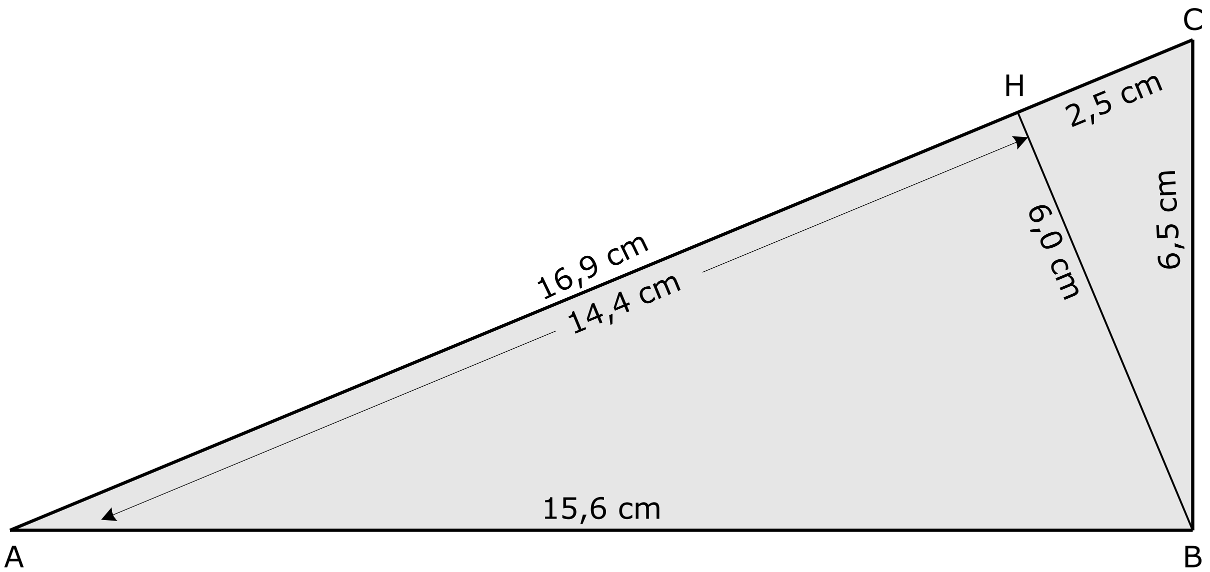
MATHE 364

27.08. rechtwinklige Teildreiecke im rechtwinkligen Dreieck

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck. Die eingezeichnete Höhe zerlegt das große Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke.



a) Das große Dreieck heißt ABC. Dabei nennt man die Eckpunkte in der Reihenfolge, bei der man im mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeigersinn) um das Dreieck herumläuft..

Gib die Eckpunkte der beiden Teildreiecke im positiven Umlaufsinn **an**.

Zeichne jeweils den rechten Winkel ein.

	Länge ...		
Dreieck	**... der Hypotenuse**	**der kurzen Kathete**	**der langen Kathete**
Δ ABC			

b) **Wahlaufgabe**: Bearbeite *mindestens eine* der folgenden Aufgaben.

- **Berechne** mit dem TR *mindestens zwei* Winkelmaße in einem der Dreiecke.
- **Weise rechnerisch nach**, dass die drei Dreiecke tatsächlich rechtwinklig sind.
- **Weise nach**, dass alle drei Dreiecke einander ähnlich sind.
- **Gib** die Aussage des Höhensatzes für das große Dreieck **an**.
- Im Aufgabentext steht, dass in das große Dreieck eine Höhe eingezeichnet ist. **Gib an**, wo sich die beiden anderen Höhen des großen Dreiecks befinden.
- **Bestimme** den Flächeninhalt des großen Dreiecks. **Weise rechnerisch nach**, dass die Terme $\frac{1}{2} \cdot 15{,}6 \cdot 16{,}9 \cdot \sin(\alpha)$ und $\frac{1}{2} \cdot 6{,}5 \cdot 16{,}9 \cdot \sin(\gamma)$ den gleichen Wert haben. **Vergleiche** diesen Wert mit $\frac{1}{2} \cdot 15{,}6 \cdot 6{,}5 \cdot \sin(\beta)$.

© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht

Lösungen 27.08. rechtwinklige Teildreiecke im rechtwinkligen Dreieck

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck. Die eingezeichnete Höhe zerlegt das große Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke.

Beispiel für eine Winkelberechnung:

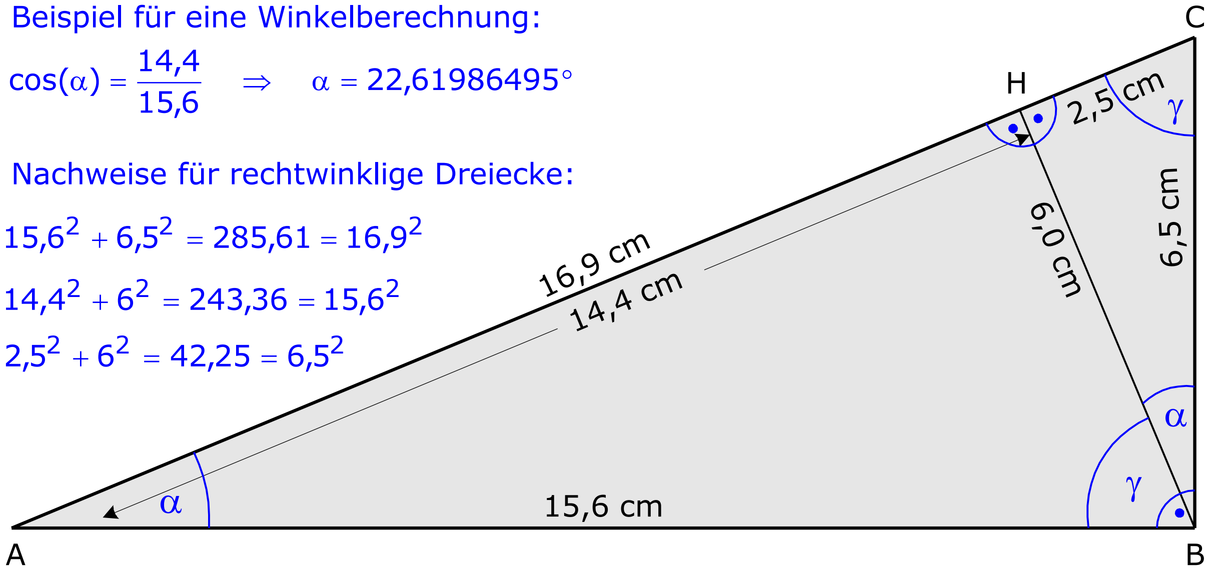
$\cos(\alpha) = \dfrac{14{,}4}{15{,}6} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22{,}61986495°$

Nachweise für rechtwinklige Dreiecke:

$15{,}6^2 + 6{,}5^2 = 285{,}61 = 16{,}9^2$

$14{,}4^2 + 6^2 = 243{,}36 = 15{,}6^2$

$2{,}5^2 + 6^2 = 42{,}25 = 6{,}5^2$



a) Das große Dreieck heißt ABC. Dabei nennt man die Eckpunkte in der Reihenfolge, bei der man im mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeigersinn) um das Dreieck herumläuft..

Gib die Eckpunkte der beiden Teildreiecke im positiven Umlaufsinn **an**. s. Tabelle

Zeichne jeweils den rechten Winkel ein. siehe Abbildung

	Länge …		
Dreieck	**… der Hypotenuse**	**der kurzen Kathete**	**der langen Kathete**
Δ ABC	16,9 cm	6,5 cm	15,6 cm
Δ BCH	6,5 cm	2,5 cm	6 cm
Δ ABH	15,6 cm	6 cm	14,4 cm

b) **Wahlaufgabe**: Bearbeite *mindestens eine* der folgenden Aufgaben.

- **Berechne** mit dem TR *mindestens zwei* Winkelmaße in einem der Dreiecke.

  siehe Abbildung; $\alpha = 22{,}61986495°$ und $\gamma = 67{,}38013505°$

- **Weise rechnerisch nach**, dass die drei Dreiecke tatsächlich rechtwinklig sind.

  Umkehrung des Satzes von Pythagoras, siehe Abbildung oder

  $\cos(\alpha) = \dfrac{14{,}4}{15{,}6} = \sin(\gamma)$ und $\cos(\gamma) = \dfrac{6}{15{,}6} = \sin(\alpha)$ führen beide auf die gleichen Winkelmaße $\alpha = 22{,}61986495°$ und $\gamma = 67{,}38013505°$. In einem nicht rechtwinkligen Dreieck würden die Quotienten keine Sinus- bzw. Kosinuswerte darstellen und zu vier verschiedenen Winkelmaßen führen.

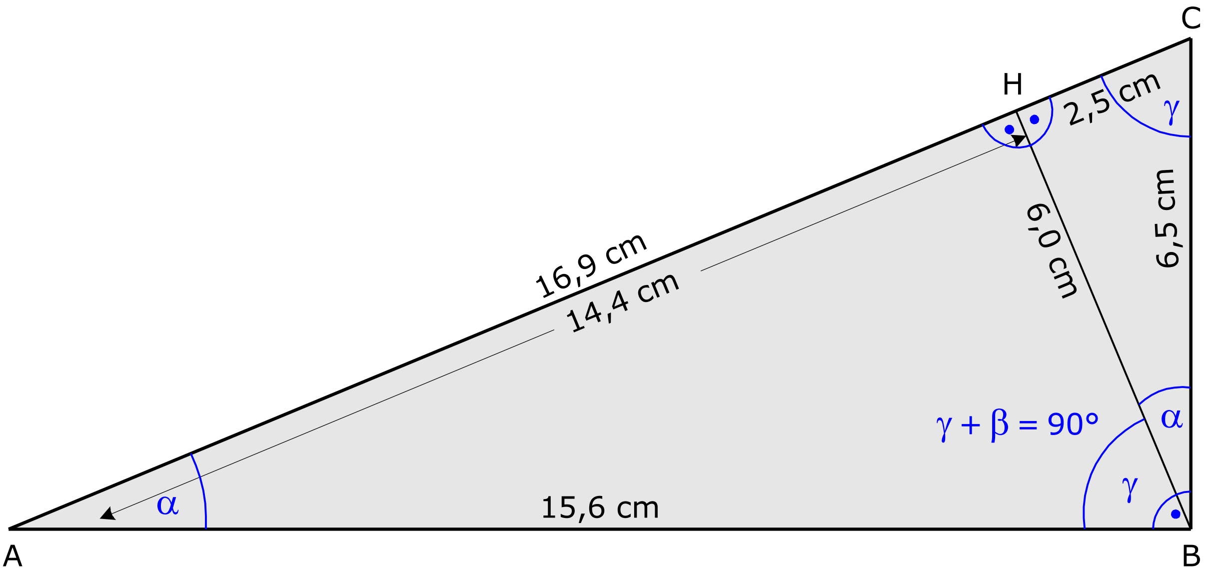
- **Weise nach**, dass alle drei Dreiecke einander ähnlich sind.

  erste Nachweismöglichkeit: Alle drei Dreiecke haben die gleichen Innenwinkelmaße 22,61986495°, 67,38013505° und 90°.

  weiter auf der nächsten Seite

© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht

Lösungen 27.08. **rechtwinklige Teildreiecke im rechtwinkligen Dreieck**



b) Wahlaufgabe: Bearbeite *mindestens eine* der folgenden Aufgaben.

- **Weise nach**, dass alle drei Dreiecke einander ähnlich sind.

  zweite Nachweismöglichkeit: Alle drei Dreiecke haben die gleichen Seitenlängenverhältnisse $\frac{6,5}{16,9} = \frac{6}{15,6} = \frac{2,5}{6,5} \approx 0,384615384$, $\frac{15,6}{16,9} = \frac{14,4}{15,6} = \frac{6}{6,5} \approx 0,923076923$ und $\frac{6,5}{15,6} = \frac{6}{14,4} = \frac{2,5}{6} = 0,41\overline{6}$. Diese Längenverhältnisse nennt man in rechtwinkligen Dreiecken bekanntlich Sinus, Kosinus und Tangens.

- **Gib** die Aussage des Höhensatzes für das große Dreieck **an**.

  $6^2 = 2,5 \cdot 14,4$; die Terme links und rechts haben beide den Wert 36.

- Im Aufgabentext steht, dass in das große Dreieck eine Höhe eingezeichnet ist. **Gib an**, wo sich die beiden anderen Höhen des großen Dreiecks befinden.

  Die beiden Katheten sind zugleich Höhen, da die eine Strecke senkrecht auf der anderen steht und umgekehrt.

- **Bestimme** den Flächeninhalt des großen Dreiecks. $A = 6,5\text{ cm} \cdot 15,6\text{ cm} : 2$
  $A = 50,7\text{ cm}^2$.

  Weise rechnerisch nach, dass die Terme

  $\frac{1}{2} \cdot 15,6 \cdot 16,9 \cdot \sin(\alpha)$ und $\frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 16,9 \cdot \sin(\gamma)$ den gleichen Wert haben.

  Vergleiche diesen Wert mit $\frac{1}{2} \cdot 15,6 \cdot 6,5 \cdot \sin(\beta)$.

  erste Lösungsmöglichkeit: Alle drei Taschenrechnerberechungen mit $\sin(\alpha)$ = 0,384615384, $\sin(\gamma)$ = 0,923076923 sowie sin(90°) = 1 führen auf das gleiche Ergebnis $A = 50,7$.

  zweite Lösungsmöglichkeit: Anstelle der langen Dezimalzifferndarstellungen werden die Sinuswerte als Längenverhältnisse beibehalten.

  $\frac{1}{2} \cdot 15,6 \cdot 16,9 \cdot \frac{6,5}{16,9} = \frac{1}{2} \cdot 15,6 \cdot 6,5$ und $\frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 16,9 \cdot \frac{15,6}{16,9} = \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 15,6$. Man sieht, dass beide Terme den gleichen Wert haben. Im dritten Term ist $\sin(\beta)$ = 1.

© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht