponentialfunktion* kann die *Basis* gewechselt werden, indem das zuvor gefundene *Logarithmusgesetz* genutzt wird:

$$\begin{aligned} a^{\log_a(b)} &= b \\ \log_c (a^{\log_a(b)}) &= \log_c(b) \\ \log_a(b) \cdot \log_c(a) &= \log_c(b) \quad |: \log_a(b) \\ \log_a c &= \frac{\log_b c}{\log_b a} \end{aligned} \quad (0.8)$$

Zusammengefasst haben sich folgende Logarithmengesetze finden lassen:

$$\begin{aligned} \log_a(n \cdot m) &= \log_a n + \log_a m \\ \log_a \frac{n}{m} &= \log_a n - \log_a m \\ \log_a n^m &= m \cdot \log_a n \\ a^{\log_a n} &= n \\ \log_a n &= \frac{\log_b n}{\log_b a} \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a 1 &= 0 \end{aligned} \quad (0.9)$$