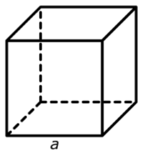
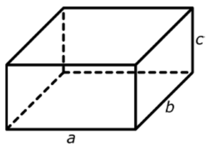
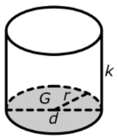
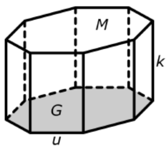
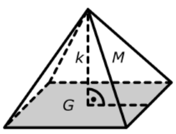
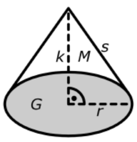
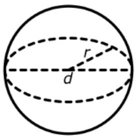
MATHE 364

02.01. Körpernetze zur MSA-Formelsammlung

a) Zu einem der abgebildeten Körper gibt es kein Netz.
Gib an, welcher Körper das ist.

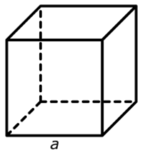
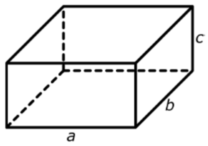
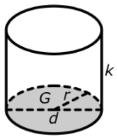
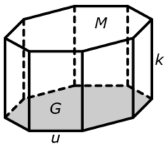
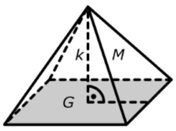
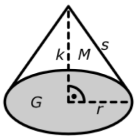
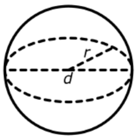
	Körper	
	**Würfel** Volumen $V = a^3$ Oberfläche $O = 6 \cdot a^2$	a Kante
	**Quader** Volumen $V = a \cdot b \cdot c$ Oberfläche $O = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$	a, b, c Kanten
	**Zylinder** Volumen $V = G \cdot k = \pi \cdot r^2 \cdot k$ Mantelfläche $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k = \pi \cdot d \cdot k$ Oberfläche $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + k)$	$\pi \approx$ 3,14 d Durchmesser r Radius k Körperhöhe G Grundfläche
	**(gerades) Prisma** Volumen $V = G \cdot k$ Mantelfläche $M = u \cdot k$ Oberfläche $O = 2 \cdot G + M$	k Körperhöhe G Grundfläche u Umfang
	**Pyramide** Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k$ Oberfläche $O = G + M$	G Grundfläche M Mantelfläche k Körperhöhe
	**Kegel** Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot k$ Mantelfläche $M = \pi \cdot r \cdot s$ Oberfläche $O = G + M = \pi \cdot r \cdot (r + s)$	$\pi \approx$ 3,14 G Grundfläche M Mantelfläche r Radius s Mantellinie k Körperhöhe
	**Kugel** Volumen $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ Oberfläche $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$\pi \approx$ 3,14 r Radius d Durchmesser

b) **Zeichne** das Netz *eines* der abgebildeten Körper.
Erkläre an diesem Netz die angegebene Formel für die Oberfläche.

c) Der Körper soll in zwei Teile mit gleich großen Rauminhalten zerteilt werden.
Skizziere, wie im Körpernetz eine gerade Schnittlinie verlaufen könnte.

Lösungen 02.01. Körpernetze zur MSA-Formelsammlung

a) Zu einem der abgebildeten Körper gibt es kein Netz. **Gib an**, welcher Körper das ist. Die Kugeloberfläche lässt sich nicht zu einer ebenen Fläche „abwickeln“.

	Körper	
	**Würfel** Volumen $V = a^3$ Oberfläche $O = 6 \cdot a^2$	a Kante
	**Quader** Volumen $V = a \cdot b \cdot c$ Oberfläche $O = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$	a, b, c Kanten
	**Zylinder** Volumen $V = G \cdot k = \pi \cdot r^2 \cdot k$ Mantelfläche $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k = \pi \cdot d \cdot k$ Oberfläche $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + k)$	$\pi \approx$ 3,14 d Durchmesser r Radius k Körperhöhe G Grundfläche
	**(gerades) Prisma** Volumen $V = G \cdot k$ Mantelfläche $M = u \cdot k$ Oberfläche $O = 2 \cdot G + M$	k Körperhöhe G Grundfläche u Umfang
	**Pyramide** Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k$ Oberfläche $O = G + M$	G Grundfläche M Mantelfläche k Körperhöhe
	**Kegel** Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot k$ Mantelfläche $M = \pi \cdot r \cdot s$ Oberfläche $O = G + M = \pi \cdot r \cdot (r + s)$	$\pi \approx$ 3,14 G Grundfläche M Mantelfläche r Radius s Mantellinie k Körperhöhe
	**Kugel** Volumen $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ Oberfläche $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$\pi \approx$ 3,14 r Radius d Durchmesser

Lösungen zu **b)** und **c)** *siehe nächste Seiten*

Lösungen 02.01. Körpernetze zur MSA-Formelsammlung

b) **Zeichne** das Netz *eines* der abgebildeten Körper.
Erkläre an diesem Netz die angegebene Formel für die Oberfläche.

individuelle Lösungen; unterschiedliche Darstellungen der Netze sowie unterschiedliche Erklärungen möglich;

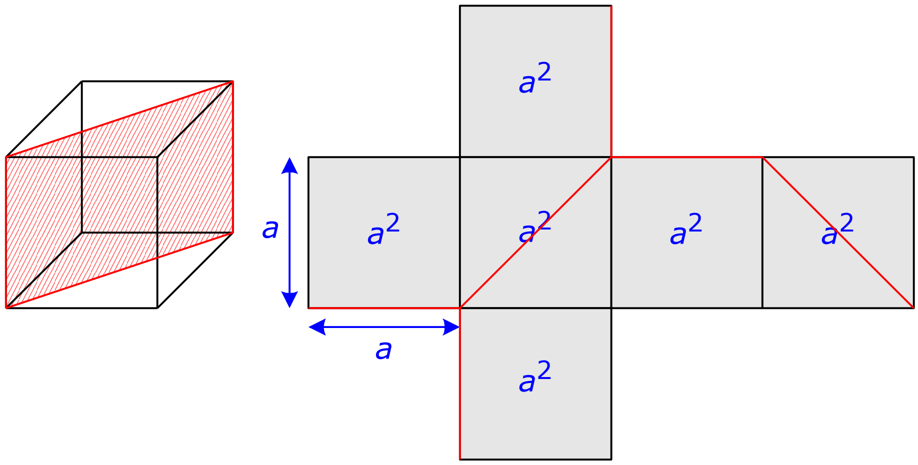
siehe Abbildungen und Erklärungen für die einzelnen Körper

c) Der Körper soll in zwei Teile mit gleich großen Rauminhalten zerteilt werden.
Skizziere, wie im Körpernetz eine gerade Schnittlinie verlaufen könnte.

individuelle Lösungen: Die Körper können auf unterschiedliche Arten mit einem ebenen Schnitt halbiert werden, siehe Abbildungen für die einzelnen Körper

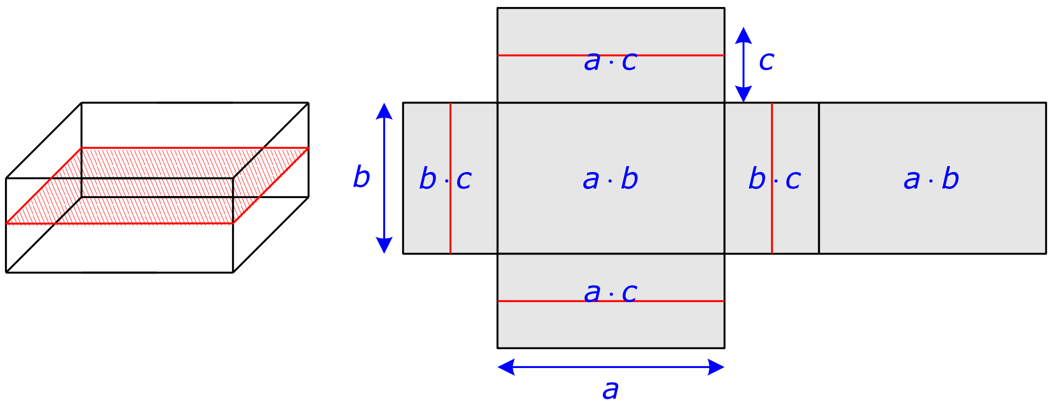
---

Die Oberfläche des Würfels besteht aus sechs kongruenten Quadraten mit dem Flächeninhalt a^2. Also ist $O = 6 \cdot a^2$.



Die Abbildung zeigt einen Schnitt senkrecht zur Grundfläche diagonal durch zwei Ecken der Grundfläche. (*andere Lösungen möglich*)

Die Oberfläche des Quaders besteht aus sechs Rechtecken, von denen je zwei kongruent sind. Sie haben die Flächeninhalte $a \cdot b$, $a \cdot c$ und $b \cdot c$.
Also ist $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$.

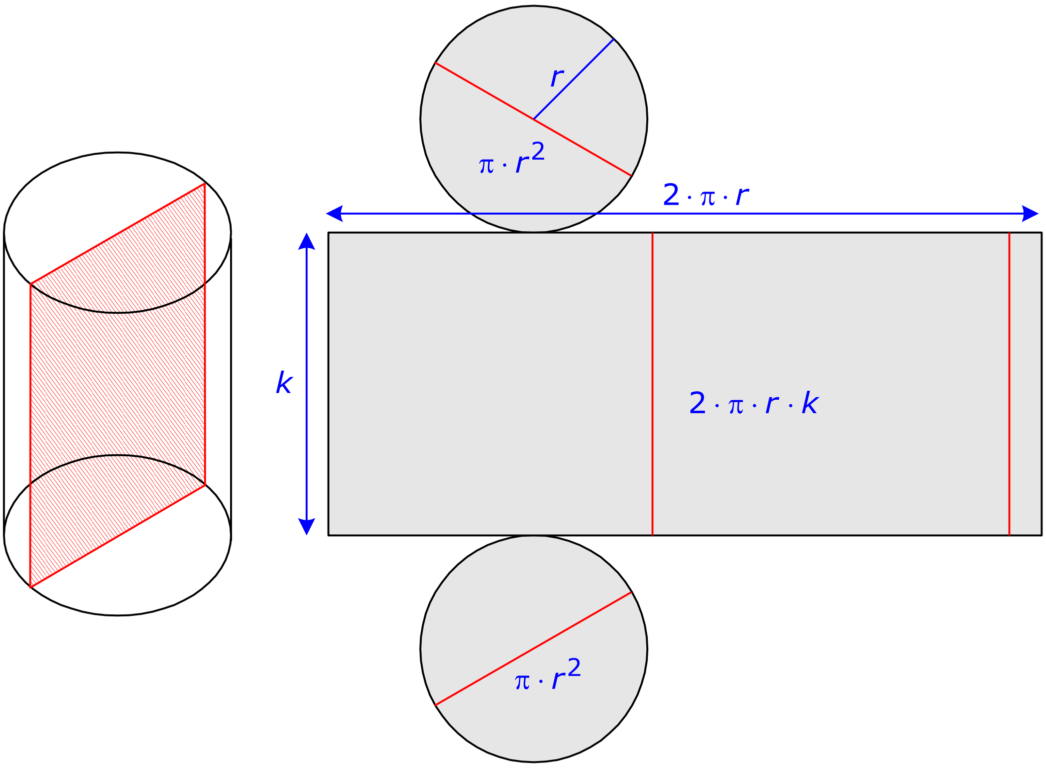


Die Abbildung zeigt einen Schnitt parallel zur Grundfläche durch die Mittelpunkte der senkrechten Kanten. (*andere Lösungen möglich*)

MATHE 364

Lösungen 02.01. **Körpernetze zur MSA-Formelsammlung**

Die Oberfläche des Zylinders besteht aus zwei kongruenten Kreisen mit dem Flächeninhalt $\pi \cdot r^2$ und einem Rechteck mit dem Kreisumfang $2 \cdot \pi \cdot r$ als Breite und der Körperhöhe k als Höhe. Also ist $O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k$.

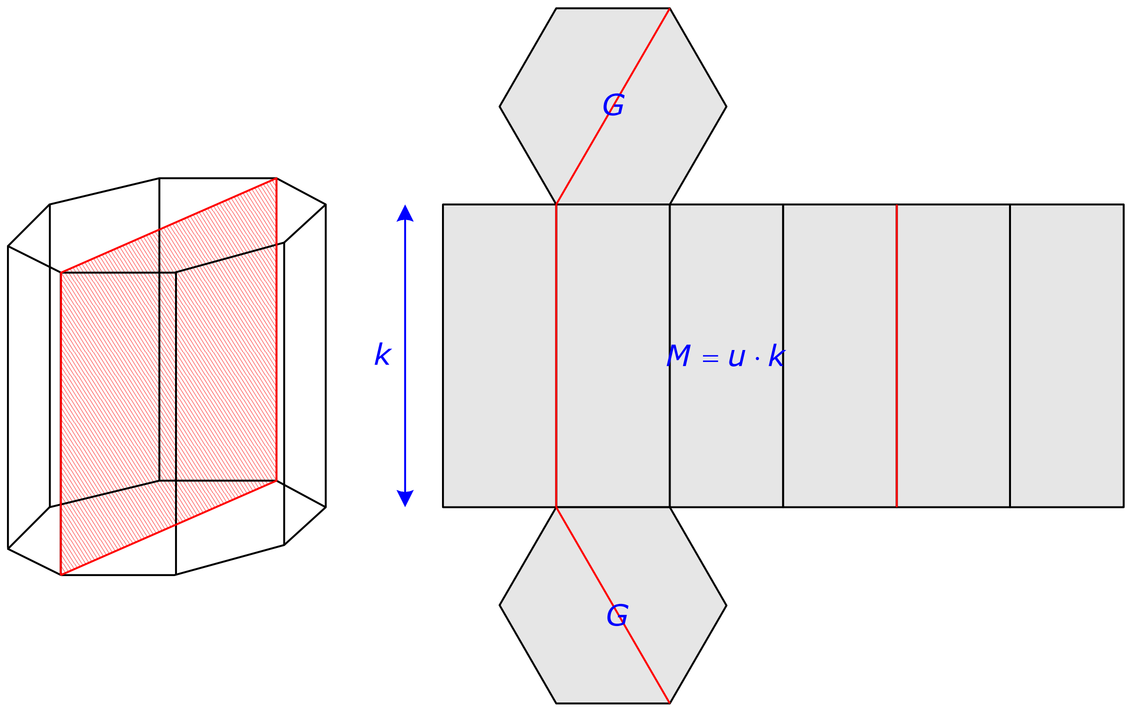


Die Abbildung zeigt einen Schnitt senkrecht zur Grundfläche durch den Mittelpunkt der Grundfläche. (*andere Lösungen möglich*)

Lösungen 02.01. Körpernetze zur MSA-Formelsammlung

Die Grundfläche eines geraden Prismas kann ein beliebiges n-Eck sein, das nicht unbedingt regelmäßig sein muss; die MSA-Formelsammlung zeigt als Beispiel ein Sechseck. Deshalb kann als Inhalt der Grundfläche hier nur G genannt werden. Das Prisma hat einen zur Grundfläche kongruenten „Deckel". Beide zusammen haben den Inhalt $2 \cdot G$.

Der Mantel besteht aus n Rechtecken mit der Körperhöhe k als Höhe. Die Breite der einzelnen Rechtecke kann verschieden sein, sie entspricht der Länge der jeweiligen Kante in der Grundfläche. Der Inhalt der Mantelfläche ist $M = u \cdot k$; dabei ist u der Umfang der Grundfläche. Insgesamt ist $O = 2 \cdot G + M$.



Die Abbildung zeigt einen Schnitt senkrecht zur Grundfläche durch den Mittelpunkt der Grundfläche. (*andere Lösungen möglich*)

Lösungen 02.01. Körpernetze zur MSA-Formelsammlung

Die Grundfläche einer geraden Pyramide kann ein beliebiges n-Eck sein, das nicht unbedingt regelmäßig sein muss. Deshalb kann als Inhalt der Grundfläche hier nur G genannt werden. Die MSA-Formelsammlung zeigt als Beispiel ein Rechteck.

Der Mantel besteht aus n Dreiecken. In der Abbildung mit einer rechteckigen Grundfläche sind es vier gleichschenklige Dreiecke, von denen je zwei kongruent sind. Die Höhen dieser Dreiecke stimmen nicht mit der Körperhöhe k überein und werden deshalb mit der Variablen h bezeichnet. In der Abbildung haben die „breiten" und die „schmalen" Dreiecke unterschiedliche Höhen. Die Schenkel der vier Dreiecke sind gleich lang, es sind sind Kanten, die zur Spitze führen.

Insgesamt ist $O = G + M$.

Abstand des Schnitts von der Spitze = "*Höhe der oberen Hälfte*":

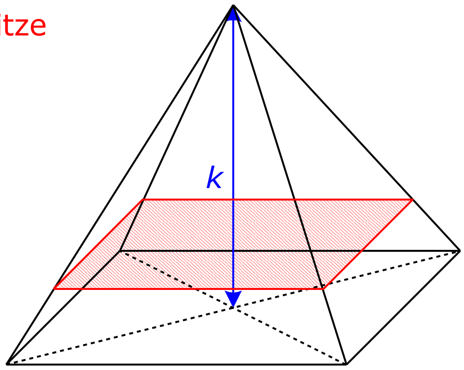
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot k \approx 0{,}7937005259 \cdot k$$

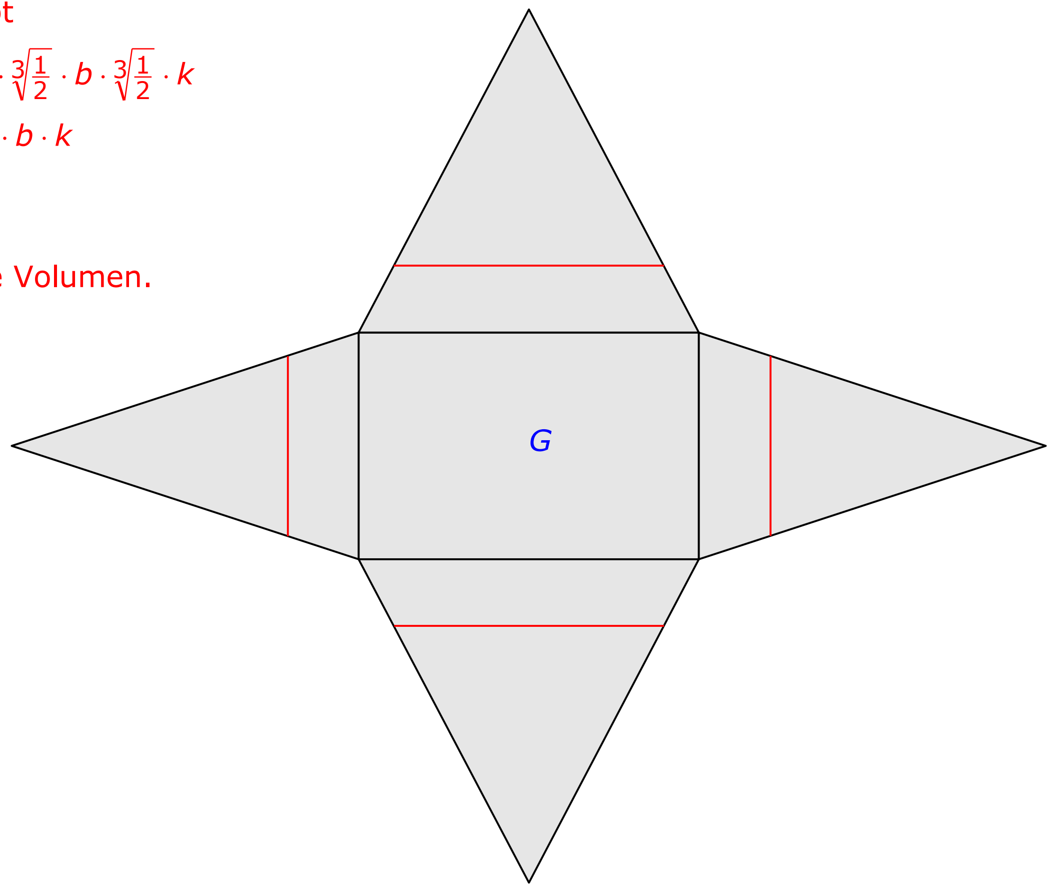
Erklärung: Die Kantenlängen a, b und k werden mit $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ multipliziert.

Das ergibt

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot b \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot k$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot k$$
$$= \frac{1}{2} \cdot V$$

das halbe Volumen.

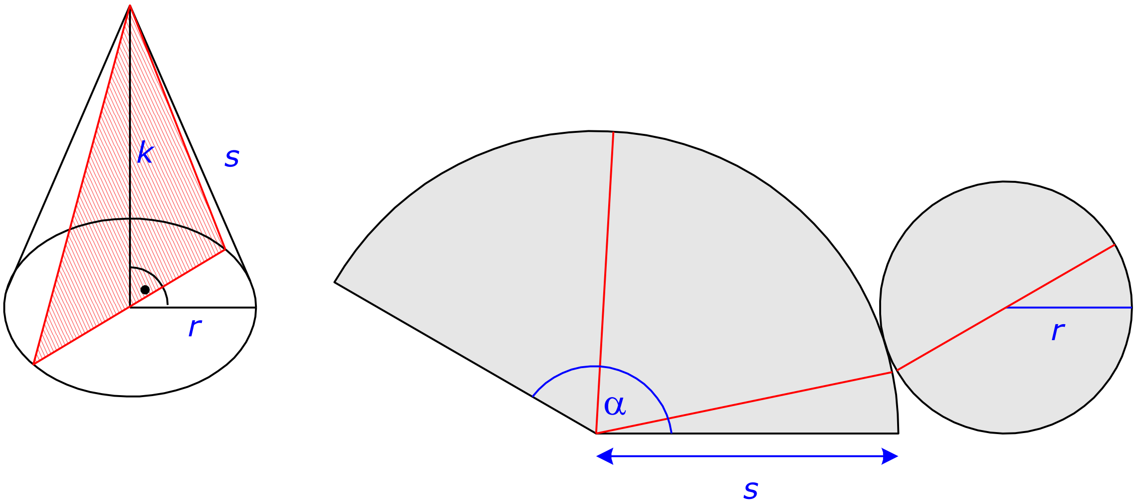




Die Abbildung zeigt einen Schnitt parallel zur Grundfläche. *Die Pyramide wird nicht in der halben Höhe geschnitten.* (*andere Lösungen möglich*)

Lösungen 02.01. Körpernetze zur MSA-Formelsammlung

Die Oberfläche des Kegels besteht aus einem Kreis als Grundfläche und einem Kreissektor als Mantelfläche. Also ist $O = G + M = \pi \cdot r^2 + M$. Der Zusammenhang $O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r \cdot (r + s)$ mit $s = \sqrt{r^2 + k^2}$ wird unten hergeleitet.



In der Abbildung spannt der Sektor den Kreisbogen mit einen Winkel von 150° auf. $\frac{5}{12}$ eines Kreises mit 40 mm Radius haben den gleichen Umfang wie ein voller Kreis mit $16,\overline{6}$ mm Radius.

Ansatz: Der Kreissektor hat den Radius *s*; die Länge des Kreisbogens ist gleich dem Umfang der Grundfläche.

Herleitung:

linkes Bild

$s^2 = r^2 + k^2$

$s = \sqrt{r^2 + k^2}$

rechtes Bild

Länge des Kreisbogens = Umfang der Grundfläche

$b = u$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\text{Länge des Kreisbogens}}{\text{Umfang Vollkreis mit Radius } s} = \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot s}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot s}$$

Fläche des Kreissektors

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{M}{\pi \cdot s^2}$$

$$M = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot s^2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot s} \cdot \pi \cdot s^2$$

$$M = \frac{r}{s} \cdot \pi \cdot s^2 = r \cdot \pi \cdot s$$

Fläche des kleinen Kreises

$G = \pi \cdot r^2$

Die Abbildung zeigt einen Schnitt senkrecht zur Grundfläche durch den Mittelpunkt der Grundfläche. (*Alternative: Schnitt parallel zur Grundfläche im Abstand von 79,37 % der Körperhöhe, gemessen von der Spitze aus, siehe Pyramide*)