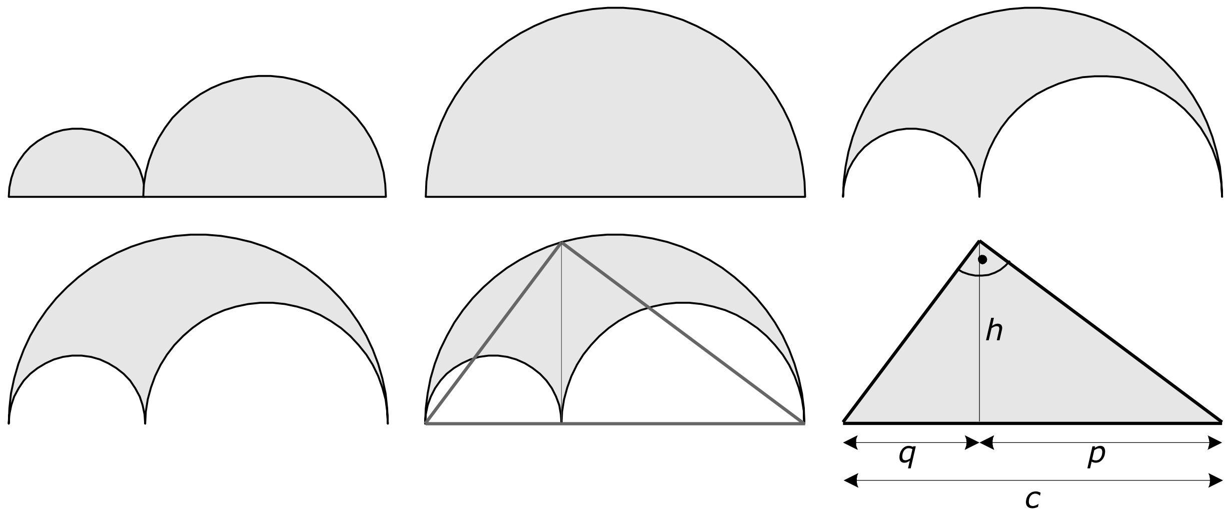
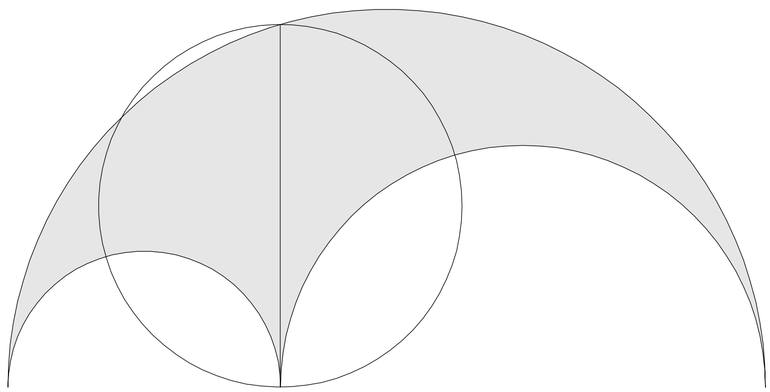
MATHE 364

05.08. Das Arbelos (Schustermesser des Archimedes)

Die Abbildung zeigt, wie aus drei Halbkreisen das *Arbelos* entsteht (obere Reihe). In die Figur wird das rechtwinklige *Dreieck zum Arbelos* eingefügt (untere Reihe).



Wahlaufgaben: Bearbeite mindestens eine der Teilaufgaben **a)** bis **d)**.
Verwende für deine Bearbeitung die große Abbildung.



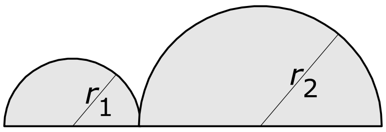
a) **Bestimme** jeweils den Umfang des oberen Halbkreises, des unteren linken sowie des unteren rechten Halbkreises.
Untersuche, welcher Zusammenhang zwischen diesen drei Längen besteht.

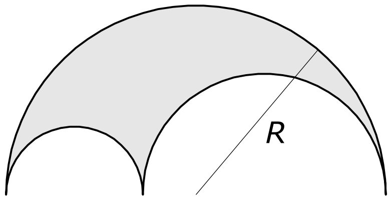
b) **Bestimme** jeweils den Flächeninhalt des oberen Halbkreises, des unteren linken sowie des unteren rechten Halbkreises.
Bestimme mit Hilfe dieser drei Werte den Inhalt der grau markierten Fläche.

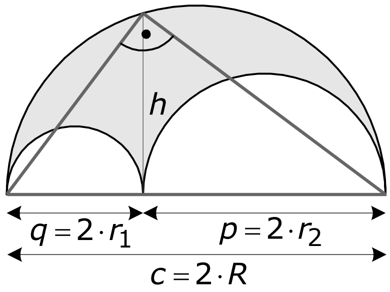
c) Der eingezeichnete volle Kreis heißt *Kreis des Archimedes*. **Vergleiche** den Flächeninhalt dieses Kreises mit dem Inhalt der grau markierten Fläche.

d) Der eingezeichnete volle Kreis (*Kreis des Archimedes*) ist der Umkreis eines Vierecks, der eingezeichnete Durchmesser ist eine seiner Diagonalen. Die andere Diagonale verbindet die Schnittpunkte der kleinen Halbkreise mit dem Kreis des Archimedes. **Zeichne** das Viereck **ein**. **Weise nach**, dass es ein Rechteck ist.

Lösungen 05.08. Das Arbelos (Schustermesser des Archimedes)







Rechtes Bild: $c = p + q$.

Einsetzen: $2 \cdot R = 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 \quad \Rightarrow \quad R = r_1 + r_2$

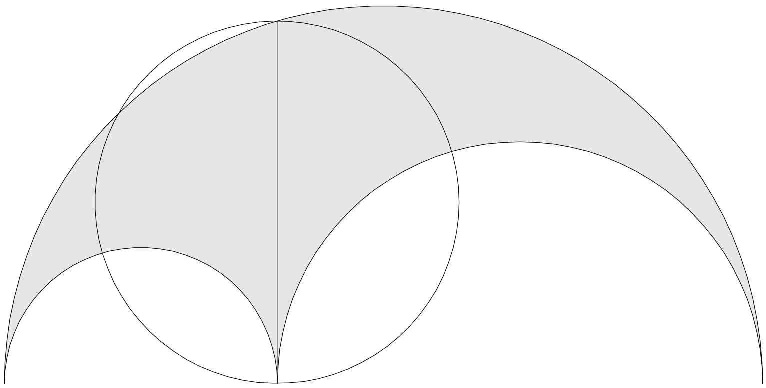
Wahlaufgaben: Bearbeite mindestens eine der Teilaufgaben **a)** bis **d)**.
Verwende für deine Bearbeitung die große Abbildung.

$r_1 = 1{,}8\,\text{cm}$

$r_2 = 3{,}2\,\text{cm}$

$R = 5\,\text{cm}$

$h = \sqrt{p \cdot q} = 2{,}4\,\text{cm}$



a) **Bestimme** jeweils den Umfang des oberen Halbkreises, des unteren linken sowie des unteren rechten Halbkreises. allgemein:

links $u_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 = \pi \cdot r_1$ rechts $u_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 = \pi \cdot r_2$ oben $u_R = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = \pi \cdot R$

mit konkreten Längen:

li. $u_1 = \pi \cdot 1{,}8\,\text{cm} \approx 5{,}65\,\text{cm}$ re. $u_2 = \pi \cdot 3{,}2\,\text{cm} \approx 10{,}05\,\text{cm}$ ob. $u_R = \pi \cdot 5\,\text{cm} \approx 15{,}71\,\text{cm}$

Untersuche, welcher Zusammenhang zwischen diesen drei Längen besteht.

Der Umfang des großen Halbkreises ist die Summe der beiden kleinen Umfänge.

$u_R = u_1 + u_2$ oder $\pi \cdot 5\,\text{cm} = \pi \cdot 1{,}8\,\text{cm} + \pi \cdot 3{,}2\,\text{cm}$ oder $15{,}71\,\text{cm} \approx 5{,}65\,\text{cm} + 10{,}05\,\text{cm}$

b) **Bestimme** jeweils den Flächeninhalt des oberen Halbkreises, des unteren linken sowie des unteren rechten Halbkreises. allgemein:

links: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2$ rechts: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_2^2$ oben: $A_R = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2$

mit konkreten Längen: links $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1{,}8\,\text{cm})^2 \approx 5{,}09\,\text{cm}^2$

rechts $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (3{,}2\,\text{cm})^2 \approx 16{,}08\,\text{cm}^2$ oben $A_R = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (5\,\text{cm})^2 \approx 39{,}27\,\text{cm}^2$

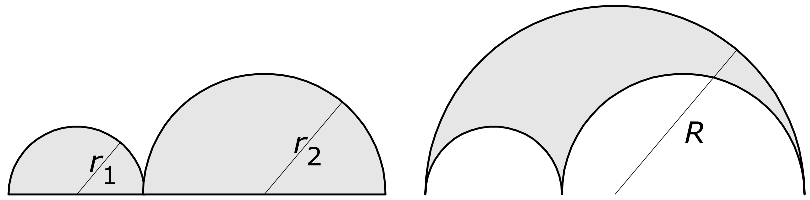
Bestimme mit Hilfe dieser drei Werte den Inhalt der grau markierten Fläche.

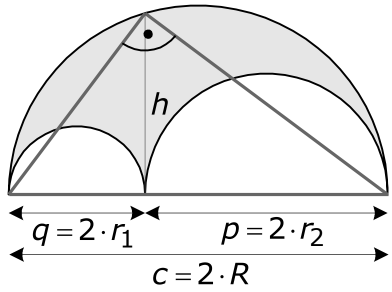
$A_{\text{grau}} = A_R - A_1 - A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (5\,\text{cm})^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1{,}8\,\text{cm})^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (3{,}2\,\text{cm})^2 \approx 18{,}10\,\text{cm}^2$

c) *siehe nächste Seite*

d) *siehe nächste Seite*

Lösungen 05.08. Das Arbelos (Schustermesser des Archimedes)

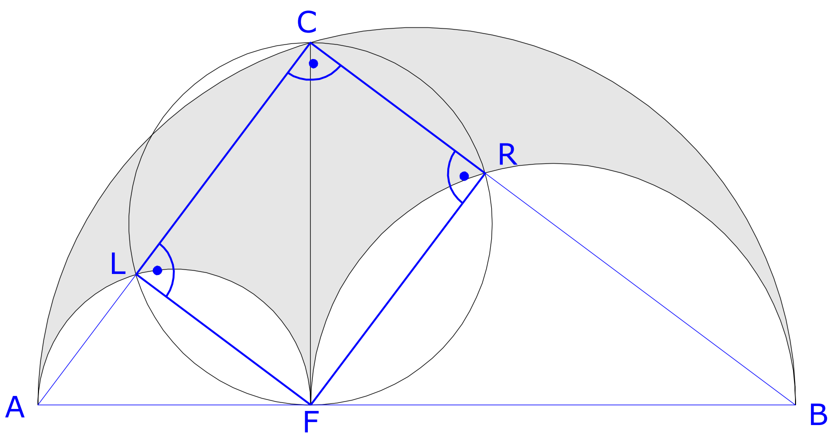




Rechtes Bild: $c = p + q$.

Einsetzen: $2 \cdot R = 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 \quad \Rightarrow \quad R = r_1 + r_2$

Wahlaufgaben: Bearbeite mindestens eine der Teilaufgaben **a)** bis **d)**.



c) Der eingezeichnete volle Kreis heißt *Kreis des Archimedes*. **Vergleiche** den Flächeninhalt dieses Kreises mit dem Inhalt der grau markierten Fläche.

Flächeninhalt des Kreis des Archimedes

$$h^2 = p \cdot q \quad \Rightarrow \quad A_h = \pi \cdot \left(\tfrac{1}{2} h\right)^2 = \pi \cdot \tfrac{1}{4} h^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot p \cdot q$$

binomische Formel

$$c = p + q \quad \Rightarrow \quad c^2 = p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2$$

Flächeninhalt des Arbelos

$$A_{\text{grau}} = A_R - A_1 - A_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\left(\tfrac{1}{2} c\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2} p\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2} q\right)^2\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \tfrac{1}{4} \cdot (c^2 - p^2 - q^2)$$

$$= \tfrac{1}{8} \cdot \pi \cdot (p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 - p^2 - q^2) = \tfrac{1}{8} \cdot \pi \cdot 2 \cdot p \cdot q = \tfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot p \cdot q$$

Das Arbelos und der Kreis des Archimedes haben den gleichen Flächeninhalt.

d) Der eingezeichnete volle Kreis (*Kreis des Archimedes*) ist der Umkreis eines Vierecks, der eingezeichnete Durchmesser ist eine seiner Diagonalen. Die andere Diagonale verbindet die Schnittpunkte der kleinen Halbkreise mit dem Kreis des Archimedes. **Zeichne** das Viereck **ein**. siehe Viereck FRCL

Weise nach, dass es ein Rechteck ist. **1.** Laut Voraussetzung ist die Strecke $\overline{FC}$ ein Durchmesser des Kreises des Archimedes. Nach dem Satz des Thales ist L der Scheitelpunkt eines rechten Winkels. **2.** Aus dem gleichen Grund ist auch R der Scheitelpunkt eines rechten Winkels.

3. Das Dreieck ABC, das Dreieck zum Arbelos, ist rechtwinklig. C liegt auf dem Thaleskreis über der Hypotenuse $\overline{AB}$. Also ist auch C der Scheitelpunkt eines eines rechten Winkels. **4.** Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt, muss auch bei D ein rechter Winkel liegen.