- Vertiefen - Lösungen -

Aufgabe 1: Löse die Gleichung nach x auf.

$a)$ $3^{2x-3} = 9^{-5x}$

$$3^{2x-3} = \left(3^2\right)^{-5x}$$
$$3^{2x-3} = 3^{-10x}$$
$$\log_3\left(3^{2x-3}\right) = \log_3\left(3^{-10x}\right)$$
$$2x - 3 = -10x \quad |+3+10x$$
$$12x = 3 \quad |:12$$
$$x = \frac{1}{4}$$

$b)$ $5^{4x-1} = 6^{x+3}$

$$5^{4x-1} = \left(5^{\log_5(6)}\right)^{x+3}$$
$$5^{4x-1} = 5^{x\log_5(6)+3\log_5(6)}$$
$$\log_5\left(5^{4x-1}\right) = \log_5\left(5^{x\log_5(6)+3\log_5(6)}\right)$$
$$4x - 1 = x\log_5(6) + 3\log_5(6) \quad |-x\log_5(6)+1$$
$$4x - x\log_5(6) = 1 + 3\log_5(6)$$
$$x\left[4 - \log_5(6)\right] = 1 + 3\log_5(6) \quad |[4-\log_5(6)]$$
$$x = \frac{1+3\log_5(6)}{4-\log_5(6)} \approx 1,503$$

Aufgabe 2: Begründe, warum mit deinem bekannten Wissen alle Gleichungen bis auf $a)$ und $b)$ algebraisch lösbar sind. Gib eine nicht algebraische Lösungsmöglichkeit an, die du bereits kennst.

$a)$ $4^{x-3} = 3x + 4$

$b)$ $\ln(1-2x) = 4x + 3$

$c)$ $5^{5x-3} = 5^{-3x+1}$

$d)$ $5^{5x-3} = 6^{-3x+1}$

$e)$ $-2x + 1 = 4x + 3$

$f)$ $x + 3 = x^2 - x - 3$

$g)$ $-2x^2 - 2x + 5 = x^2 - x - 3$

$h)$ $\sqrt{x-2} = \sqrt{-3x+13}$

In beiden Gleichungen $a)$ und $b)$ befindet sich ein Term als Argument in einer Funktion und der andere Term nicht. Es ist kein Operator bekannt, der diese beiden Terme gleichzeitig aus Funktionen heraus holt. Eine Option dennoch eine angenäherte Lösung der Gleichung zu erhalten, wäre das Zeichnen von Graphen oder das iterative systematische Probieren. Auch wäre der Einsatz von technischen Hilfsmitteln wie dem Taschenrechner oder dem PC möglich.

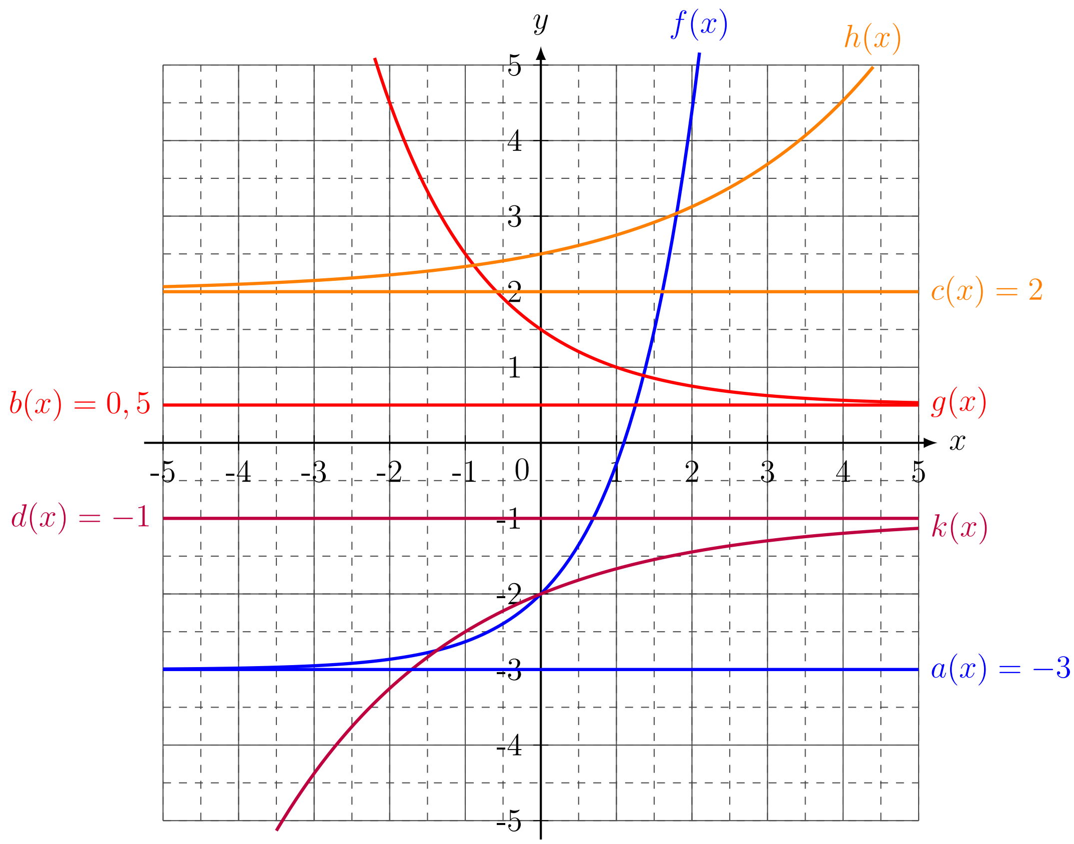
Aufgabe 3: Eine Asymptote beschreibt eine Funktion, gegen die die Funktion für besonders hohe oder niedrige Werte läuft und oftmals weniger komplex erscheint, indem die Asymptote eine besser analysierbare Funktion ist. Bei einfachen Exponentialfunktionen kann ein asymptotisches Verhalten gegen eine Konstante beobachtet werden. Bestimme aus der Funktionsgleichung die jeweilige Asymptotengleichung.

a) $f(x) = 3^x - 1 \quad \Rightarrow \quad a(x) = -1$

b) $g(x) = 2 \cdot 5^x + 3 \quad \Rightarrow \quad b(x) = 3$

c) $h(x) = -\frac{2}{3} \cdot e^{3x-5} + 7 \quad \Rightarrow \quad c(x) = 7$

Aufgabe 4: Bestimme aus den Graphen die jeweilige Asymptotengleichung und zeichne diese ein.



Aufgabe 5: Rekonstruiere die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion, die durch die Punkte A und B läuft. (Nutze als Ansatz die allgemeine Exponentialfunktionsgleichung $f(x) = Ae^{bx} + c$)

$a)\ \ A(0|2) \quad \wedge \quad B(2|5) \quad \wedge \quad f(x)$ läuft asymptotisch gegen 0 $\quad \Rightarrow \quad c = 0$

$I.\ \ 2 = Ae^{b \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad A = 2$

$II.\ \ 5 = 2e^{5b} \quad |: 2$

$2,5 = e^{5b}$

$\ln(2,5) = 5b \quad |: 5$

$\frac{1}{5}\ln(2,5) = b$

$\Rightarrow \quad f(x) = 2e^{\frac{1}{5}\ln(2,5)x}$

$b)\ \ A(1|3) \quad \wedge \quad B(9|19683) \quad \wedge \quad f(x)$ läuft asymptotisch gegen 0 $\quad \Rightarrow \quad c = 0$

$I.\ \ 3 = Ae^{b \cdot 1} \quad |: e^b \quad \Rightarrow \quad A = 3e^{-b}$

$II.\ \ 19683 = Ae^{b \cdot 9}$

$I. \cap II.\ \ 19683 = 3e^{-b}e^{9b} \quad |: 3$

$6561 = e^{8b}$

$\ln(6561) = 8b \quad |: 8$

$\frac{1}{8}\ln(6561) = b$

$\Rightarrow \quad A = 3e^{-\frac{1}{8}\ln(6561)} = 1$

$\Rightarrow \quad f(x) = e^{\frac{1}{8}\ln(6561)x}$

$c)$ $A(-2|-1{,}609375) \quad \wedge \quad B(4|4{,}5536) \quad \wedge \quad f(x)$ läuft asymptotisch gegen $-2 \quad \Rightarrow \quad c=-2$

$\Rightarrow \quad A_1(-2|0{,}390625) \quad \wedge \quad B_1(4|6{,}5536) \quad \wedge \quad f(x)$ läuft asymptotisch gegen $0 \quad \Rightarrow \quad c=0$

$I.\ \ 0{,}390625 = Ae^{b\cdot(-2)} \quad \Big|: e^{-2b} \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}390625e^{2b}$

$II.\ \ 6{,}5536 = Ae^{b\cdot 4}$

$I. \cap II.\ \ 6{,}5536 = 0{,}390625e^{2b}e^{4b} \quad |: 0{,}390625$

$16{,}777216 = e^{6b}$

$\ln(16{,}777216) = 6b \quad |: 6$

$\frac{1}{6}\ln(16{,}777216) = b$

$\Rightarrow \quad A = 0{,}390625e^{2\frac{1}{6}\ln(16{,}777216)} = 1$

$\Rightarrow \quad f(x) = e^{\frac{1}{3}\ln(16{,}777216)x} - 2$

Aufgabe 6: Begründe, warum die Äquivalenzumformung bei $a)$ erlaubt ist und bei $b)$ nicht.

$a)$ $(3-x)e^{ax} = 0 \quad |: e^{ax}$

$b)$ $(3-x)x = 0 \quad |: x$

Da e^{ax} asymptotisch gegen Null läuft, aber niemals Null werden kann, kann durch e^{ax} dividiert werden. Da x allerdings Null sein kann, kann nicht durch x dividiert werden.