MATHE 364

15.04. eine ältere MSA-Aufgabe zur Trigonometrie

a) **Bearbeite** die Aufgabe „Fadenbilder“! Nutze dabei deine Notizen aus der Lesezeit bzw. aus der Musterlösung vom 14.04..

Notiere deine Bearbeitungszeit für die einzelnen Teilaufgaben.

b) **Vergleiche** deine Lösungen mit der Musterlösung (siehe heutige Lösungen).

c) **Bewerte** deine Lösungen mit der angegebenen Punktzahl.

Vergleiche deine Bearbeitungszeit mit der verfügbaren Zeit in der Prüfung.

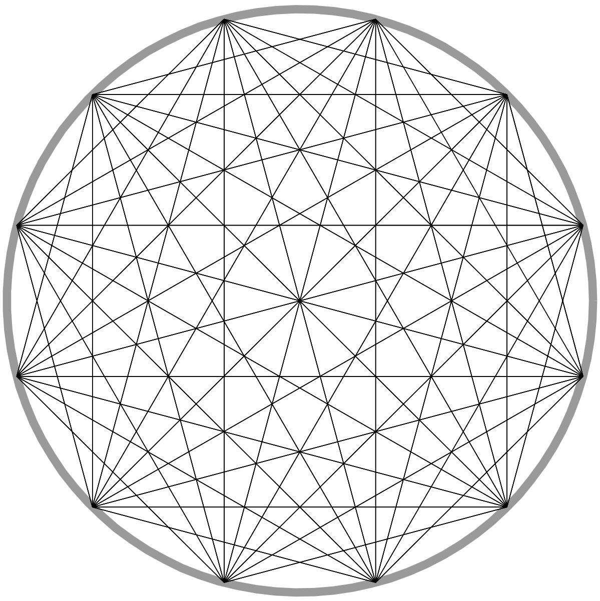
Berechne deinen persönlichen Quotienten „*Minuten pro Bewertungspunkt*“.

Markiere „*schnell verdiente Punkte*“ grün und „*mühsam verdiente Punkte*“ rot.

B1 Trigonometrie: Fadenbilder

In einem Mathematik-Kunst-Projekt baut und untersucht die Klasse 10 d Fadenbilder.

Bei diesem Fadenbild sind 12 Nägel im gleichen Abstand auf einem Kreis angeordnet. Zwischen den Nägeln sind Fäden gespannt. So entstehen Muster, in denen man viele geometrische Figuren entdecken kann.



(1) Je vier Nägel und vier Fäden bilden ein Rechteck.

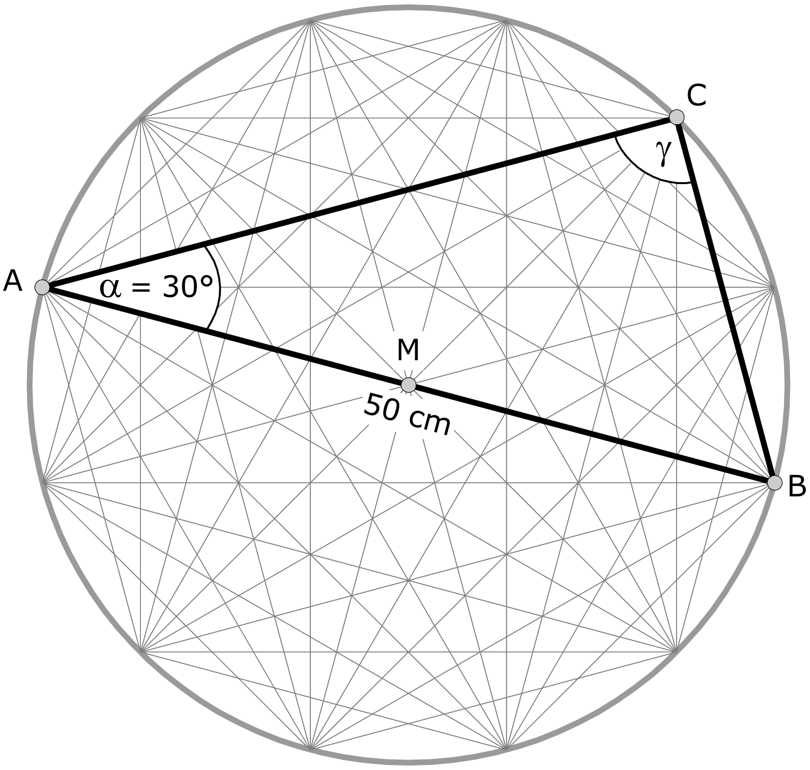
Zeichne ein solches Rechteck in die Abbildung **ein**.

... weiter auf der nächsten Seite

15.04. eine ältere MSA-Aufgabe zur Trigonometrie

B1 Trigonometrie: Fadenbilder

(2) Die 10 d untersucht das rechtwinklige Dreieck ABC. Die längsten Fäden sind Durchmesser des Kreises wie zum Beispiel $\overline{AB}$. Diese Fäden sind 50 cm lang.



2 a) **Gib** eine Begründung dafür **an**, dass γ = 90° sein muss.

2 b) **Berechne** die Länge des Fadens $\overline{AC}$.

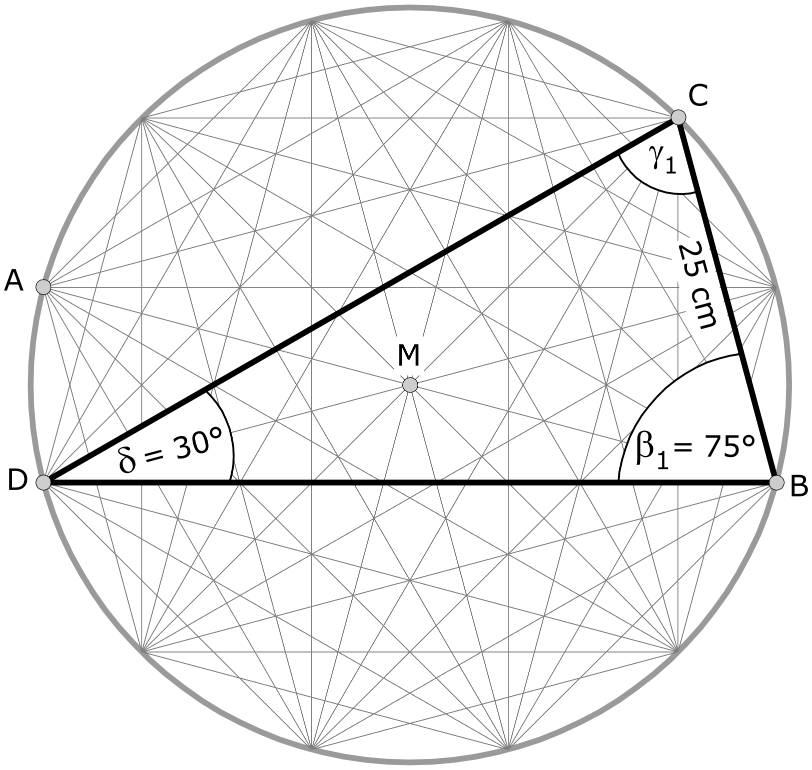
2 c) **Zeichne** das Dreieck MBC **ein**.
Weise nach, dass das Dreieck MBC gleichseitig ist.

... weiter auf der nächsten Seite

15.04. eine ältere MSA-Aufgabe zur Trigonometrie

B1 Trigonometrie: **Fadenbilder**

(3) Die 10 d untersucht außerdem das Dreieck DBC. Bekannt sind die Winkelmaße $\delta = 30°$, $\beta_1 = 75°$ und die Länge $|BC| = 25$ cm.

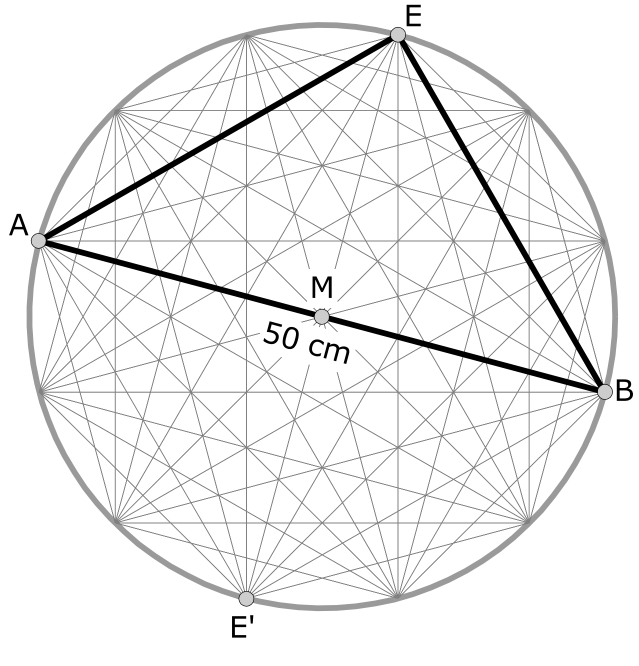


3 a) **Begründe** ohne Rechnung oder Messung, dass die Strecke $\overline{DC}$ kürzer sein muss als die Strecke $\overline{AB}$.

3 b) **Berechne** das Winkelmaß γ_1.

3 c) **Berechne** die Länge der Strecke $\overline{DC}$.

(4) **Bestimme** den Flächeninhalt des Dreiecks ABE.



Lösungen 15.04. B2: Stereometrie im MSA-Übungsheft 2023

a) **Bearbeite** die Aufgabe „Fadenbilder“! Nutze dabei deine Notizen aus der Lesezeit bzw. aus der Musterlösung vom 14.04.. siehe blau geschriebene Lösungen

Notiere deine Bearbeitungszeit für die einzelnen Teilaufgaben. √

b) **Vergleiche** deine Lösungen mit der Musterlösung (siehe heutige Lösungen). √

c) **Bewerte** deine Lösungen mit der angegebenen Punktzahl. individuelle Werte

Vergleiche deine Bearbeitungszeit mit der verfügbaren Zeit in der Prüfung.
individuelle Werte; die Gesamtzeit sollte nicht mehr als 23 Minuten betragen

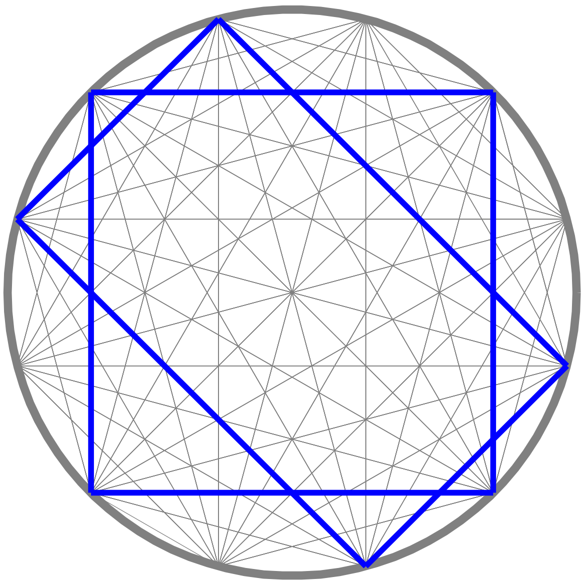
Berechne deinen persönlichen Quotienten „*Minuten pro Bewertungspunkt*“.
individuelle Werte; möglichst weniger als 2 Minuten pro Bewertungspunkt

Markiere „*schnell verdiente Punkte*“ grün und „*mühsam verdiente Punkte*“ rot.
inidividuelle Bewertungen, siehe unten

B1 Trigonometrie: Fadenbilder

In einem Mathematik-Kunst-Projekt baut und untersucht die Klasse 10 d Fadenbilder.

Bei diesem Fadenbild sind 12 Nägel im gleichen Abstand auf einem Kreis angeordnet. Zwischen den Nägeln sind Fäden gespannt. So entstehen Muster, in denen man viele geometrische Figuren entdecken kann.



(1) Je vier Nägel und vier Fäden bilden ein Rechteck.

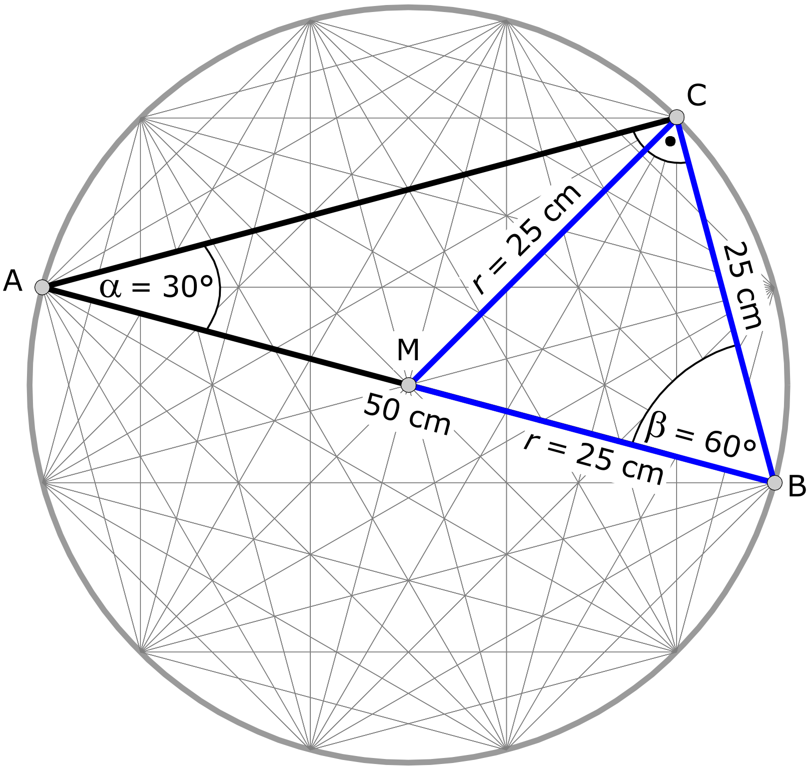
Zeichne ein solches Rechteck in die Abbildung **ein**. 1 P.

aus der Korrekturanweisung: Möglich sind ein Quadrat oder ein Rechteck mit verschieden langen Seiten, siehe Abbildung.
Von jedem der beiden Typen gibt es drei Lagen. Eine dieser sechs Lösungen muss erkennbar eingezeichnet sein.

Nicht richtig im Sinne der Aufgabenstellung sind kleinere Rechtecke, deren Ecken nicht in den Nägeln auf dem Rand liegen oder deren Rand die im Fadenbild nicht vorhandenen Fäden zwischen zwei unmittelbar benachbarten Nägeln als Strecken enthält.

B1 Trigonometrie: **Fadenbilder**

(2) Die 10 d untersucht das rechtwinklige Dreieck ABC. Die längsten Fäden sind Durchmesser des Kreises wie zum Beispiel $\overline{AB}$. Diese Fäden sind 50 cm lang.



2 a) Gib eine Begründung dafür **an**, dass γ = 90° sein muss.

Weil $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises ist und C auf dem Kreis liegt, ist das Dreieck ABC nach dem Satz des Thales rechtwinklig und C ist der Scheitelpunkt des rechten Winkels. 1 P.

2 b) Berechne die Länge des Fadens $\overline{AC}$.

Kosinus im rechtwinkligen Dreieck ABC:

$$\cos(\alpha) = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \Rightarrow \quad |AC| = \cos(\alpha) \cdot |AB| = \cos(30°) \cdot |AB| = 50$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 50 \approx 43{,}30$$

Die Strecke ist ca. 43,3 cm lang. 2 P.

2 c) Zeichne das Dreieck MBC **ein**. siehe Abbildung 1 P.

Weise nach, dass das Dreieck MBC gleichseitig ist.

Es gibt verschiedene Begründungsmöglichkeiten, z.B.

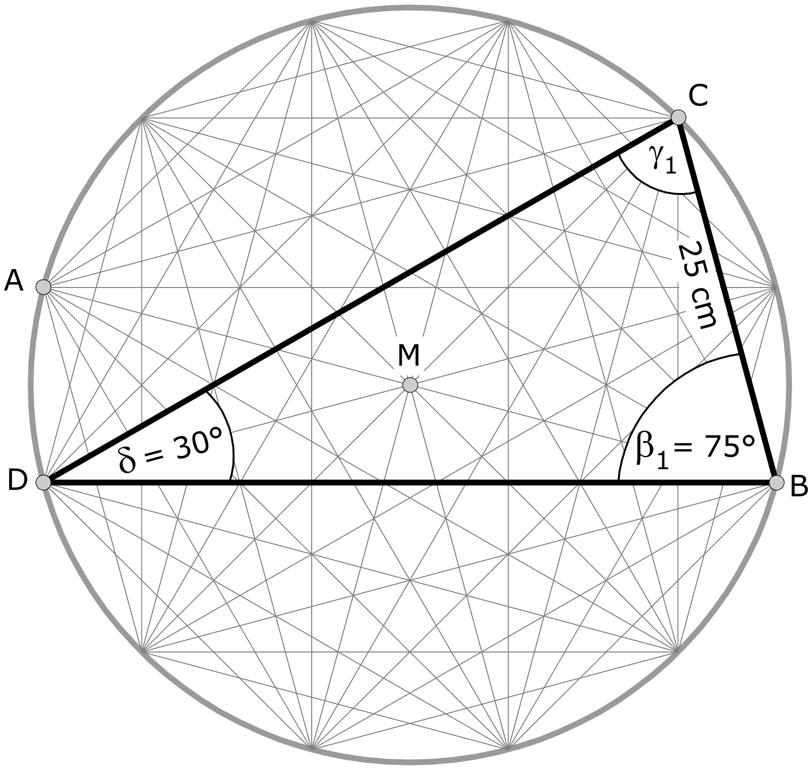
Die Strecken $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ sind Radien des Kreises, also beide gleich lang.

$$\alpha + \gamma + \beta = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - 120° = 60°$$

Weil das Dreieck zwei gleich lange Seiten hat, ist es gleichschenklig. Also muss auch der Winkel ∢ MCB die Größe 60° haben (Basiswinkelsatz). Weil die Winkelsumme im Dreieck 180° ist, muss auch der Winkel ∢ BMC die Größe 60° haben. Ein Dreieck mit drei gleich großen Winkeln ist gleichseitig. 2 P.

B1 Trigonometrie: Fadenbilder

(3) Die 10 d untersucht außerdem das Dreieck DBC. Bekannt sind die Winkelmaße $\delta = 30°$, $\beta_1 = 75°$ und die Länge $|BC| = 25$ cm.



3 a) **Begründe** ohne Rechnung oder Messung, dass die Strecke $\overline{DC}$ kürzer sein muss als die Strecke $\overline{AB}$.

Der Durchmesser ist die längste Strecke innerhalb eines Kreises. Weil die Strecke $\overline{DC}$ den Mittelpunkt M des Kreises nicht enthält, muss sie kürzer als der Durchmesser sein. 2 P.

3 b) **Berechne** das Winkelmaß γ_1.

Sinussatz im Dreieck DBC: 1 P.

$$\delta + \beta_1 + \gamma_1 = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = 180° - (\delta + \beta_1) = 180° - (30° + 75°) = 75°$$

3 c) **Berechne** die Länge der Strecke $\overline{DC}$.

Sinussatz im Dreieck DBC:

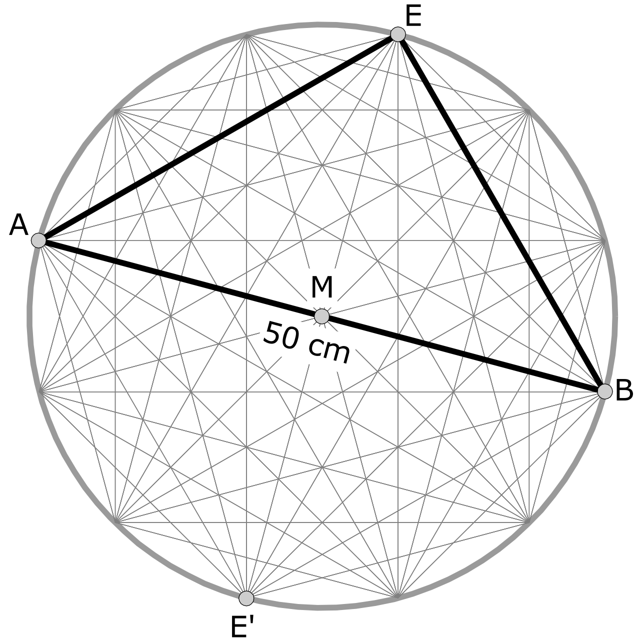
$$\frac{|DC|}{\sin(\beta_1)} = \frac{|BC|}{\sin(\delta)} \quad \Rightarrow$$

$$|DC| = \frac{\sin(\beta_1)}{\sin(\delta)} \cdot |BC| = \frac{\sin(75°)}{\sin(30°)} \cdot 25 \approx 48{,}30$$

Die Strecke ist ca. 48,3 cm lang. 3 P.

B1 Trigonometrie: Fadenbilder

(4) **Bestimme** den Flächeninhalt des Dreiecks ABE. 3 P.



Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Flächeninhalt zu ermitteln, z. B.

„Halbes Quadrat“: Spiegelt man den Punkt E an der Geraden AB, erhält man den Punkt E’. Das Dreieck ABE kann als Hälfte des Quadrates AE’BE betrachtet werden. Wie bei allen Drachenvierecken kann man den Flächeninhalt eines Quadrats aus den Längen der Diagonalen ermitteln.

$$A_{AE'BE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |E'E| = \frac{1}{2} \cdot 50\text{ cm} \cdot 50\text{ cm} = 1250\text{ cm}^2$$

$$A_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot A_{AE'BE} = 625\text{ cm}^2$$