MATHE 364

19.12. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Die Abbildung zeigt Gleichungen mit Potenzen.

$2^3 = 8$

$2^{11} = 2048$

$2^5 = 32$

$10^5 = 100\,000$

$10^3 = 1000$

$3^3 = 27$

$5^5 = 3125$

$5^3 = 125$

$a^n = p$

$3^5 = 243$

$a^n \cdot b^n = p \cdot q$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$0{,}5^3 = 0{,}125$

$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

$\frac{a^n}{b^n} = \frac{p}{q}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$

$0{,}1^3 = 0{,}001$

$0{,}2^3 = 0{,}008$

$\left(a^n\right)^k = p^k$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{p}{q}$

$8^{\frac{1}{3}} = 2$

$(a \cdot b)^n = p \cdot q$

$125^{\frac{1}{3}} = 5$

$1000^{\frac{1}{3}} = 10$

$\left(10^3\right)^3 = 10^9$

a) **Stelle** zu *mindestens drei* Gleichungen die Umkehrung mit Logarithmen **auf**.

b) **Stelle** zu *mindestens drei* Gleichungen die Umkehrung mit *n*. Wurzeln **auf**.

c) Einige der Gleichungen sind äquivalent (gleichwertig).
Gib *ein* Beispiel **an**.

d) Unter den Gleichungen finden sich Gesetze der Potenzrechnung.
Gib *mindestens zwei* Beispiele **an**.

Lösungen 19.12. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Die Abbildung zeigt Gleichungen mit Potenzen.

$2^3 = 8$ $\quad 2^{11} = 2048$ $\quad 10^5 = 100\,000$ $\quad 2^5 = 32$

$10^3 = 1000$ $\quad 3^3 = 27$ $\quad 3^5 = 243$ $\quad 5^5 = 3125$

$5^3 = 125$ $\quad a^n = p$ $\quad a^n \cdot b^n = p \cdot q$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ $\quad 0{,}5^3 = 0{,}125$ $\quad \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ $\quad \frac{a^n}{b^n} = \frac{p}{q}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$ $\quad 0{,}1^3 = 0{,}001$ $\quad 0{,}2^3 = 0{,}008$ $\quad \left(a^n\right)^k = p^k$

$8^{\frac{1}{3}} = 2$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{p}{q}$ $\quad 125^{\frac{1}{3}} = 5$ $\quad 1000^{\frac{1}{3}} = 10$

$(a \cdot b)^n = p \cdot q$ $\quad \left(10^3\right)^3 = 10^9$

c) Einige der Gleichungen sind äquivalent (gleichwertig).
Gib *ein* Beispiel **an**. siehe gleichfarbig markierte Gleichungen

a) **Stelle** zu *mindestens drei* Gleichungen die Umkehrung mit Logarithmen **auf**.

Gleichungen mit natürlichen Zahlen

$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2(8) = 3$ $\quad 5^3 = 125 \Leftrightarrow \log_5(125) = 3$ $\quad 10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10}(1000) = 3$

$3^3 = 27 \Leftrightarrow \log_3(27) = 3$ $\quad 5^5 = 3125 \Leftrightarrow \log_5(3125) = 5$ $\quad 3^5 = 243 \Leftrightarrow \log_3(243) = 5$

$2^{11} = 2048 \Leftrightarrow \log_2(2048) = 11$ $\quad 2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2(32) = 5$

$10^5 = 100\,000 \Leftrightarrow \log_{10}(100\,000) = 5$

$\left(10^3\right)^3 = 10^9 \Leftrightarrow \log_{10}(10^9) = 9$ $\quad \left(10^3\right)^3 = 10^9 \Leftrightarrow \log_{10^3}\left(\left(10^3\right)^3\right) = 3$

Gleichungen mit Brüchen und Dezimalbrüchen

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$ $\quad 0{,}5^3 = 0{,}125 \Leftrightarrow \log_{0{,}5}(0{,}125) = 3$

$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{125}\right) = 3$ $\quad 0{,}2^3 = 0{,}008 \Leftrightarrow \log_{0{,}2}(0{,}008) = 3$

$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{1000}\right) = 3$ $\quad 0{,}1^3 = 0{,}001 \Leftrightarrow \log_{0{,}1}(0{,}001) = 3$

$125^{\frac{1}{3}} = 5 \Leftrightarrow \log_{125}(5) = \frac{1}{3}$ $\quad 8^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow \log_8(2) = \frac{1}{3}$ $\quad 1000^{\frac{1}{3}} = 10 \Leftrightarrow \log_{1000}(10) = \frac{1}{3}$

Lösungen 19.12. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Die Abbildung zeigt Gleichungen mit Potenzen.

$2^3 = 8$ | $2^{11} = 2048$ | $10^5 = 100\,000$ | $2^5 = 32$

$10^3 = 1000$ | $3^3 = 27$ | $3^5 = 243$ | $5^5 = 3125$

$5^3 = 125$ | $a^n = p$ | $a^n \cdot b^n = p \cdot q$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ | $0{,}5^3 = 0{,}125$ | $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ | $\frac{a^n}{b^n} = \frac{p}{q}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$ | $0{,}1^3 = 0{,}001$ | $0{,}2^3 = 0{,}008$ | $\left(a^n\right)^k = p^k$

$8^{\frac{1}{3}} = 2$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{p}{q}$ | $125^{\frac{1}{3}} = 5$ | $1000^{\frac{1}{3}} = 10$

$(a \cdot b)^n = p \cdot q$ | $\left(10^3\right)^3 = 10^9$

a) Stelle zu *mindestens drei* Gleichungen die Umkehrung mit Logarithmen **auf**.

Gleichungen mit Variablen

$a^n = p \Leftrightarrow \log_a(p) = n$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n = p \cdot q \Leftrightarrow \log_{a \cdot b}(p \cdot q) = n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \log_{\frac{a}{b}}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right) = n$

$\left(a^n\right)^k = p^k \Leftrightarrow \log_{a^n}\left(\left(a^n\right)^k\right) = k$

$\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k} = p^k \Leftrightarrow \log_a\left(\left(a^n\right)^k\right) = n \cdot k$

b) Stelle zu *mindestens drei* Gleichungen die Umkehrung mit *n*. Wurzeln **auf**.

Gleichungen mit natürlichen Zahlen

$2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

$5^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{125} = 5$

$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1000} = 10$

$2^5 = 32 \Leftrightarrow \sqrt[5]{32} = 2$

$2^{11} = 2048 \Leftrightarrow \sqrt[11]{2048} = 2$

$3^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$

$3^5 = 243 \Leftrightarrow \sqrt[5]{243} = 3$

$10^5 = 100\,000 \Leftrightarrow \sqrt[5]{100\,000} = 10$

$5^5 = 3125 \Leftrightarrow \sqrt[5]{3125} = 5$

$\left(10^3\right)^3 = 10^9 \Leftrightarrow \sqrt[9]{10^9} = 10$

$\left(10^3\right)^3 = 10^9 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\left(10^3\right)^3} = 10^3$

Lösungen 19.12. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Die Abbildung zeigt Gleichungen mit Potenzen.

$2^3 = 8$ $10^3 = 1000$ $5^3 = 125$ $3^3 = 27$ $2^{11} = 2048$ $3^5 = 243$ $10^5 = 100\,000$ $2^5 = 32$ $5^5 = 3125$ $a^n = p$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ $0{,}5^3 = 0{,}125$ $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ $a^n \cdot b^n = p \cdot q$ $0{,}1^3 = 0{,}001$ $0{,}2^3 = 0{,}008$ $\frac{a^n}{b^n} = \frac{p}{q}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{p}{q}$ $8^{\frac{1}{3}} = 2$ $\left(a^n\right)^k = p^k$ $(a \cdot b)^n = p \cdot q$ $125^{\frac{1}{3}} = 5$ $1000^{\frac{1}{3}} = 10$ $\left(10^3\right)^3 = 10^9$

b) **Stelle** zu *mindestens drei* Gleichungen die Umkehrung mit *n*. Wurzeln **auf**.

Gleichungen mit Brüchen und Dezimalbrüchen

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ $0{,}5^3 = 0{,}125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$

$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$ $0{,}2^3 = 0{,}008 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$

$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$ $0{,}1^3 = 0{,}001 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$

$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ $1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10$

$125^{\frac{1}{3}} = 5 \Leftrightarrow \sqrt[\frac{1}{3}]{5} = 125$ $8^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[\frac{1}{3}]{2} = 8$ $1000^{\frac{1}{3}} = 10 \Leftrightarrow \sqrt[\frac{1}{3}]{10} = 1000$

Gleichungen mit Variablen

$a^n = p \Leftrightarrow \sqrt[n]{p} = a$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n = p \cdot q \Leftrightarrow \sqrt[n]{p \cdot q} = a \cdot b$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{a}{b}$

$\left(a^n\right)^k = p^k \Leftrightarrow \sqrt[k]{p^k} = a^n = p$ $\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k} = p^k \Leftrightarrow \sqrt[k]{p^k} = a^n = p$

d) Unter den Gleichungen finden sich Gesetze der Potenzrechnung.

Gib *mindestens zwei* Beispiele **an**.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$