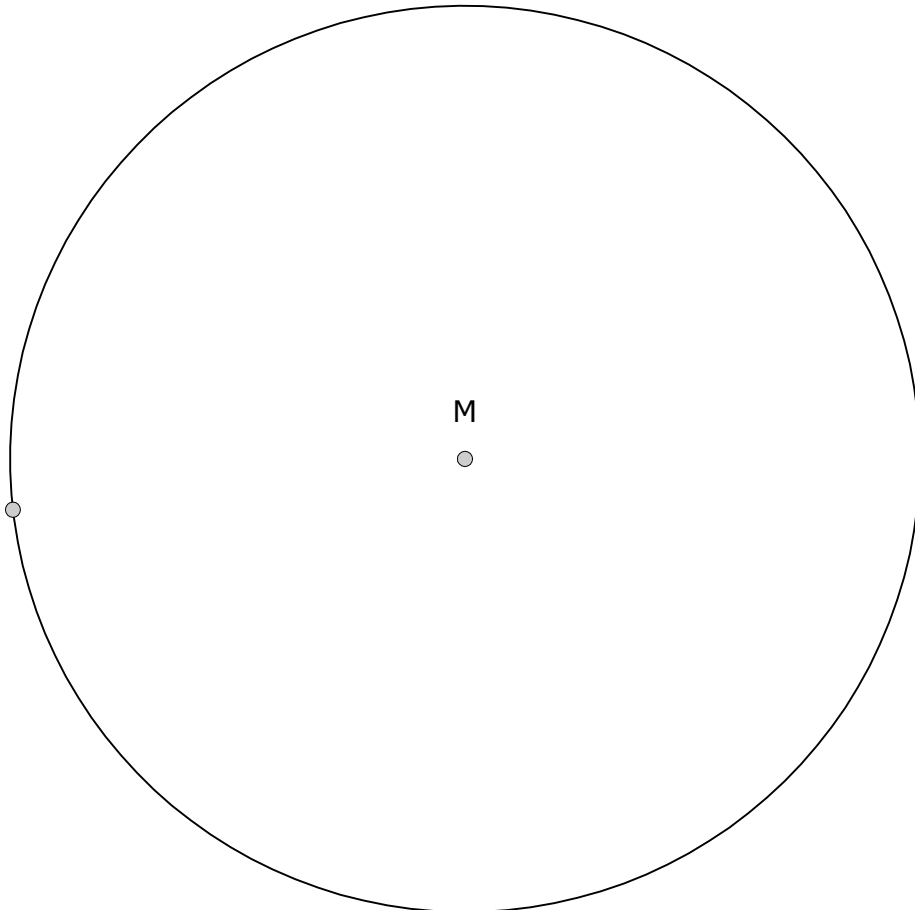


MATHE 364

08.04. Drei Punkte auf einem Kreis

Ein Dreieck hat die Maße $a = 6 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$ und $\alpha = 30^\circ$. Der Umkreis des Dreiecks hat den Durchmesser $d = 12 \text{ cm}$.

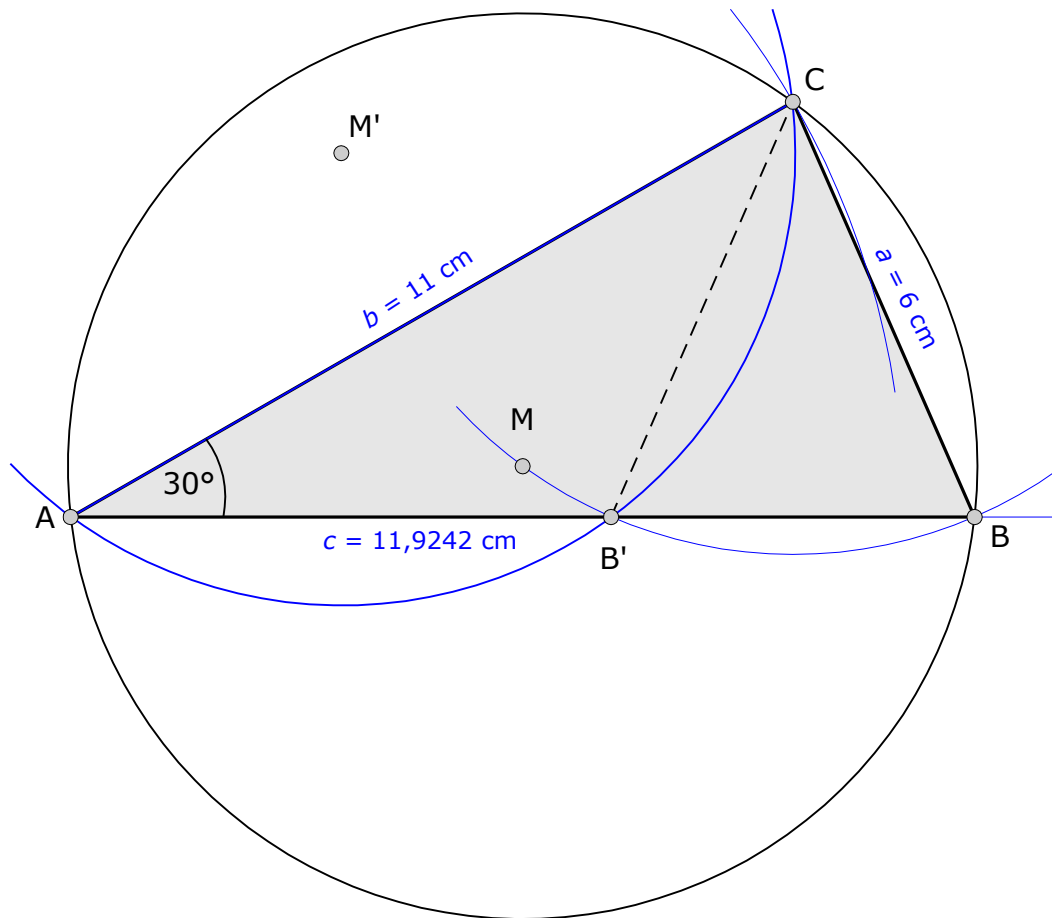


Wahlaufgaben: Bearbeite *mindestens drei* der folgenden Teilaufgaben.

- a) **Weise nach**, dass das Dreieck mit den oben angegebenen Maßen nicht rechtwinklig sein kann.
- b) **Gib an**, welcher Kongruenzsatz vorliegt. **Entscheide**, ob die Lösung eindeutig ist.
- c) **Konstruiere** das Dreieck. Verwende dabei den vorgegebenen Eckpunkt auf der Kreislinie.
- d) **Weise rechnerisch nach**, dass der Umkreis exakt den Durchmesser 12 cm hat.
- e) **Berechne** die fehlenden Maße (Winkel und Seitenlängen) des Dreiecks. **Gib an**, welche Sätze du dabei jeweils anwendest.
- f) **Berechne** den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösungen 08.04. Drei Punkte auf einem Kreis

Ein Dreieck hat die Maße $a = 6 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$ und $\alpha = 30^\circ$. Der Umkreis des Dreiecks hat den Durchmesser $d = 12 \text{ cm}$.



- a) **Weise nach**, dass das Dreieck mit den oben angegebenen Maßen nicht rechtwinklig sein kann.
 Wenn das Dreieck rechtwinklig wäre, müsste nach dem Satz des Thales die längste Seite (die Hypotenuse) die Länge 12 cm haben. Allerdings ist $11^2 + 6^2 = 121 + 36 = 157 > 144 = 12^2$. Die Quadratesumme 157 der beiden kürzeren Seiten ist größer als das Quadrat 144 der längsten Seite („die längste Seite ist zu kurz“). Nach dem Satz des Pythagoras ist dieses Dreieck nicht rechtwinklig, sondern spitzwinklig.
- b) **Gib an**, welcher Kongruenzsatz vorliegt. **Entscheide**, ob die Lösung eindeutig ist. **sSW** (zwei Seitenlängen und der Winkel, der der kürzeren Seite gegenüber liegt) ergibt zwei Lösungen. Der vorgegebene Umkreismittelpunkt schließt jedoch eine der beiden Lösungen aus. Umkreismittelpunkt M' der zweiten Lösung siehe Abb.
- c) **Konstruiere** das Dreieck. Verwende dabei den vorgegebenen Eckpunkt auf der Kreislinie. Ohne den vorgegebenen Umkreis würde man mit einer 11 cm langen Strecke in einer beliebigen Richtung beginnen.

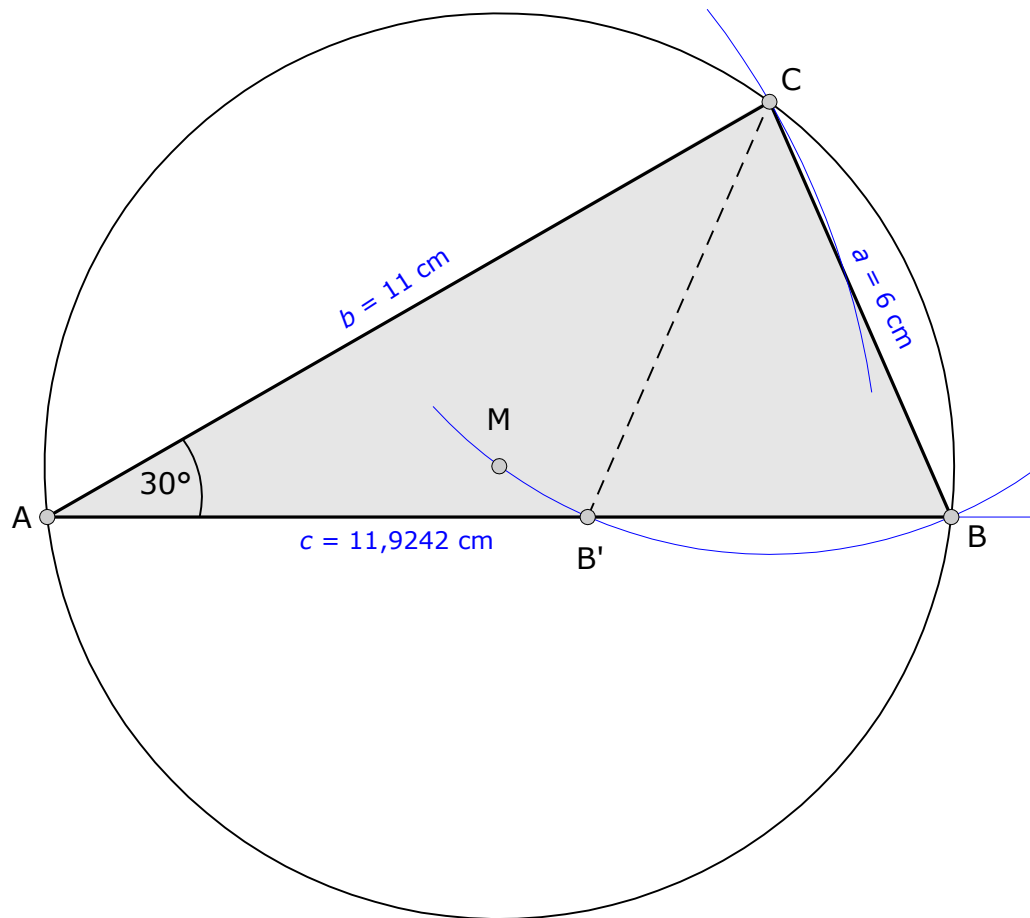


Strecke der Länge 11 cm mit Anfangspunkt A und Endpunkt C

Da sowohl der Anfangspunkt A als auch der Umkreis vorgegeben sind, muss die Strecke eine bestimmte Richtung haben. *weiter auf der nächsten Seite*

Lösungen 08.04. Drei Punkte auf einem Kreis

Ein Dreieck hat die Maße $a = 6 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$ und $\alpha = 30^\circ$. Der Umkreis des Dreiecks hat den Durchmesser $d = 12 \text{ cm}$.



c) Konstruiere das Dreieck. Verwende dabei den vorgegebenen Eckpunkt auf der Kreislinie. [siehe Abbildung sowie Konstruktionsbeschreibung](#)



Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 11 cm



Der Schnittpunkt des 11 cm-Kreises mit dem Umkreis ist C.



Strecke \overline{AC}



Winkel der Größe 30° mit dem Scheitelpunkt A im Uhrzeigersinn an die Strecke AC antragen



Kreis mit Mittelpunkt C und Radius 6 cm



hier: Der Schnittpunkt des Schenkels des 30° -Winkels mit dem Umkreis ist B ohne Umkreis: Die Schnittpunkte des Schenkels des 30° -Winkels mit dem 6 cm-Kreis sind B und B'



Dreieck ABC

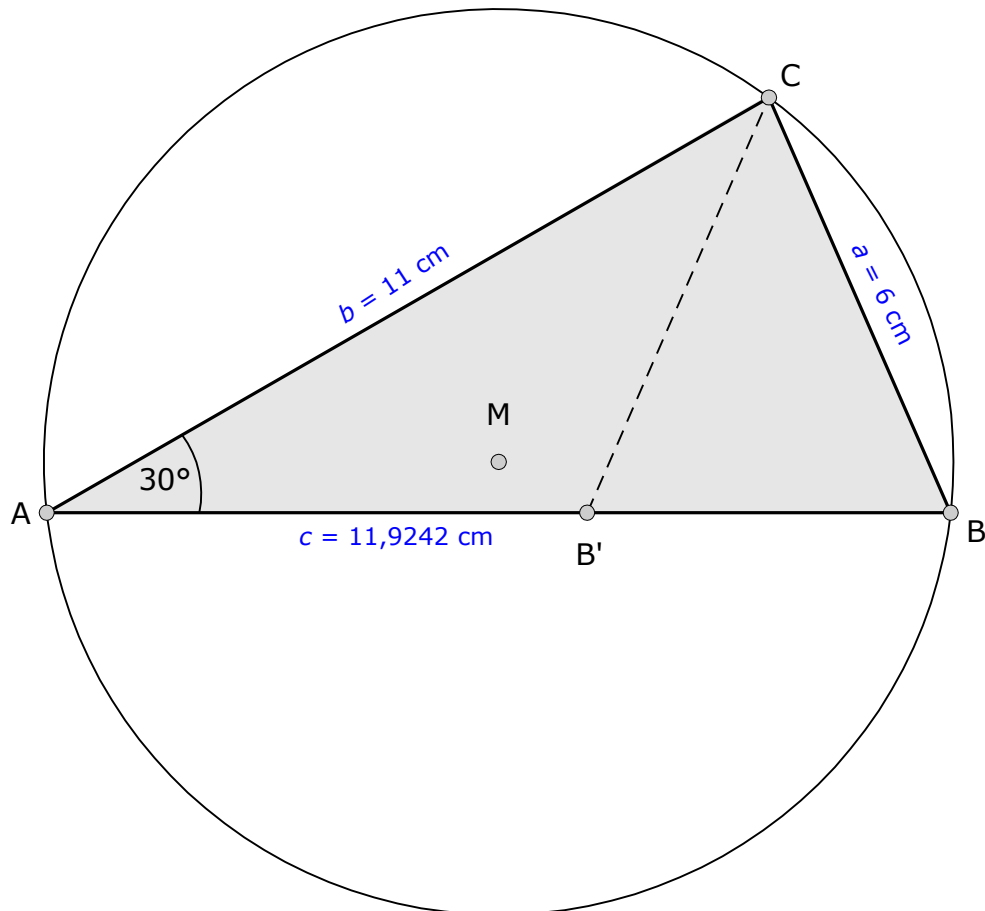
d) Weise rechnerisch nach, dass der Umkreis exakt den Durchmesser 12 cm hat.

In einem Dreieck haben die drei Quotienten aus Seitenlänge und Sinus des gegenüberliegenden Winkels jeweils einen konstanten Wert. Dieser Wert ist der Umkreisdurchmesser des jeweiligen Dreiecks.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{6 \text{ cm}}{\sin(30^\circ)} = \frac{6 \text{ cm}}{\frac{1}{2}} = 12 \text{ cm}$$

Ein Dreieck hat die Maße $a = 6 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$ und $\alpha = 30^\circ$; Umkreisdurchmesser 12 cm



- e) Berechne** die fehlenden Maße (Winkel und Seitenlängen) des Dreiecks.
Gib an, welche Sätze du dabei jeweils anwendest.

Sinussatz

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{b}{a} \cdot \sin(\alpha) = \frac{11}{6} \cdot \sin(30^\circ) = \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \beta \approx 66,4435^\circ$$

Satz: Die Innenwinkelsumme beträgt in jedem Dreieck 180° .

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 83,5565^\circ$$

Sinussatz

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \Rightarrow c = \sin(\gamma) \cdot \frac{a}{\sin(\alpha)} = \sin(\gamma) \cdot 12 \approx 11,9242$$

$$\beta' = 180^\circ - \beta \approx 113,5565^\circ \quad \gamma' = 180^\circ - \alpha - \beta' \approx 36,4435^\circ$$

$$c' = \sin(\gamma') \cdot \frac{a}{\sin(\alpha)} = \sin(\gamma') \cdot 12 \approx 7,12836$$

- f) Berechne** den Flächeninhalt des Dreiecks.

Fächensinussatz

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) \approx \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 11,9242 \cdot \frac{1}{2} = 32,79155$$