

MATHE 364

17.12. Zinsrechnung – Exponentialgleichungen – Logarithmen

a) **Trage ein**, zu welchem Text der Term passt: **I** $5000 \cdot 1,05^5$ **II** $5000 \cdot 1,5^{0,5}$

- ☐ Ein Kapital von 5000 € wird mit 0,05 % 5 Jahre lang verzinst.
- ☐ Ein Kapital von 5000 € wird mit 0,5 % ein halbes Jahr lang verzinst.
- ☐ Ein Kapital von 5000 € wird mit 5 % 5 Jahre lang verzinst.
- ☐ Ein Kapital von 5000 € wird mit 50 % ein halbes Jahr lang verzinst.

b) **Markiere** alle Gleichungen, die nach der Verdoppelung des Kapitals fragen.

$$5000 \cdot 1,05^x = 10000$$

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^x = 2 \cdot 5000$$

$$K_0 \cdot 1,05^x = K_x$$

$$K_0 \cdot 1,05^x = 2 \cdot K_0$$

$$5000 \cdot 1,05^x = 5000 \cdot 1,5^x$$

$$1,05^x = 2$$

Wahlaufgaben: Bearbeite *mindestens eine* der Aufgaben **c)** bis **f)**.

c) **Bestimme** die Lösung der Gleichung $5000 \cdot 1,05^x = 20000$.

d) **Löse** die Gleichung $5000 \cdot 1,05^x = 20000$ rechnerisch.

e) **Gib** in Worten **an**, wonach die Gleichung $5000 \cdot 1,05^x = 20000$ fragt.

f) Eine der Gleichungen in **b)** hat eine ganz einfache Lösung. **Gib an**, welche es ist.

g) Einige der angegebenen Terme könntest du zum Lösen der Gleichung $5000 \cdot 1,05^x = 20000$ nutzen. **Markiere** die geeigneten Terme.

$$\log_{1,05}(5000)$$

$$\log_{1,05}(20000)$$

$$\log_{1,05}(20000 \cdot 5000)$$

$$\log_{1,05}(4)$$

$$\log_{1,05}\left(\frac{20000}{5000}\right)$$

$$\log_{1,05}\left(\frac{5000}{20000}\right)$$

$$\frac{\log_{10}\left(\frac{20000}{5000}\right)}{\log_{10}(1,05)}$$

$$\frac{\log\left(\frac{20000}{5000}\right)}{\log(1,05)}$$

a) **Trage ein**, zu welchem Text der Term passt: **I** $5000 \cdot 1,05^5$ **II** $5000 \cdot 1,50^{0,5}$

- ☐ Ein Kapital von 5000 € wird mit 0,05 % 5 Jahre lang verzinst.
- ☐ Ein Kapital von 5000 € wird mit 0,5 % ein halbes Jahr lang verzinst.
- ☒ **I** Ein Kapital von 5000 € wird mit 5 % 5 Jahre lang verzinst.
- ☒ **II** Ein Kapital von 5000 € wird mit 50 % ein halbes Jahr lang verzinst.

b) **Markiere alle Gleichungen**, die nach der Verdoppelung des Kapitals fragen.

$$5000 \cdot 1,05^x = 10000$$

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^x = 2 \cdot 5000$$

$$K_0 \cdot 1,05^x = K_x$$

$$K_0 \cdot 1,05^x = 2 \cdot K_0$$

$$5000 \cdot 1,05^x = 5000 \cdot 1,50^x$$

$$1,05^x = 2$$

Wahlaufgaben: Bearbeite *mindestens eine* der Aufgaben c) bis f).

c) **Bestimme** die Lösung der Gleichung $5000 \cdot 1,05^x = 20000$. **beispielsweise**

- rechnerisch, siehe d)
- graphisch, aber von Hand zeichnen zu hoher Aufwand, mit der Tabellenkalkulation nur für einen schnellen Überblick, anschließend ist Probieren genauer
- systematisches Probieren:
im MSA mit einer Taschenrechner-Wertetabelle für die Funktion $5000 \cdot 1,05^x$
zu Hause oder im Unterricht mit einem Tabellenkalkulationsprogramm

TKS					
Datei		Bearbeiten	Ansicht	Einfügen	Format
Extras		Daten	Fenster	Hilfe	
	A	B	C	D	E
1	Kapital K	Prozentzahl p	Jahre	Kontostand	
2	5000	5	0	5000	
3			1	5250	
4			2	=A\$2*(1+B\$2/100)^C4	
5			10	8144,473134	
6			20	13266,48853	
7			30	21609,71188	
8			29	20580,67798	
			28	19600,64569	
			28,5	20084,68514	
			28,4	19986,9303	
			28,41	19996,68433	
			28,42	20006,44313	
			28,411	19997,66	
			28,412	19998,63571	
			28,413	19999,61147	
			28,414	20000,58728	
			28,4131	19999,70905	
			28,4132	19999,80663	

d) Löse die Gleichung $5000 \cdot 1,05^x = 20000$ rechnerisch.

Die linke Rechnung zeigt, wie mit einem modernen Taschenrechner im letzten Lösungsschritt der Logarithmus zu einer beliebigen Basis genutzt werden kann, hier der Logarithmus zur Basis 1,05.

$$\begin{aligned} 5000 \cdot 1,05^x &= 20000 && |:5000 \\ \Leftrightarrow 1,05^x &= 4 && |\log_{1,05}(\) \\ \Leftrightarrow x &= \log_{1,05}(4) \\ &\approx 28,41339816 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5000 \cdot 1,05^x &= 20000 && |:5000 \\ \Leftrightarrow 1,05^x &= 4 && |\log_{10}(\) \\ \Leftrightarrow \log_{10}(1,05^x) &= \log_{10}(4) \\ \Leftrightarrow x \cdot \log_{10}(1,05) &= \log_{10}(4) && |: \log_{10}(1,05) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\log_{10}(4)}{\log_{10}(1,05)} \approx 28,41339816 \end{aligned}$$

Die rechte Rechnung zeigt, wie man mit einem veralteten Taschenrechner vorgehen muss, wenn dieser nur Logarithmen zur Basis 10 berechnen kann. Die entsprechende Taste ist mit $\boxed{\lg}$ oder mit $\boxed{\log}$ beschriftet, die Basis fehlt. Die Formel für den letzten Lösungsschritt ist in der offiziellen Formelsammlung zum MSA angegeben.

Empfehlung: Jetzt einen modernen Taschenrechner kaufen und bis zum MSA die Bedienung üben. Dieser Taschenrechner sollte zusätzlich zu den üblichen Funktionen eines wissenschaftlichen Taschenrechners folgende Möglichkeiten bieten:

- Wertetabellen für Funktionen
- Eingabe zum Lösen von quadratischen Gleichungen („Polynomgleichung“)
- Eingabe zum Lösen linearen Gleichungssystemen

e) Gib in Worten **an**, wonach die Gleichung $5000 \cdot 1,05^x = 20000$ fragt. **Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital von 5000 € vervierfacht, wenn man es zu 5 % Zinsen anlegt? (andere Formulierungen möglich)**

f) Eine der Gleichungen in b) hat eine ganz einfache Lösung. Gib an, welche es ist. $5000 \cdot 1,05^x = 5000 \cdot 1,05^x$ **hat die Lösung $x = 0$; (nur) die Startwerte sind gleich.**

g) Einige der angegebenen Terme könntest du zum Lösen der Gleichung $5000 \cdot 1,05^x = 20000$ nutzen. Markiere die geeigneten Terme.

$\log_{1,05}(5000)$	$\log_{1,05}(20000)$	$\log_{1,05}(20000:5000)$	$\log_{1,05}(4)$
$\log_{1,05}\left(\frac{20000}{5000}\right)$	$\log_{1,05}\left(\frac{5000}{20000}\right)$	$\frac{\log_{10}\left(\frac{20000}{5000}\right)}{\log_{10}(1,05)}$	$\frac{\log\left(\frac{20000}{5000}\right)}{\log(1,05)}$