

# MATHE 364

## 13.04. eine ältere MSA-Aufgabe zum Modellieren mit Funktionen

- a) **Bearbeite** die Aufgabe „Vertretungsplan-App“! Nutze dabei deine Notizen aus der Lesezeit bzw. der Musterlösung vom 12.04.. **Notiere** deine Bearbeitungszeit.

### B3: Funktionen

### Vertretungsplan-App

Paul und Janine programmieren eine App für den Vertretungsplan an ihrer Schule. Nach einem Tag nutzen sechs Schülerinnen und Schüler die App. An den darauffolgenden Tagen verdreifacht sich die Zahl täglich, so dass die App schon am vierten Tag von 162 Nutzern verwendet wird.

- 1 a) Mit Hilfe einer Tabelle wollen Paul und Janine sich einen Überblick verschaffen:

Anzahl der Tage ab Upload	Anzahl der Nutzer
0	2
1	6
2	
3	
4	162

**Ergänze** die fehlenden Anzahlen der Nutzer.

2 P.

- 1 b) Die beiden überlegen, mit welcher Funktion man dieses Wachstum darstellen kann. Sie haben zwei Vermutungen:  $f_1(x) = 2 \cdot 2^x$  und  $f_2(x) = 3 \cdot 3^x$ .

Dabei steht  $x$  für die Anzahl der Tage seit dem Upload der App.

**Zeige**, dass beide Funktionsterme nicht richtig sind.

2 P.

- 2 a) Die tatsächliche Funktion für die ersten vier Tage lautet  $f(x) = 2 \cdot 3^x$ .

Paul behauptet: „Wenn das so weitergeht, haben wir bald 10 000 Nutzer.“

2 P.

**Berechne**, nach wie vielen Tagen mehr als 10 000 Nutzer zu erwarten wären.

- 2 b) Am fünften und sechsten Tag nimmt die Anzahl jeweils nur um 170 zu.

Anzahl der Tage ab Upload	Anzahl der Nutzer
4	162
5	
6	

**Ergänze** die Tabelle.

2 P.

- 2 c) Für den fünften und sechsten Tag lässt sich die Entwicklung der Nutzerzahlen durch eine lineare Funktion der Form  $g(x) = m \cdot x + b$  beschreiben. Dabei ist  $g(4) = 162$ .

**Erläutere**, welche Bedeutung  $m = 170$  in diesem Zusammenhang hat.

1 P.

**Berechne** den Achsenabschnitt  $b$ .

1 P.

... weiter auf der nächsten Seite

### B3: Funktionen

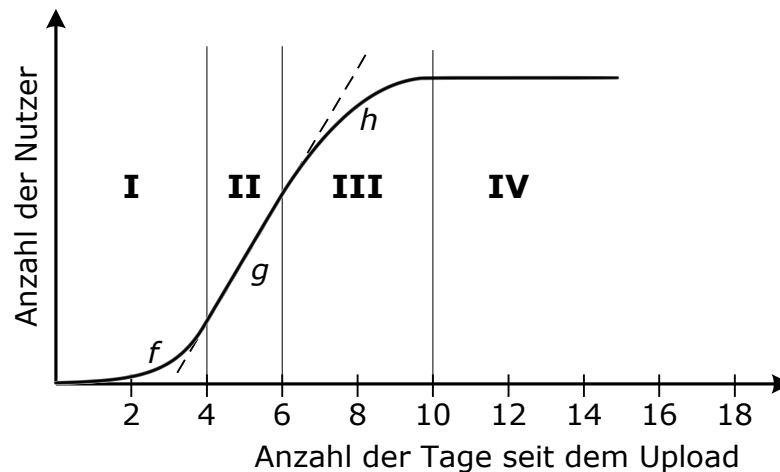
### Vertretungsplan-App

**3 a)** In der Realität können weder die exponentielle noch die lineare Zunahme der Nutzerzahlen die Situation auf Dauer richtig beschreiben.

**Nenne** einen Grund dafür.

1 P.

**3 b)** Der abgebildete Graph stellt die Zunahme der Nutzerzahlen realistischer dar. Man kann vier Abschnitte unterscheiden:



- |             |                                |                               |
|-------------|--------------------------------|-------------------------------|
| <b>I:</b>   | Uploadzeitpunkt bis zum 4. Tag | $f$ , exponentielle Zunahme   |
| <b>II:</b>  | 4. Tag bis zum 6. Tag          | $g$ , lineare Zunahme         |
| <b>III:</b> | 6. Tag bis zum 10. Tag         | $h$ , parabelförmiger Verlauf |
| <b>IV:</b>  | ab dem 10. Tag.                |                               |

**Interpretiere** den Verlauf des Graphen ab dem 10. Tag.

1 P.

**(4)** Für den Zeitraum vom 6. Tag bis zum 10. Tag kann der weitere Verlauf des Graphen durch  $h(x) = -20x^2 + 400 \cdot x - 1178$  beschrieben werden.

**4 a)** **Skizziere** die Parabel.

1 P.

**4 b)** **Zeige**, dass die Parabel ihren Scheitelpunkt an der Stelle  $x = 10$  hat.

**Berechne**, wie viele Nutzer am 10. Tag zu erwarten sind.

2 P.

**b) Vergleiche** deine Lösungen mit der Musterlösung (siehe heutige Lösungen).

**c) Bewerte** deine Lösungen mit der angegebenen Punktzahl.

**Vergleiche** deine Bearbeitungszeit mit der verfügbaren Zeit in der Prüfung.

**Berechne** deinen persönlichen Quotienten „Minuten pro Bewertungspunkt“.

**Markiere** „schnell verdiente Punkte“ grün und „mühsam verdiente Punkte“ rot.

**d) Nenne** Begriffe, die in den Aufgaben auftreten oder Hintergrundwissen sind.

- a) **Bearbeite** die Aufgabe „Vertretungsplan-App“! ✓ Nutze dabei deine Notizen aus der Lesezeit bzw. der Musterlösung vom 12.04.. **Notiere** deine Bearbeitungszeit.

### B3: Funktionen

### Vertretungsplan-App

Paul und Janine programmieren eine App für den Vertretungsplan an ihrer Schule. Nach einem Tag nutzen sechs Schülerinnen und Schüler die App. An den darauffolgenden Tagen verdreifacht sich die Zahl täglich, so dass die App schon am vierten Tag von 162 Nutzern verwendet wird.

- 1 a) Mit Hilfe einer Tabelle wollen Paul und Janine sich einen Überblick verschaffen:

Anzahl der Tage ab Upload	Anzahl der Nutzer
0	2
1	6
2	18
3	54
4	162

**Ergänze** die fehlenden Anzahlen der Nutzer. [siehe Tabelle](#) 2 P.

- 1 b) Die beiden überlegen, mit welcher Funktion man dieses Wachstum darstellen kann. Sie haben zwei Vermutungen:  $f_1(x) = 2 \cdot 2^x$  und  $f_2(x) = 3 \cdot 3^x$ .

Dabei steht  $x$  für die Anzahl der Tage seit dem Upload der App.

**Zeige**, dass beide Funktionsterme nicht richtig sind. 2 P.

z. B.  $f_1(1) = 2 \cdot 2^1 = 2 \cdot 2 = 4 \neq 6$  und  $f_2(1) = 3 \cdot 3^1 = 3 \cdot 3 = 9 \neq 6$

- 2 a) Die tatsächliche Funktion für die ersten vier Tage lautet  $f(x) = 2 \cdot 3^x$ .

Paul behauptet: „Wenn das so weitergeht, haben wir bald 10 000 Nutzer.“

**Berechne**, nach wie vielen Tagen mehr als 10 000 Nutzer zu erwarten wären.

Probieren  $2 \cdot 3^7 = 4374$ ,  $2 \cdot 3^8 = 13122$  2 P.

$2 \cdot 3^x = 10000 \Leftrightarrow 3^x = 5000 \Leftrightarrow x = \log_3(5000) \approx 7,7527$

- 2 b) Am fünften und sechsten Tag nimmt die Anzahl jeweils nur um 170 zu.

Anzahl der Tage ab Upload	Anzahl der Nutzer
4	162
5	332
6	502

**Ergänze** die Tabelle. [siehe Tabelle](#) 2 P.

- 2 c) Für den 5. und 6. Tag lässt sich die Entwicklung der Nutzerzahlen durch eine lineare Funktion der Form  $g(x) = m \cdot x + b$  beschreiben. Dabei ist  $g(4) = 162$ .

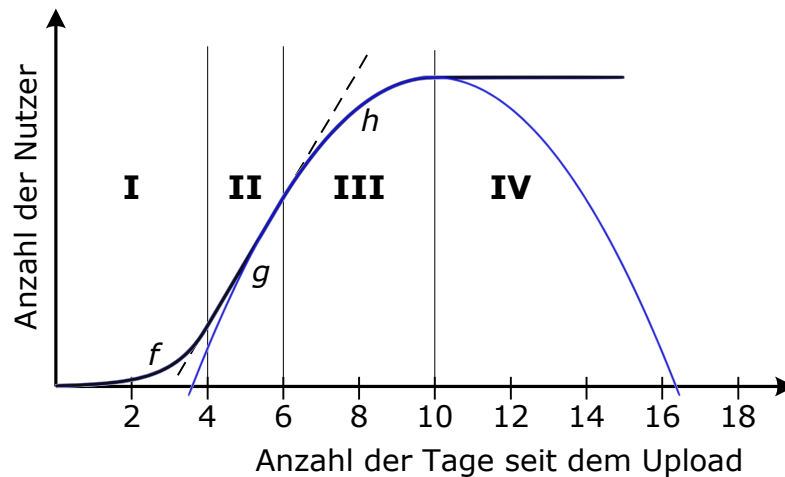
**Erläutere**, welche Bedeutung  $m = 170$  in diesem Zusammenhang hat. 1 P.

$m$  Steigung: tägliche Zunahme um 170, also 170 pro Tag

**Berechne** den Achsenabschnitt  $b$ . 1 P.

$162 = 170 \cdot 4 + b \Leftrightarrow 162 - 170 \cdot 4 = b \Leftrightarrow b = -518$

- 3 a)** In der Realität können weder die exponentielle noch die lineare Zunahme der Nutzerzahlen die Situation auf Dauer richtig beschreiben. **Nenne** einen Grund **1 P.** dafür. *Die Schülerzahl ist begrenzt; die Nutzerzahl kann nicht unbegrenzt wachsen*
- 3 b)** Der abgebildete Graph stellt die Zunahme der Nutzerzahlen realistischer dar. Man kann vier Abschnitte unterscheiden:



- |             |                                |                               |
|-------------|--------------------------------|-------------------------------|
| <b>I:</b>   | Uploadzeitpunkt bis zum 4. Tag | $f$ , exponentielle Zunahme   |
| <b>II:</b>  | 4. Tag bis zum 6. Tag          | $g$ , lineare Zunahme         |
| <b>III:</b> | 6. Tag bis zum 10. Tag         | $h$ , parabelförmiger Verlauf |
| <b>IV:</b>  | ab dem 10. Tag.                |                               |

**Interpretiere** den Verlauf des Graphen ab dem 10. Tag. **1 P.**

*Die maximale Nutzerzahl ist erreicht, steigt nicht weiter an und sinkt nicht.*

- (4)** Für den Zeitraum vom 6. Tag bis zum 10. Tag kann der weitere Verlauf des Graphen durch  $h(x) = -20x^2 + 400x - 1178$  beschrieben werden.

**4 a)** **Skizziere** die Parabel. *siehe Abbildung* **1 P.**

**4 b)** **Zeige**, dass die Parabel ihren Scheitelpunkt an der Stelle  $x = 10$  hat.

**Berechne**, wie viele Nutzer am 10. Tag zu erwarten sind. **2 P.**

*Taschenrechner:  $h(10) = 822$*

$$\begin{aligned}
 & -20 \cdot x^2 + 400x - 1178 = \\
 & -20 \cdot (x^2 - 20x) - 1178 = \\
 & -20 \cdot ((x - 10)^2 - 100) - 1178 = \\
 & -20 \cdot (x - 10)^2 + 2000 - 1178 = -20 \cdot (x - 10)^2 + 822
 \end{aligned}$$

*Da der Streckungsfaktor  $-20$  und der Funktionswert an der Stelle 10, nämlich 822, bekannt sind, kann man rückwärts rechnen.*

**b) Vergleiche** deine Lösungen mit der Musterlösung (siehe heutige Lösungen). ✓

**c) Bewerte** deine Lösungen mit der angegebenen Punktzahl. **individuelle Zahlen**

**Vergleiche** deine Bearbeitungszeit mit der verfügbaren Zeit in der Prüfung.

Individueller Zeitbedarf; in der Prüfung stehen 90 Minuten für vier Komplexaufgaben zur Verfügung. Du solltest die Aufgabe also in gut 20 Minuten bearbeitet haben.

**Berechne** deinen persönlichen Quotienten „Minuten pro Bewertungspunkt“.

In 90 Minuten können insgesamt 48 Punkte erarbeitet werden, das bedeutet etwas weniger als 2 Minuten pro Punkt

**Markiere** „*schnell verdiente Punkte*“ grün und „*mühsam verdiente Punkte*“ rot. individuelle Einschätzungen

**d) Nenne** Begriffe, die in den Aufgaben auftreten oder Hintergrundwissen sind.

explizit genannt: Wachstum, Funktion, lineare Funktion, Achsenabschnitt, exponentielle Zunahme, lineare Zunahme, Parabel, Scheitelpunkt

Hintergrundwissen:

lineares Wachstum – Addieren eines Zuwachses, hier 170

exponentielles Wachstum – Multiplizieren mit einem Zuwachsfaktor, hier 3

parabelförmiger Verlauf – Aussehen einer nach unten geöffneten Parabel