- Komplexaufgaben - Lösungen -

Aufgabe 1: Die Luft kann je nach Temperatur einen bestimmten Wert von Wassermolekülen aufnehmen. Wird dieser Wert überschritten, wird das Wasser von der Luft abgeschieden. Die Luftfeuchtigkeitssättigungsfunktion $S(T)$ kann approximiert als $S(T) = 4{,}6389\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} \cdot e^{0{,}06223\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\cdot T}$ angenommen werden.

$a)$ Um Schimmelbefall in einer Wohnung zu vermeiden sollte die relative Luftfeuchtigkeit nicht 65% des Luftfeuchtigkeitssättigungswertes überschreiten. Nach einer Nacht beträgt die relative Luftfeuchtigkeit bei einer Raumtemperatur von 19°C im Schlafzimmer 70%. Die Außentemperatur beträgt an diesem Tag 28°C bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 45%. Berechne, ob sich eine Lüftung lohnt und berechne ebenfalls, wie weit sich das Schlafzimmer erwärmen, um auch ohne Lüftung unter eine relative Luftfeuchtigkeit von 65% zu kommen.

$$
\begin{aligned}
70\% \cdot S(T = 19^\circ\mathrm{C}) &= 70\% \cdot 4{,}6389\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} \cdot e^{0{,}06223\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\cdot 19^\circ\mathrm{C}} \approx 10{,}5928\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}\\
45\% \cdot S(T = 28^\circ\mathrm{C}) &= 45\% \cdot 4{,}6389\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} \cdot e^{0{,}06223\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\cdot 28^\circ\mathrm{C}} \approx 11{,}9223\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}
\end{aligned}
$$

Würde sich die Raumtemperatur nicht verändern, würde die relative Luftfeuchtigkeit im Schlafzimmer durch das Lüften erhöhen, sodass es nicht sinnvoll wäre zu lüften.

$$
\begin{aligned}
S(T) \overset{!}{=} 10{,}5928\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} &= 65\% \cdot 4{,}6389\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} \cdot e^{0{,}06223\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\cdot T} \quad \Big| : \left(65\% \cdot 4{,}6389\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}\right)\\
3{,}5130 &= e^{0{,}06223\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\cdot T}\\
\Rightarrow \quad \ln(3{,}5130) &= 0{,}06223\frac{1}{^\circ\mathrm{C}} \cdot T \quad \Big| : 0{,}06223\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\\
20{,}1909^\circ\mathrm{C} &\approx T \quad \Big| : 0{,}06223\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}
\end{aligned}
$$

Die Raumtemperatur müsste sich mindestens auf $20{,}2$°C erhöhen, sodass keine Bedingungen für einen Schimmelbefall bestehen, was bei einer so erhöhten Außentemperatur sehr realistisch erscheint, da das Schlafzimmer mit der Außenwelt in einem Temperaturaustausch steht.

b) An einem schwülen Sommertag wurde eine relative Luftfeuchtigkeit von 72% bei einer Temperatur von 32°C angegeben. Berechne, bei welcher Temperatur dieser relative Wert eine Sättigung wäre.

$$\begin{aligned}
72\% \cdot S(T = 32°\mathrm{C}) &= 72\% \cdot 4,6389 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} \cdot e^{0,06223 \frac{1}{°\mathrm{C}} \cdot 32°\mathrm{C}} \approx 24,4672 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} \\
S(T) \overset{!}{=} 24,4672 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} &= 4,6389 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} \cdot e^{0,06223 \frac{1}{°\mathrm{C}} \cdot T} \quad \Big|: 4,6389 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} \\
5,27435 &= e^{0,06223 \frac{1}{°\mathrm{C}} T} \\
\Rightarrow \quad \ln(5,27435) &= 0,06223 \frac{1}{°\mathrm{C}} \cdot T \quad \Big|: 0,06223 \frac{1}{°\mathrm{C}} \\
26,7211°\mathrm{C} &= T
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Radioaktive Zerfälle sind stochastische Prozesse, welche sich im Mittelwert anhand einer Exponentialfunktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{\tau} \cdot t}$ darstellen lassen, während τ die Halbwertszeit angibt.

a) Nach einem Messzeitraum von 25 min wurden $8,24 \cdot 10^9$ Zerfälle registriert. Die untersuchte Probe besteht nach Berechnungen über die Masse der Probe aus rund $6,0221 \cdot 10^{17}$ Atomen. Berechne die Halbwertszeit der Probe.

$$\begin{aligned}
N(t) &= N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{\tau} \cdot t} \quad |: N_0 \\
\frac{N(t)}{N_0} &= e^{-\frac{\ln(2)}{\tau} \cdot t} \\
\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) &= -\frac{\ln(2)}{\tau} \cdot t \quad |\cdot \tau \\
\tau \left(\ln(N(t)) - \ln(N_0)\right) &= -\ln(2) \cdot t \quad |: \left(\ln(N(t)) - \ln(N_0)\right) \\
\tau &= -\frac{\ln(2) \cdot t}{\ln(N(t)) - \ln(N_0)} \\
\tau &= -\frac{\ln(2) \cdot 25\,\mathrm{min}}{\ln(6,0221 \cdot 10^{21} - 8,24 \cdot 10^{13}) - \ln(6,0221 \cdot 10^{21})} \\
\tau &\approx 1,26644 \cdot 10^9\,\mathrm{min} \approx 2407,86\,\mathrm{a}
\end{aligned}$$

b) Die Gleichung für die radioaktiven Zerfälle kann auch durch $A(t) = N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln(2)}{\tau} \cdot t}\right)$ beschrieben werden. Erkläre was in dieser Gleichung der Funktionswert gegenüber der ersten Gleichung angibt.

Die Gleichung beschreibt im Gegensatz zu Funktion $N(t)$ nicht die noch übrigen Atome, sondern gibt die Anzahl der zerfallenen Atome an.

Aufgabe 3: Durch die Inflation verliert das Geld jedes Jahr im Schnitt $2,3\%$ an Wert. Berechne unter der Annahme, dass sich die wirtschaftliche Lage ansonsten nicht verändert, nach wie vielen Jahren die Staatsschuldenquote eines EU-Staates von 75% unter die, in den Maastricht-Verträgen festgelegte, Grenze von 60% fällt.

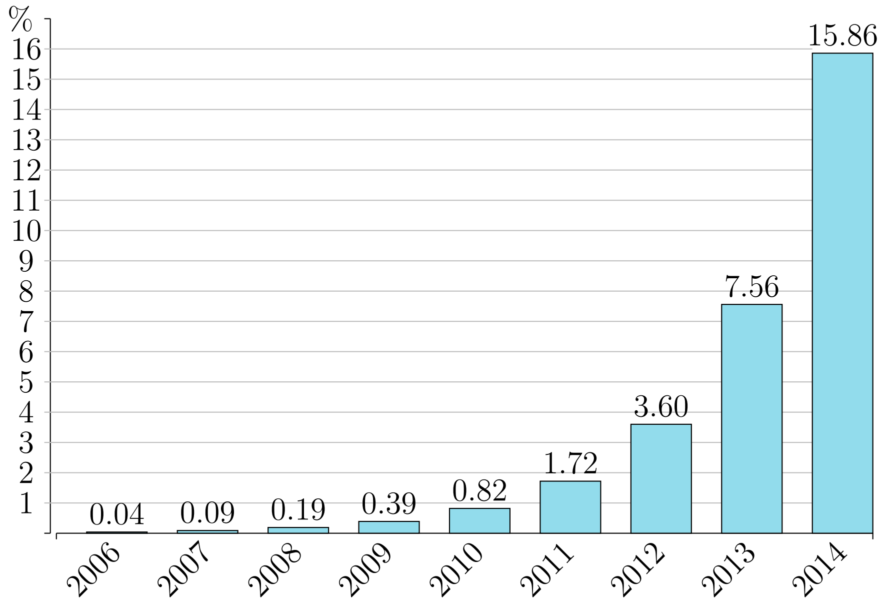
$$\begin{aligned} 0,6 &= 0,75 \cdot (1-0,023)^n \quad |: 0,75 \\ 0,8 &= 0,977^n \\ \Rightarrow \quad \log_{0,977}(0,8) &= n \approx 9,5899\,\mathrm{a} \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Durch eine Mutation ist ein Virus deutlich ansteckender geworden als die vorherige Variante. Forscher konnten die Entwicklung anhand der ersten Daten als Funktion vorhersagen. Die Verdrängung der alten Virusvariante gehorcht der Gleichung $a(m) = -\frac{2}{7} \cdot e^{-m+1} + 1$, wobei die Funktion erst ab dem Zeitpunkt $m \geq 0$ Gültigkeit besitzt. Hierbei gibt die Funktion $a(m)$ den Anteil in Abhängigkeit der Monate m aller Infektionen mit dem mutierten Virus zur Gesamtinfektionsanzahl an. Berechne, nach wie vielen Monaten 95% des Infektionsgeschehens durch die neue Mutation dominiert wird.

$$\begin{aligned} a(m) \overset{!}{=} 0,95 &= -\frac{2}{7} \cdot e^{-m+1} + 1 \quad |-1 \\ -0,05 &= -\frac{2}{7} \cdot e^{-m+1} \quad \left| \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \right. \\ \frac{7}{40} &= e^{-m+1} \\ \ln\left(\frac{7}{40}\right) &= -m+1 \quad |-1 \\ \ln\left(\frac{7}{40}\right) - 1 &= -m \quad |\cdot(-1) \\ 1 - \ln\left(\frac{7}{40}\right) &= m \approx 2,7430 \end{aligned}$$

Nach $2,7430$ Monaten hat die neue Virusvariante eine 95%-ige Dominanz erreicht.

Aufgabe 5: Bearbeite alle Teilaufgaben zu dem Säulendiagramm.



$a)$ Bestimme die Funktionsgleichung aus den abgebildeten Werten des Säulendiagramms unter der Annahme, dass 2006 das Jahr $x = 0$ ist.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= Ae^{bx} \\
A(0|0,04) \quad \Rightarrow \quad A &= 0,04 \\
B(8|15,86) \quad \Rightarrow \quad 15,86 &= 0,04e^{8b} \qquad |: 0,04 \\
\frac{15,86}{0,04} &= e^{8b} \\
\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{15,86}{0,04}\right) &= 8b \qquad |: 8 \\
\frac{1}{8}\ln\left(\frac{15,86}{0,04}\right) &= b \approx 0,7478 \\
\Rightarrow \quad f(x) &= 0,04e^{0,7478x}
\end{aligned}
$$

b) Berechne, wann das Wachstum genau 5% im Vergleich zu 2006 betrug.

$$
\begin{aligned}
f(x) \stackrel{!}{=} 5 &= 0,04e^{0,7478x} \\
5 &= 0,04e^{0,7478x} \qquad |: 0,04 \\
\frac{5}{0,04} &= e^{0,7478x} \\
\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{5}{0,04}\right) &= 0,7478x \quad |: 0,7478 \\
\frac{1}{0,7478}\ln\left(\frac{5}{0,04}\right) &= x \approx 6,4567
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6: Das exponentielles Wachstum im Finanzwesen wird in der Gesellschaft oftmals übersehen, obwohl es dramatische Auswirkungen haben kann.

a) Ein gut bezahlter Arbeiter bekommt 2000 € jeden Monat ausgezahlt und muss 700 € für seine Mietwohnung monatlich bezahlen. Berechne, nach wie vielen Jahren der Arbeiter die Hälfte seines Geldes für die Miete aufwenden muss, wenn sich sein Gehaltswert nicht verändert, aber hingegen die Inflationsrate von $2,6\%$ auf die Mietenkosten umgelegt wird.

$$
\begin{aligned}
1000\,€ &= 700\,€ \cdot 1,026^n \quad |: 700\,€ \\
\frac{10}{7} &= 1,026^n \\
\Rightarrow \quad \log_{1,026}\left(\frac{10}{7}\right) &= n \approx 13,896
\end{aligned}
$$

b) Der Arbeiter aus Aufgabenteil *a)* kann zum aktuellen Zeitpunkt monatlich 200 € zurücklegen. Berechne den Zeitpunkt, wann seine Rücklagen wegen der inflationsausgleichenden Mietpreiserhöhung nicht mehr wachsen.

$$
\begin{aligned}
900\,€ &= 700\,€ \cdot 1,026^n \quad |: 700\,€ \\
\frac{9}{7} &= 1,026^n \\
\Rightarrow \quad \log_{1,026}\left(\frac{9}{7}\right) &= n \approx 9,791
\end{aligned}
$$

c) Gib die gesamte Ersparnissumme bis zu den Zeitpunkt von 10 Jahren an.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{10} 12 \cdot (900\,€ - 700\,€ \cdot 1,026^n) \\
&= 13400,52\,€
\end{aligned}
$$

d) Im Immobiliensektor wurde ein jährlich wachsendes inflationsbereinigtes Gegenwertwachstum von $0,4\%$ festgestellt, da immer weniger Häuser gebaut werden dürfen, während die Inflationsrate im Schnitt $2,6\%$ beträgt. Berechne wie viel Geld ein Eigentümer einer 500000 €-Wohnung gegenüber einem Nichteigentümer über einen Zeitraum von 10 Jahren gewinnt.

$$\begin{aligned} K(n) &= 500000\,€ \cdot (1 + 0,026 + 0,004)^n \\ K(n = 10) &= 500000\,€ \cdot (1,03)^{10} \\ &= 671958\,€ \\ &\Rightarrow \quad 171958\,€ \end{aligned}$$

e) Begründe mit den Ergebnissen aus den vorherigen Teilaufgaben, welche Personengruppen durch das exponentielle Wachstum im Finanzwesen profitieren.

Menschen, die Eigentum besitzen, profitieren, während Menschen ohne Eigentum nahezu keine Chance auf den Erwerb des Eigentums haben. Somit profitieren die reicheren Menschen auf Kosten der ärmeren Menschen, während die ärmeren Menschen durch die Lohnerhöhungen das Gefühl bekommen, dass es bergauf geht, da die Inflation nicht in den Zahlen erkennbar wird.