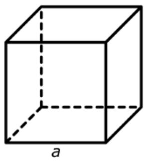
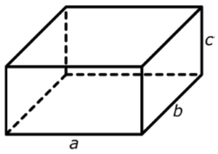
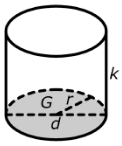
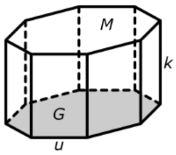
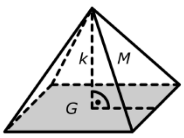
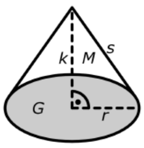
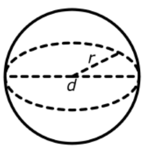
MATHE 364

31.12. genau 600 cm^2 aus der MSA-Formelsammlung

Wahlaufgabe: Wähle *mindestens zwei* Körper aus der offiziellen Formelsammlung zum MSA. Bearbeite die Teilaufgaben **a)** und **b)** für diese beiden Körper.

Körper		
	**Würfel** Volumen $V = a^3$ Oberfläche $O = 6 \cdot a^2$	a Kante
	**Quader** Volumen $V = a \cdot b \cdot c$ Oberfläche $O = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$	a, b, c Kanten
	**Zylinder** Volumen $V = G \cdot k = \pi \cdot r^2 \cdot k$ Mantelfläche $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k = \pi \cdot d \cdot k$ Oberfläche $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + k)$	$\pi \approx$ 3,14 d Durchmesser r Radius k Körperhöhe G Grundfläche
	**(gerades) Prisma** Volumen $V = G \cdot k$ Mantelfläche $M = u \cdot k$ Oberfläche $O = 2 \cdot G + M$	k Körperhöhe G Grundfläche u Umfang
	**Pyramide** Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k$ Oberfläche $O = G + M$	G Grundfläche M Mantelfläche k Körperhöhe
	**Kegel** Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot k$ Mantelfläche $M = \pi \cdot r \cdot s$ Oberfläche $O = G + M = \pi \cdot r \cdot (r + s)$	$\pi \approx$ 3,14 G Grundfläche M Mantelfläche r Radius s Mantellinie k Körperhöhe
	**Kugel** Volumen $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ Oberfläche $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$\pi \approx$ 3,14 r Radius d Durchmesser

a) **Bestimme** die Abmessungen so, dass die Oberfläche genau 600 cm^2 beträgt. **Berechne** mit diesen Abmessungen das Volumen.

b) Womit konntest du ein besonders großes Volumen erzielen? **Nenne** Beispiele.

Lösungen 31.12. genau 600 cm² aus der MSA-Formelsammlung

vorgegeben: $O = 600\ \text{cm}^2$

Nur die Kantenlänge des Würfels und Radius der Kugel sind eindeutig bestimmt. Bei allen anderen Körpern können die Maße individuell gewählt werden, z. B. durch

- *Probieren mit Zahlen,*
- *Rückwärtsrechnen mit Zahlen oder*
- *Term (Formel) für die Oberfläche mit 600 gleichsetzen, eine Länge wählen, Bestimmungsgleichung nach der anderen Länge auflösen.*

a) **Bestimme** die Abmessungen so, dass die Oberfläche genau 600 cm² beträgt. **Berechne** mit diesen Abmessungen das Volumen.

Körper	Abmessungen
Würfel	eindeutig: Kantenlänge 10 cm; $O = 6 \cdot (10\ \text{cm})^2 = 600\ \text{cm}^2$ $O = 6 \cdot a^2 = 600 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot a^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{100} = 10$ $V = (10\ \text{cm})^3 = 1000\ \text{cm}^3$
Quader	z. B. $O = 2 \cdot (18 \cdot 8 + 18 \cdot 6 + 8 \cdot 6) = 600$; $V = 18 \cdot 6 \cdot 8 = 864$ oder $O = 2 \cdot (15 \cdot 10 + 15 \cdot 6 + 10 \cdot 6) = 600$; $V = 900$ oder $O = 2 \cdot (12 \cdot 12 + 12 \cdot 6{,}5 + 12 \cdot 6{,}5) = 600$; $V = 936$ oder $O = 2 \cdot (11 \cdot 11 + 11 \cdot \frac{199}{22} + 11 \cdot \frac{199}{22}) = 600$; $V = 984{,}5$ oder $O = 2 \cdot (10 \cdot 9{,}5 + 10 \cdot \frac{410}{39} + 9{,}5 \cdot \frac{410}{39}) = 600$; $V \approx 998{,}71$
Zylinder	$O = 2 \cdot G + 2 \cdot \pi \cdot k = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + k)$ zum Beispiel $r = 5$ cm wählen, einsetzen, Gleichung lösen $O = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot k = 600 \quad \vert :2$ $\Leftrightarrow \quad \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot k = 300 \quad \vert :5$ $\Leftrightarrow \quad \pi \cdot 5 + \pi \cdot k = 60 \quad \vert -5\pi$ $\Leftrightarrow \quad \pi \cdot k = 60 - 5\pi \quad \vert :\pi$ $\Leftrightarrow \quad k = \frac{60}{\pi} - 5 \approx 14{,}0986$ Lösung der Gleichung in den Term für das Volumen einsetzen $V = \pi \cdot r^2 \cdot k = \pi \cdot 5^2 \cdot (\frac{60}{\pi} - 5) \approx 1107{,}30$
gerades Prisma	zum Beispiel ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche; Kathetenlängen 5 cm und 12 cm, Hypotenusenlänge 13 cm sowie Körperhöhe $k = 18$ cm ergibt $O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 + 18 \cdot (5 + 12 + 13) = 600$ $V = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot 18 = 540$ oder $O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 + \frac{91}{6} \cdot (5 + 12 + 13) = 600$ $V = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \frac{91}{6} = 819$

Lösungen 31.12. genau 600 cm² aus der MSA-Formelsammlung

a) **Bestimme** die Abmessungen so, dass die Oberfläche genau 600 cm² beträgt. **Berechne** mit diesen Abmessungen das Volumen.

Körper	Abmessungen
Pyramide	zum Beispiel eine quadratische Grundfläche mit 15 cm als Länge der Grundkanten sowie der Körperhöhe $k = 10$ cm; $O = 15\cdot 15 + 4\cdot \frac{1}{2}\cdot 15\cdot \sqrt{7{,}5^2 + 10^2} = 600$ $V = \frac{1}{3}\cdot 15\cdot 15\cdot 10 = 750$ zum Beispiel eine rechteckige Grundfläche mit 14 cm und 13,5 cm als Längen der Grundkanten sowie einer Körperhöhe k, die durch Probieren oder durch Lösen der Gleichung bestimmt werden kann $600 = 14\cdot 13{,}5 + 2\cdot \frac{1}{2}\cdot 14\cdot \sqrt{6{,}75^2 + k^2} + 2\cdot \frac{1}{2}\cdot 13{,}5\cdot \sqrt{7^2 + k^2}$ $\Rightarrow k \approx 13{,}2710$ $V \approx \frac{1}{3}\cdot 14\cdot 13{,}5\cdot 13{,}2710 \approx 836$
Kegel	$O = G + M = \pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot s = \pi\cdot r\cdot (r+s)$ mit $s = \sqrt{r^2 + k^2}$ zum Beispiel eine Grundfläche mit 8 cm Radius sowie einer Körperhöhe k, die durch Probieren oder durch Lösen der Gleichung bestimmt werden kann $O = \pi\cdot 8\cdot (8 + \sqrt{8^2 + k^2}) = 600$ $\Rightarrow k \approx 13{,}7098$ $V \approx \frac{1}{3}\cdot \pi\cdot 8^2\cdot 13{,}7098 \approx 918{,}84$
Kugel	Der Radius ist eindeutig bestimmt. Er kann durch Probieren bestimmt werden oder durch Lösen der Gleichung. $O = 4\pi\cdot r^2 = 600 \quad \vert :(4\pi)$ $\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{600}{4\pi}$ $\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{600}{4\pi}} \approx 6{,}9099$ $V = \frac{4}{3}\cdot \pi\cdot \sqrt{\frac{600}{4\pi}}^{\,3} = 1000\cdot \sqrt{\frac{6}{\pi}}$ $V \approx \frac{4}{3}\cdot \pi\cdot 6{,}9099^3 \approx 1381{,}98$

b) *siehe letzte Seite*

Lösungen 31.12. genau 600 cm^2 aus der MSA-Formelsammlung

b) Womit konntest du ein besonders großes Volumen erzielen? **Nenne** Beispiele.

Bei der Kugel und beim Würfel sind die Abmessungen durch die Vorgabe 600 cm^2 Oberfläche eindeutig bestimmt.

Von allen Körpern mit gleich großen Oberflächen hat eine Kugel stets das größte Volumen.

Ein Würfel mit 600 cm^2 Oberfläche hat ein größerers Volumen als ein Quader mit verschieden langen Kanten bei gleich großer Oberfläche.

Bei allen anderen Körpern ist das Volumen von den Abmessungen abhängig, die du gewählt hast. Trotzdem könnten deine Beispiele die folgenden Regeln bestätigen:

- am besten ist die Kugel; sie hat bei 600 cm^2 Oberfläche das größte Volumen
- ein Quader mit etwa gleich langen Kanten hat bei gleicher Oberfläche ein größeres Volumen als ein Quader mit sehr unterschiedlichen Kantenlängen; der beste Quader ist der Würfel, bei dem alle Kantenlängen gleich sind.
- Prismen und Pyramiden, Zylinder und Kegel haben bei 600 cm^2 Oberfläche ein großes Volumen, wenn die Höhe ungefähr so groß ist wie der Durchmesser bzw. die Diagonalenlänge der Grundfläche.

  einfacher: wenn die Höhe ungefähr der Breite entspricht

  (genauere Formulierungen und Ergebnisse möglich)