

MATHE 364

02.07. Fit für Berufsschule oder Oberstufe: Gleichungen

Die Abbildung zeigt, wie man aus der Vorgabe $x = 7$ Gleichungen mit der Lösung 7 entwickeln kann. In der letzten Zeile steht jeweils die fertige Gleichung. Zwei dieser Gleichungen haben allerdings außer $x = 7$ noch eine weitere Lösung.

$$\begin{array}{l} x = 7 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow 2x = 14 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow 2,5x = \frac{1}{2}x + 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 7 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow x - 7 = 0 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow (x - 7)^2 = 0 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 7 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{12} = \frac{7}{12} \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{21}{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 7 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{7} \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow (x - 7) = 0 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Rightarrow (x - 7) \cdot (x - 3) = 0 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x - 3x - 7 \cdot (-3) = 0 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow x = 7 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Leftrightarrow x - 9 = -2 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Rightarrow (x - 9)^2 = 4 \quad | \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \Rightarrow x^2 - 18x + 81 = 4 \end{array}$$

Wahlaufgaben: Bearbeite *mindestens drei* der Teilaufgaben **a)** bis **h)**.

- Trage** *mindestens drei* Äquivalenzumformungsschritte in die Abbildung **ein**.
- Führe** bei *mindestens einer* Gleichung in der letzten Zeile die Probe **durch**:
Setze $x = 7$ **ein** und **gib** den Wert des linken sowie den Wert des rechten Terms **an**. **Vergleiche** diese Werte mit den Werten in der vorletzten Zeile.
- Entwickle** *zwei verschiedene* Gleichungen mit der Lösung 5. Diese Gleichungen sollen zu verschiedenen Gleichungstypen gehören. **Gib** den Gleichungstyp **an**.
- Gib** zu *mindestens drei* Gleichungen den Gleichungstyp **an**.
- Markiere** *eine* Gleichung, die außer $x = 7$ noch eine andere Lösung hat. **Gib** diese andere Lösung **an**.
- Markiere** *einen* Umformungsschritt, der keine Äquivalenzumformung darstellt.
- Markiere** *einen* Umformungsschritt, der eine Termumformung darstellt.
- Nenne** den Unterschied zwischen Termumformungen, Äquivalenzumformungen und Nicht-Äquivalenzumformungen.

Die Abbildung zeigt, wie man aus der Vorgabe $x = 7$ Gleichungen mit der Lösung 7 entwickeln kann. In der letzten Zeile steht jeweils die fertige Gleichung. Zwei dieser Gleichungen haben allerdings außer $x = 7$ noch eine weitere Lösung.

$$\begin{array}{l|l} x = 7 & \cdot 2 \\ \hline \Leftrightarrow 2x = 14 & + \frac{1}{2}x \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 2,5x = \frac{1}{2}x + 14$$

17,5 = 17,5 Probe

14 = 14 Zeile darüber



$$\begin{array}{l|l} x = 7 & -7 \\ \hline \Leftrightarrow x - 7 = 0 & \square^2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (x - 7)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0$$

Probe $49 - 98 + 49 = 0$

Zeile darüber $(7 - 7)^2 = 0$

ausmultiplizieren



$$\begin{array}{l|l} x = 7 & :12 \\ \hline \Leftrightarrow \frac{x}{12} = \frac{7}{12} & \cdot 3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{21}{12}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{21}{12} \quad \text{Probe}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{12} \quad \text{Zeile darüber}$$



$$\begin{array}{l|l} x = 7 & \square^{-1} \\ \hline \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{7} & + \frac{1}{14} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} \quad \text{Summe}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14} \quad \text{Probe}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} \quad \text{Zeile darüber}$$



$$\begin{array}{l|l} \Leftrightarrow (x - 7) = 0 & \cdot (x - 3) \\ \Rightarrow (x - 7) \cdot (x - 3) = 0 & \text{ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x - 3x - 7 \cdot (-3) = 0 & \text{zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 & \end{array}$$

$$49 - 70 + 21 = 0 \quad \text{Probe}$$

$$49 - 49 - 21 + 21 = 0 \quad \text{Zeile darüber}$$



$$\begin{array}{l|l} \Leftrightarrow x = 7 & -9 \\ \Rightarrow x - 9 = -2 & \square^2 \\ \Leftrightarrow (x - 9)^2 = 4 & \text{ausmultiplizieren} \\ \Rightarrow x^2 - 18x + 81 = 4 & \end{array}$$

$$\text{Probe } 49 - 126 + 81 = 4$$

$$\text{Zeile darüber } (7 - 9)^2 = 4$$



Wahlaufgaben: Bearbeite mindestens drei der Teilaufgaben a) bis h).

a) **Trage** mindestens drei Äquivalenzumformungsschritte in die Abbildung ein. s. o.

b) **Führe** bei mindestens einer Gleichung in der letzten Zeile die Probe **durch**:
Setze $x = 7$ **ein** und **gib** den Wert des linken sowie den Wert des rechten Terms **an**. siehe rot gedruckte Rechnungen

Vergleiche diese Werte mit den Werten in der vorletzten Zeile.

grün markierte Pfeile: übereinstimmende Werte in der vorletzten und in der letzten Zeile, da im letzten Schritt eine Termumformung wie Ausmultiplizieren, Zusammenfassen o. ä durchgeführt wurde.

pink markierte Pfeile: in der vorletzten Zeile links und rechts gleiche Werte; im letzten Schritt werden der linke und der rechte Term verändert, so dass sie untereinander gleiche, aber andere Werte als in der vorletzten Zeile besitzen.

Die Abbildung zeigt, wie man aus der Vorgabe $x = 7$ Gleichungen mit der Lösung 7 entwickeln kann. In der letzten Zeile steht jeweils die fertige Gleichung. Zwei dieser Gleichungen haben allerdings außer $x = 7$ noch eine weitere Lösung.

lineare Gleichung

$$\begin{aligned} x &= 7 & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 2x &= 14 & | + \frac{1}{2}x \\ \Leftrightarrow 2,5x &= \frac{1}{2}x + 14 \end{aligned}$$

quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} x &= 7 & | - 7 \\ \Leftrightarrow x - 7 &= 0 & | \square^2 \\ \Leftrightarrow (x - 7)^2 &= 0 & | \text{ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 &= 0 \end{aligned}$$

Verhältnisgleichung

$$\begin{aligned} x &= 7 & | : 12 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{12} &= \frac{7}{12} & | \cdot 3 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{4} &= \frac{21}{12} \end{aligned}$$

Bruchgleichung

$$\begin{aligned} x &= 7 & | \square^{-1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} &= \frac{1}{7} & | + \frac{1}{14} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{14} &= \frac{1}{7} + \frac{1}{14} & | \text{Summe} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{14} &= \frac{3}{14} \end{aligned}$$

quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x - 7) &= 0 & | \cdot (x - 3) \\ \Rightarrow (x - 7) \cdot (x - 3) &= 0 & | \text{ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x - 3x - 7 \cdot (-3) &= 0 & | \text{zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 &= 0 \end{aligned}$$

quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= 7 & | - 9 \\ \Leftrightarrow x - 9 &= -2 & | \square^2 \\ \Rightarrow (x - 9)^2 &= 4 & | \text{ausmultiplizieren} \\ \Rightarrow x^2 - 18x + 81 &= 4 \end{aligned}$$

c) Entwickle zwei verschiedene Gleichungen mit der Lösung 5. Diese Gleichungen sollen zu verschiedenen Gleichungstypen gehören. **Gib** den Gleichungstyp **an**. [individuelle Lösungen](#)

d) Gib zu *mindestens drei* Gleichungen den Gleichungstyp **an**. [siehe Abbildung](#)

e) Markiere eine Gleichung, die außer $x = 7$ noch eine andere Lösung hat.

Gib diese andere Lösung **an**. [unten links \$x = 7 \vee x = 3\$ rechts \$x = 7 \vee x = 11\$](#)

$$\begin{array}{l|l} x = 7 & \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 2x = 14 & + \frac{1}{2}x \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 2,5x = \frac{1}{2}x + 14$$

$$17,5 = 17,5 \text{ Probe}$$

$$14 = 14 \text{ Zeile darüber}$$



$$\begin{array}{l|l} x = 7 & -7 \\ \Leftrightarrow x - 7 = 0 & \square^2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (x - 7)^2 = 0$$

ausmultiplizieren

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0$$

$$\text{Probe } 49 - 98 + 49 = 0$$

$$\text{Zeile darüber } (7 - 7)^2 = 0$$



$$\begin{array}{l|l} x = 7 & :12 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{12} = \frac{7}{12} & \cdot 3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{21}{12}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{21}{12} \text{ Probe}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{12} \text{ Zeile darüber}$$



$$\begin{array}{l|l} x = 7 & \square^{-1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{7} & + \frac{1}{14} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$$

Summe

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$$

Probe

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} \text{ Zeile darüber}$$



$$\Leftrightarrow (x - 7) = 0 \quad \cdot (x - 3)$$

$$\Rightarrow (x - 7) \cdot (x - 3) = 0 \quad \text{ausmultiplizieren}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 3x - 7 \cdot (-3) = 0 \quad \text{zusammenfassen}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$49 - 70 + 21 = 0 \text{ Probe}$$

$$49 - 49 - 21 + 21 = 0 \text{ Zeile darüber}$$



$$\Leftrightarrow x = 7 \quad -9$$

$$\Leftrightarrow x - 9 = -2 \quad \square^2$$

$$\Rightarrow (x - 9)^2 = 4 \quad \text{ausmultiplizieren}$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 81 = 4$$

$$\text{Probe } 49 - 126 + 81 = 4$$

$$\text{Zeile darüber } (7 - 9)^2 = 4$$



f) **Markiere** einen Umformungsschritt, der keine Äquivalenzumformung darstellt. unten links das Multiplizieren mit $(x - 3)$, unten rechts das Quadrieren, siehe \Rightarrow

g) **Markiere** einen Umformungsschritt, der eine Termumformung darstellt. oben rechts und unten rechts Ausmultiplizieren, Mitte rechts Brüche addieren, unten links zusammenfassen, siehe auch grüne Pfeile

h) **Nenne** den Unterschied zwischen Termumformungen, Äquivalenzumformungen und Nicht-Äquivalenzumformungen. Eine Termumformung ändert Terme in gleichwertige Terme, so dass eine Zeile tiefer beim Einsetzen für x die Terme die gleichen Werte haben wie eine Zeile höher.

Eine Äquivalenzumformung verändert die Terme, lässt aber die Lösungsmenge der Gleichung unverändert. Die veränderten Terme eine Zeile tiefer können beim Einsetzen für x die Terme andere Werte haben als in der Zeile darüber.

Eine Nicht-Äquivalenzumformung vergrößert oder verkleinert die Lösungsmenge. Bei den Gleichungen unten links und rechts kommt eine Lösung hinzu.