MATHE 364

26.01. Begründung der Pfadregel

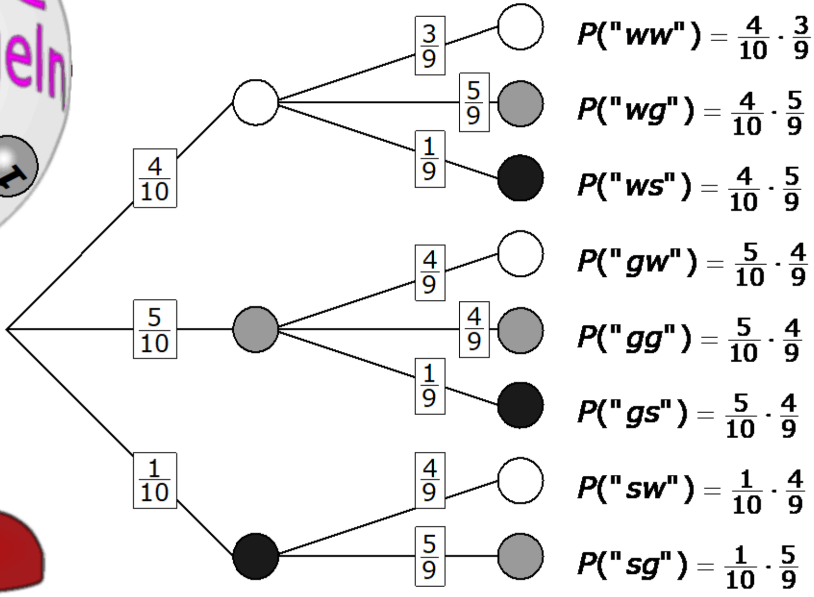
Zufallsexperiment: Dieser Behälter wird geschüttelt. Anschließend werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) **Ordne** *mindestens vier* Beschriftungen jeweils einem passenden Teil des Baudiagramms **zu**.

Ergänze: Das Zufallsexperiment ist _____stufig.

Ergänze:

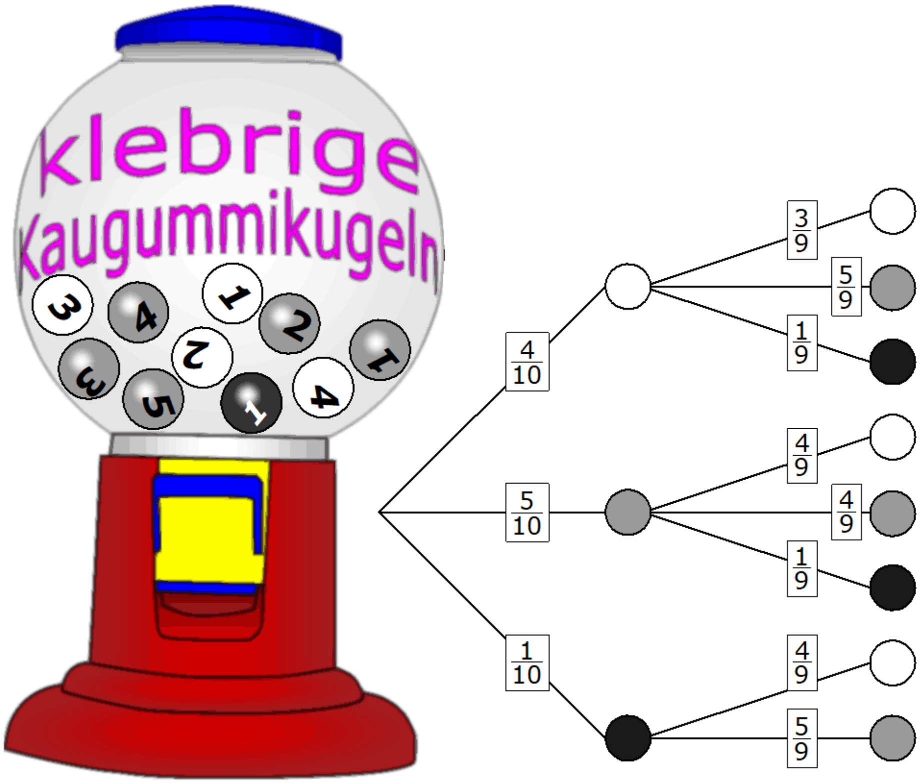
> **Pfadregel**
> Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses am Ausgang eines Baumdiagramms berechnet man, indem man die Zweigwahrscheinlichkeiten entlang des Pfades vom Start zum entsprechenden Ausgang miteinander ___________________.
> Ein anderer Name für die Pfadregel ist deshalb auch __________________satz.



Wahlaufgaben:

Bearbeite *eine* der beiden Aufgaben **b)** *oder* **c)** zur Begründung der Pfadregel auf den nächsten beiden Seiten.

26.01. Begründung der Pfadregel



$P(\text{"}ww\text{"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$

$P(\text{"}wg\text{"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"}ws\text{"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"}gw\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"}gg\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

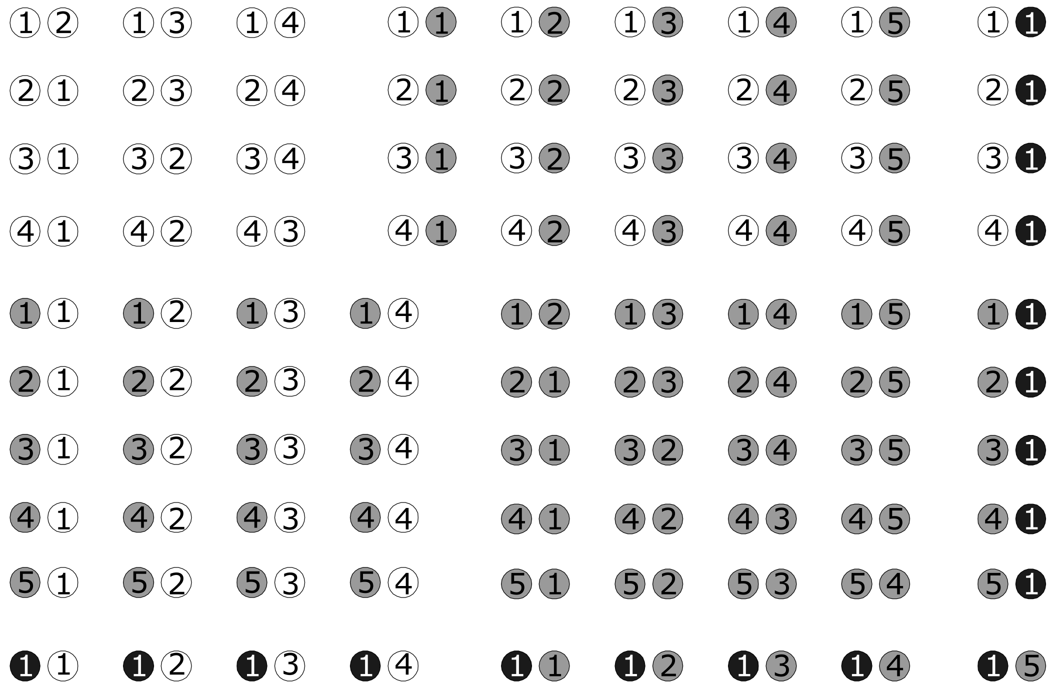
$P(\text{"}gs\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"}sw\text{"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"}sg\text{"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9}$

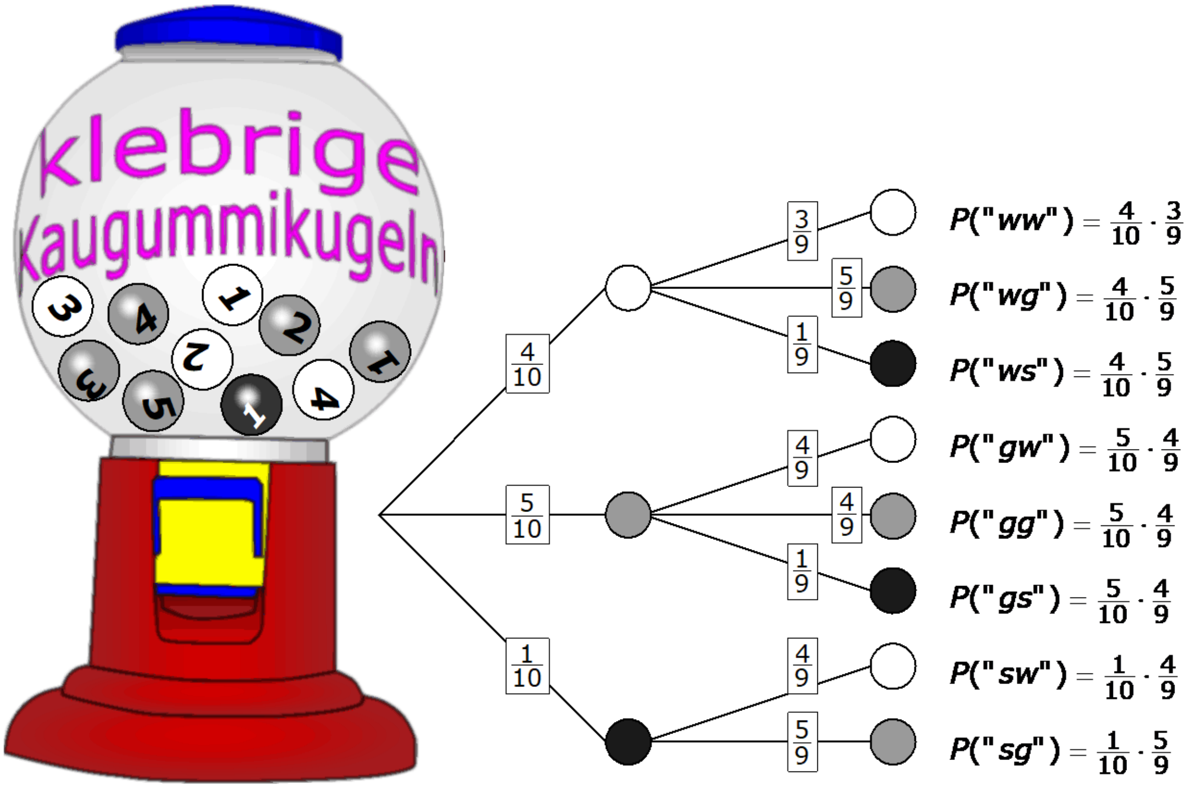
b) Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen: Mit $P(\text{"}gg\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$ berechnet man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *„Es werden zwei graue Kugeln gezogen"*. **Begründe** anhand der unteren Abbildung, *warum* man $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$ rechnet.

Als Hilfe darfst du die Zusatzfragen beantworten, musst es aber nicht.



- Im Behälter liegen doch nur 10 Kugeln. Warum sind hier so viele abgebildet?
- Warum kommen die Paare ②② und ②② vor, aber nicht das Paar ②②?
- Wie viele Paare sind günstig für das Ereignis „*ww*"? Wie viele gibt es insgesamt?
- Wodurch zeigt sich das „Ziehen mit Zurücklegen" im Baumdiagramm?

26.01. Begründung der Pfadregel



c) Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen: Mit $P(\text{"}ww\text{"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$ berechnet man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es werden zwei weiße Kugeln gezogen". Der Lückentext erklärt, *warum* man $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$ rechnet.

Anteile von Anteilen

Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{\square}{\square}$ ist die erste gezogene Kugel weiß. Diese Wahrscheinlichkeit ist ein Schätzwert für die relative Häufigkeit. Wenn das Zufallsexperiment z. B. 100 mal wiederholt wird, erwartet man, dass ungefähr ____ mal die erste gezogene Kugel weiß ist.

Beim zweiten Zug ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{\square}{\square}$ für eine graue Kugel, aber nur noch $\frac{\square}{\square}$ für eine weiße Kugel, da bereits ______________________ und insgesamt nur noch ___________________________________.

Wenn das Zufallsexperiment 100 mal wiederholt wird, erwartet man, dass von den ungefähr ____ Fällen, bei denen die erste gezogene Kugel weiß war, eine Anzahl von ungefähr ____ Fällen ebenfalls eine zweite weiße Kugel ergab, also ein Anteil von $\frac{\square}{\square}$.

Man berechnet den Anteil $\frac{3}{9}$ von $\frac{4}{10}$, indem man beide Anteile multipliziert: $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$.

- **Begründe**, *warum* man mit $P(\text{"}gg\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *„Es werden zwei graue Kugeln gezogen"* berechnet.
  Der Lückentext könnte Vorbild sein, du musst ihn aber nicht lesen oder ausfüllen.

Lösungen 26.01. Begründung der Pfadregel

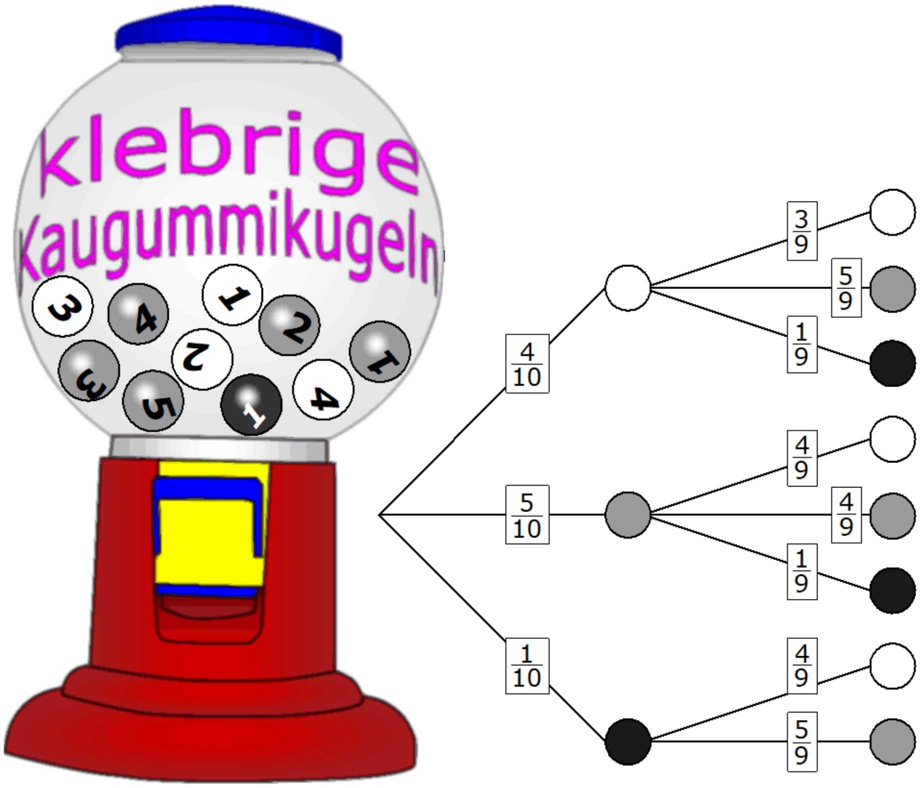
Zufallsexperiment: Dieser Behälter wird geschüttelt. Anschließend werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) **Ordne** *mindestens vier* Beschriftungen jeweils einem passenden Teil des Baudiagramms **zu**.

Ergänze: Das Zufallsexperiment ist zweistufig.

Ergänze:

Pfadregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses am Ausgang eines Baumdiagramms berechnet man, indem man die Zweigwahrscheinlichkeiten entlang des Pfades vom Start zum entsprechenden Ausgang miteinander multipliziert.
Ein anderer Name für die Pfadregel ist deshalb auch Multiplikationssatz.



$P(\text{"ww"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$

$P(\text{"wg"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"ws"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"gw"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"gg"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

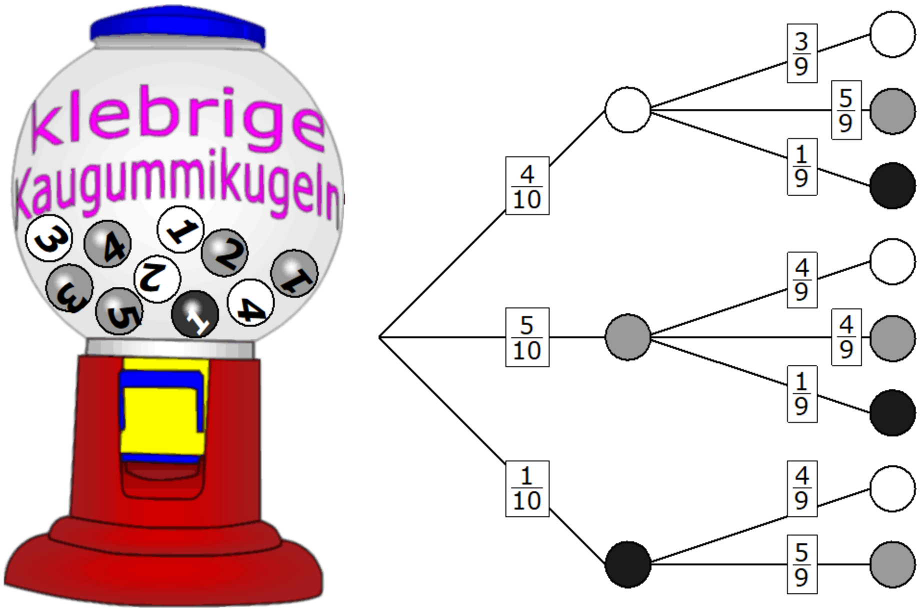
$P(\text{"gs"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"sw"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"sg"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9}$

Lösungen zu **b)** und **c)** *auf den nächsten beiden Seiten*

Lösungen 26.01. Begründung der Pfadregel



$P(\text{"}ww\text{"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$

$P(\text{"}wg\text{"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"}ws\text{"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"}gw\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

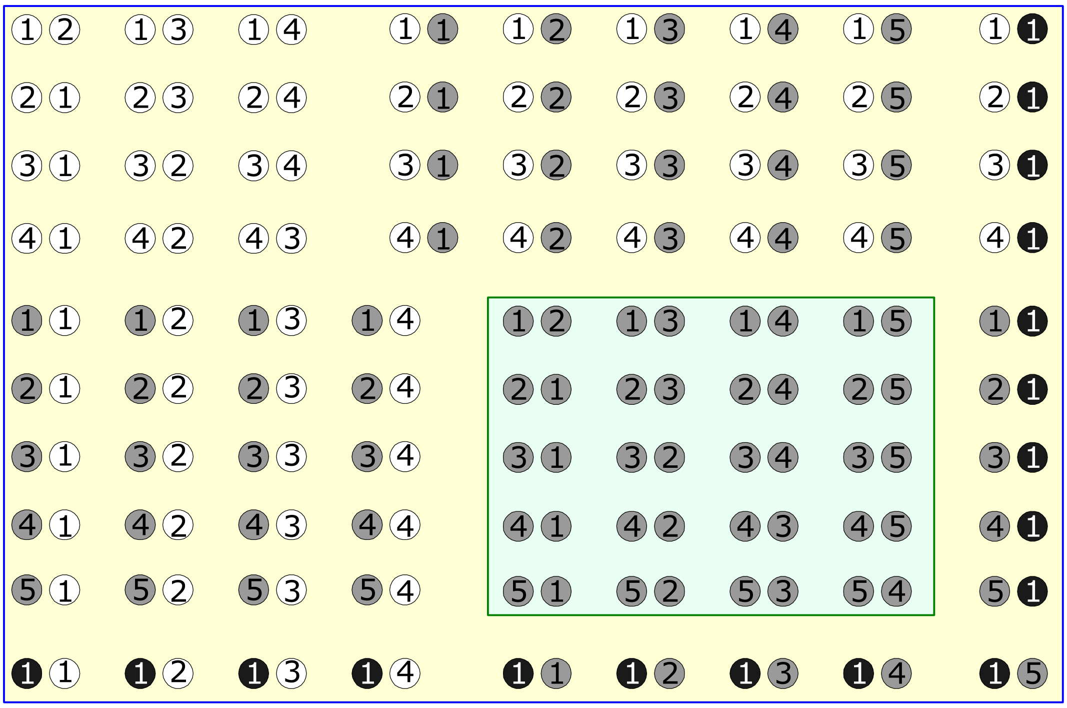
$P(\text{"}gg\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"}gs\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"}sw\text{"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}$

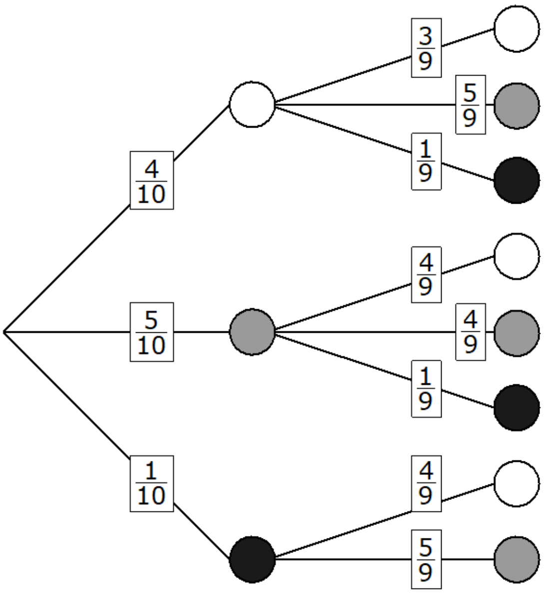
$P(\text{"}sg\text{"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9}$

b) Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen: Mit $P(\text{"}gg\text{"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$ berechnet man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *„Es werden zwei graue Kugeln gezogen"*. **Begründe** anhand der unteren Abbildung, *warum* man $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$ rechnet. Es gibt insgesamt $10 \cdot 9$ Möglichkeiten, ein Paar aus der ersten gezogenen Kugel und der zweiten gezogenen Kugel zu bilden; das sind alle Möglichkeiten. Davon enthalten $5 \cdot 4$ Paare zwei graue Kugeln. Das sind die „günstigen" Ergebnisse. Der Term dividiert also die Anzahl der „günstigen" durch die Anzahl aller Möglichkeiten. Das ist die Laplace-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „*gg*".



- *Beantwortung der Zusatzfragen siehe nächste Seite*

Lösungen 26.01. Begründung der Pfadregel



$P(\text{"ww"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$

$P(\text{"wg"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"ws"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"gw"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"gg"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

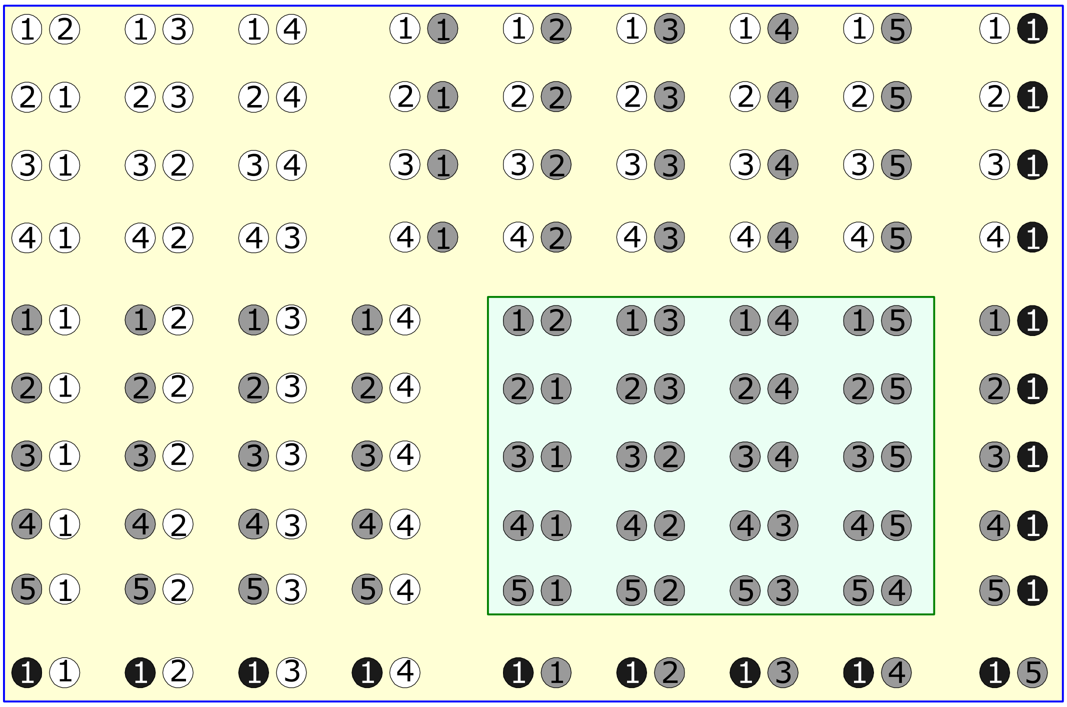
$P(\text{"gs"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"sw"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"sg"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9}$

b) **Begründe** anhand der unteren Abbildung, *warum* man $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$ rechnet.

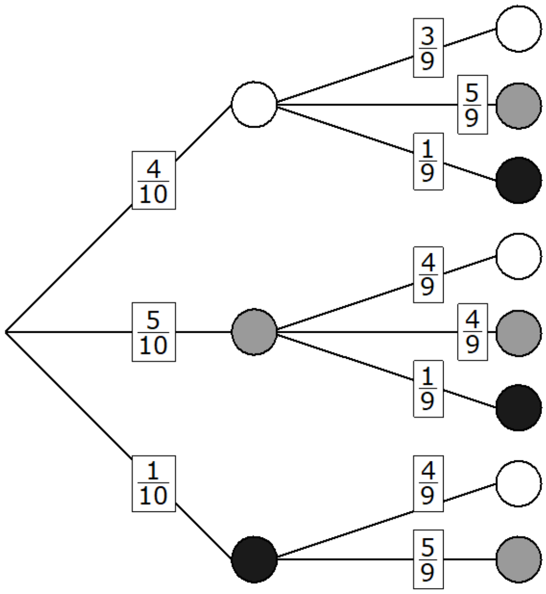
Als Hilfe darfst du die Zusatzfragen beantworten, musst es aber nicht.



- Im Behälter liegen doch nur 10 Kugeln. Warum sind hier so viele abgebildet?
  Die Abbildung zeigt alle 90 Paare, die man aus den zehn Kugeln bilden kann, aber nicht alle gleichzeitig.
- Warum kommen die Paare ②② und ②② vor, aber nicht das Paar ②②?
  Die graue 2 kann mit der weißen 2 kombiniert werden, aber nicht mit sich selbst, da ohne Zurücklegen gezogen wird. Die graue 2 kann man nur einmal ziehen.
- Wie viele Paare führen zum Ereignis „*ww*"? **12** Wie viele gibt es insgesamt? **90**
- Wodurch zeigt sich das „Ziehen mit Zurücklegen" im Baumdiagramm?
  Nach dem ersten Zug liegen nur noch 9 Kugeln im Behälter, eine weniger von der Farbe der ersten gezogenen Kugel.

MATHE 364

Lösungen 26.01. Begründung der Pfadregel



$P(\text{"ww"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$

$P(\text{"wg"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"ws"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P(\text{"gw"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"gg"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"gs"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"sw"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P(\text{"sg"}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9}$

c) Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen: Mit $P(\text{"ww"}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$ berechnet man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es werden zwei weiße Kugeln gezogen". Der Lückentext erklärt, *warum* man $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$ rechnet.

Anteile von Anteilen

Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{10}$ ist die erste gezogene Kugel weiß. Diese Wahrscheinlichkeit ist ein Schätzwert für die relative Häufigkeit. Wenn das Zufallsexperiment z. B. 100 mal wiederholt wird, erwartet man, dass ungefähr 40 mal die erste gezogene Kugel weiß ist.

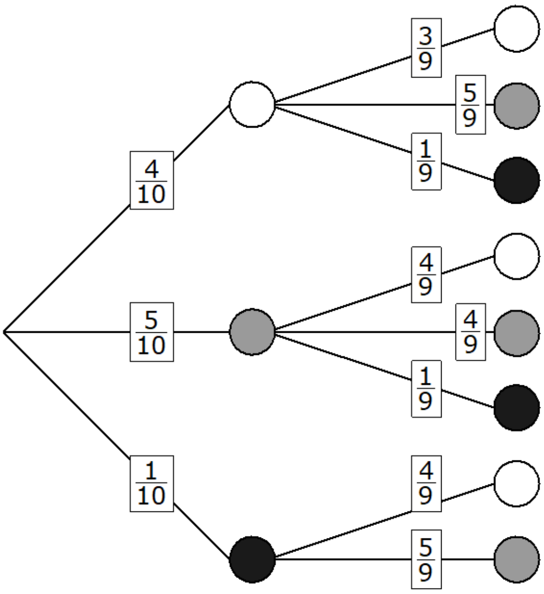
Beim zweiten Zug ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$ für eine graue Kugel, aber nur noch $\frac{3}{9}$ für eine weiße Kugel, da bereits eine weiße Kugel gezogen wurde und insgesamt nur noch neun Kugeln im Behälter liegen.

Wenn das Zufallsexperiment 100 mal wiederholt wird, erwartet man, dass von den ungefähr 40 Fällen, bei denen die erste gezogene Kugel weiß war, eine Anzahl von ungefähr 13 Fällen ebenfalls eine zweite weiße Kugel ergab, also ein Anteil von $\frac{3}{9}$.

Man berechnet den Anteil $\frac{3}{9}$ von $\frac{4}{10}$, indem man beide Anteile multipliziert: $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$.

- **Begründe**, *warum* man mit $P(\text{"gg"}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *„Es werden zwei graue Kugeln gezogen"* berechnet. → *nächste Seite*
  Der Lückentext ↑ könnte Vorbild sein, du musst ihn aber nicht lesen oder ausfüllen. siehe oben

Lösungen 26.01. Begründung der Pfadregel



$P("ww") = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$

$P("wg") = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P("ws") = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}$

$P("gw") = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P("gg") = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P("gs") = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P("sw") = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$P("sg") = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9}$

c) Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen: Mit $P("ww") = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$ berechnet man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es werden zwei weiße Kugeln gezogen". Der Lückentext erklärt, *warum* man $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$ rechnet.

Anteile von Anteilen

Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{10}$ ist die erste gezogene Kugel grau. Diese Wahrscheinlichkeit ist ein Schätzwert für die relative Häufigkeit. Wenn das Zufallsexperiment z. B. 100 mal wiederholt wird, erwartet man, dass ungefähr 50 mal die erste gezogene Kugel grau ist.

Beim zweiten Zug ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9}$ für eine weiße Kugel, aber auch nur noch $\frac{4}{9}$ für eine graue Kugel, da bereits eine graue Kugel gezogen wurde und insgesamt nur noch neun Kugeln im Behälter liegen.

Wenn das Zufallsexperiment 100 mal wiederholt wird, erwartet man, dass von den ungefähr 50 Fällen, bei denen die erste gezogene Kugel grau war, eine Anzahl von ungefähr 22 Fällen ebenfalls eine zweite graue Kugel ergab, also ein Anteil von $\frac{4}{9}$.

Man berechnet den Anteil $\frac{4}{9}$ von $\frac{5}{10}$, indem man beide Anteile multipliziert: $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$.

- **Begründe**, *warum* man mit $P("gg") = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *„Es werden zwei graue Kugeln gezogen"* berechnet. *siehe oben*