MATHE 364

30.06. Fit für Berufsschule oder Oberstufe: Körper

Alle Körper in diesem Aufgabenblatt "*haben so viele Kubikzentimeter Volumen wie ihre Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*". *Die Aussage V = O wäre kürzer, aber falsch, denn Volumen und Flächeninhalt haben verschiedene Einheiten und können niemals gleich sein*. *Aber gleiche Maßzahlen sind bei speziellen Abmessungen möglich.*

Wahlaufgaben: **Bearbeite** Teilaufgaben zu *mindestens drei* verschiedenen Körpern.

a) Ein Quader hat die Kantenlängen $a = 15$ cm, $b = 10$ cm, $c = 3$ cm.

Bestimme Oberfläche und Volumen und **weise** damit **nach**, dass der Quader die besondere Eigenschaft (siehe oben) besitzt.

b) Ein Quader hat das Volumen 400 cm^3 und eine 400 cm^2 große Oberfläche. **Bestimme** die Kantenlängen dieses Quaders.

c) Ein Würfel „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*". **Bestimme** die Kantenlängen dieses Würfels.

d) Ein gerades dreieckiges Prisma mit den Grundkantenlängen $a = 9$ cm, $b = 12$ cm und $c = 15$ cm sowie der Körperhöhe $k = 6$ cm „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*".

Weise nach, dass die Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist. **Bestimme** Oberfläche und Volumen und **weise** damit **nach**, dass das Prisma die besondere Eigenschaft (siehe oben) besitzt.

e) Eine quadratische Pyramide mit der Grundkantenlänge $a = 12$ cm und der Körperhöhe $k = 8$ cm „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie ihre Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*".

Bestimme Oberfläche und Volumen und **weise** damit **nach**, dass die Pyramide die besondere Eigenschaft (siehe oben) besitzt.

f) Ein Zylinder mit dem Radius 3 cm und der Höhe 6 cm „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*".

Bestimme Oberfläche und Volumen und **weise** damit **nach**, dass der Zylinder die besondere Eigenschaft (siehe oben) besitzt.

g) Ein Zylinder, bei dem Radius und Höhe gleich groß sind, „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*". **Bestimme** Radius, Höhe, Volumen und Oberfläche.

h) **Weise nach**, dass die beiden Gleichungen $\pi \cdot r^2 \cdot k = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k + 2 \cdot \pi \cdot r^2$ und $r \cdot k = 2 \cdot (r + k)$ gleichwertig sind. **Setze** die Maße aus **d)** oder **e) ein**.

j) Ein Kegel mit dem Radius 8 cm und der Höhe 6 cm „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*". **Bestimme** Oberfläche und Volumen.

k) Bestimme den Radius einer Kugel, bei der $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot k = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ ist.

Gib Oberfläche und Volumen dieser Kugel **an**.

Lösungen 30.06. Fit für Berufsschule oder Oberstufe: Körper

Alle Körper in diesem Aufgabenblatt "*haben so viele Kubikzentimeter Volumen wie ihre Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*". *Die Aussage $V = O$ wäre kürzer, aber falsch, denn Volumen und Flächeninhalt haben verschiedene Einheiten und können niemals gleich sein*. *Aber gleiche Maßzahlen sind bei speziellen Abmessungen möglich.*

Wahlaufgaben: **Bearbeite** Teilaufgaben zu *mindestens drei* verschiedenen Körpern.

a) Ein Quader hat die Kantenlängen $a = 15$ cm, $b = 10$ cm, $c = 3$ cm.

Bestimme Oberfläche und Volumen und **weise** damit **nach**, dass der Quader die besondere Eigenschaft (siehe oben) besitzt.

$$V = a \cdot b \cdot c = 15\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 450\text{ cm}^3$$

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (15\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} + 15\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} + 10\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}) = 450\text{ cm}^2$$

b) Ein Quader hat das Volumen 400 cm^3 und eine 400 cm^2 große Oberfläche. **Bestimme** die Kantenlängen dieses Quaders.

Die Kantenlängen *a*, *b* und *c* müssen das Produkt $a \cdot b \cdot c = 400$ ergeben. Zum Beispiel durch Probieren mit den Teilern 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400 erhält man $a = 20$ cm, $b = 5$ cm, $c = 5$ cm.

$$V = a \cdot b \cdot c = 20\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 400\text{ cm}^3$$

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (20\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} + 20\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} + 5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}) = 400\text{ cm}^2$$

c) Ein Würfel „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*". **Bestimme** die Kantenlängen dieses Würfels.

Durch Probieren oder Lösen der Gleichung $a^3 = 6 \cdot a^2$ erhält man $a = 6$ cm.

$$V = a^3 = (6\text{ cm})^3 = 216\text{ cm}^3 \qquad O = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot (6\text{ cm})^2 = 216\text{ cm}^2$$

d) Ein gerades dreieckiges Prisma mit den Grundkantenlängen $a = 9$ cm, $b = 12$ cm und $c = 15$ cm sowie der Körperhöhe $k = 6$ cm „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*".

Weise nach, dass die Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist.

$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$$

Bestimme Oberfläche und Volumen und **weise** damit **nach**, dass das Prisma die besondere Eigenschaft (siehe oben) besitzt.

$$G = \tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$$

$$M = a \cdot k + b \cdot k + c \cdot k = k \cdot (a + b + c) = 6 \cdot (9 + 12 + 15) = 6 \cdot 36 = 216$$

$$O = 2 \cdot G + M = 108 + 216 = 324$$

$$V = G \cdot k = 54 \cdot 6 = 324$$

... weiter auf der nächsten Seite

Alle Körper in diesem Aufgabenblatt "*haben so viele Kubikzentimeter Volumen wie ihre Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*". *Die Aussage* $V = O$ *wäre kürzer, aber falsch, denn Volumen und Flächeninhalt haben verschiedene Einheiten und können niemals gleich sein*. *Aber gleiche Maßzahlen sind bei speziellen Abmessungen möglich.*

Wahlaufgaben: **Bearbeite** Teilaufgaben zu *mindestens drei* verschiedenen Körpern.

e) Eine quadratische Pyramide mit der Grundkantenlänge $a = 12$ cm und der Körperhöhe $k = 8$ cm *„hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie ihre Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*".

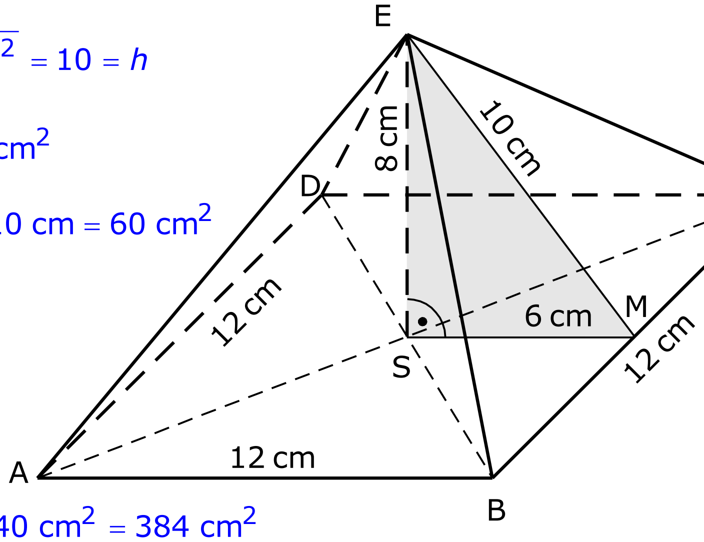
Bestimme Oberfläche und Volumen und **weise** damit **nach**, dass die Pyramide die besondere Eigenschaft (siehe oben) besitzt.

Δ SME: $\quad |\text{EM}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 = h$

$G = a^2 = (12\text{ cm})^2 = 144\text{ cm}^2$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 60\text{ cm}^2$

$M = 4 \cdot A_\Delta = 240\text{ cm}^2$



$O = G + M = 144\text{ cm}^2 + 240\text{ cm}^2 = 384\text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot k = \frac{1}{3} \cdot 144\text{ cm}^2 \cdot 8\text{ cm} = 384\text{ cm}^3$

f) Ein Zylinder mit dem Radius 3 cm und der Höhe 6 cm *„hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*".

Bestimme Oberfläche und Volumen und **weise** damit **nach**, dass der Zylinder die besondere Eigenschaft (siehe oben) besitzt.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot k = \pi \cdot (3\text{ cm})^2 \cdot 6\text{ cm} = \pi \cdot 54\text{ cm}^3 \approx 169{,}646\text{ cm}^3$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k = 2 \cdot \pi \cdot ((3\text{cm})^2 + 3\text{cm} \cdot 6\text{ cm}) = 2 \cdot \pi \cdot 27\text{cm}^2 \approx 169{,}646\text{ cm}^2$

g) Ein Zylinder, bei dem Radius und Höhe gleich groß sind, *„hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*".
Bestimme Radius, Höhe, Volumen und Oberfläche.

Wegen $r = k$ vereinfacht sich die Gleichung $\pi \cdot r^2 \cdot k = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k$ zu

$\pi \cdot x^2 \cdot x = 2 \cdot \pi \cdot x^2 + 2 \cdot \pi \cdot x \cdot x$ bzw. $x^3 = x^2 + x^2$.

Durch Probieren erhält man $r = 4$ cm und $k = 4$ cm.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot k = \pi \cdot (4\text{ cm})^2 \cdot 4\text{ cm} = \pi \cdot 64\text{ cm}^3 \approx 201{,}062\text{ cm}^3$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k = 2 \cdot \pi \cdot ((4\text{cm})^2 + 4\text{cm} \cdot 4\text{cm}) = 2 \cdot \pi \cdot 32\text{cm}^2 \approx 201{,}062\text{cm}^2$

... weiter auf der nächsten Seite

Lösungen 30.06. **Fit für Berufsschule oder Oberstufe: Körper**

Alle Körper in diesem Aufgabenblatt "*haben so viele Kubikzentimeter Volumen wie ihre Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*". *Die Aussage* $V = O$ *wäre kürzer, aber falsch, denn Volumen und Flächeninhalt haben verschiedene Einheiten und können niemals gleich sein. Nur die Maßzahlen sind bei diesen speziellen Abmessungen gleich.*

Wahlaufgaben: **Bearbeite** Teilaufgaben zu *mindestens drei* verschiedenen Körpern.

h) **Weise nach**, dass die beiden Gleichungen $\pi \cdot r^2 \cdot k = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k + 2 \cdot \pi \cdot r^2$ und $r \cdot k = 2 \cdot (r + k)$ gleichwertig sind.

$$\begin{aligned} & \pi \cdot r^2 \cdot k = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k + 2 \cdot \pi \cdot r^2 && |:\pi \\ \Leftrightarrow\quad & r^2 \cdot k = 2 \cdot r \cdot k + 2 \cdot r^2 && |:r \\ \Leftrightarrow\quad & r \cdot k = 2 \cdot k + 2 \cdot r \\ \Leftrightarrow\quad & r \cdot k = 2 \cdot (r + k) \end{aligned}$$

Setze die Maße aus **d)** oder **e) ein**.

$$\begin{aligned} \pi \cdot r^2 \cdot k &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \\ \pi \cdot 3^2 \cdot 6 &= 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 \\ \pi \cdot 54 &= 2 \cdot \pi \cdot 28 + 2 \cdot \pi \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot r^2 \cdot k &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \\ \pi \cdot 4^2 \cdot 4 &= 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 \\ \pi \cdot 64 &= 2 \cdot \pi \cdot 16 + 2 \cdot \pi \cdot 16 \end{aligned}$$

j) Ein Kegel mit dem Radius 8 cm und der Höhe 6 cm „*hat so viele Kubikzentimeter Volumen wie seine Oberfläche Quadratzentimeter besitzt*".
Bestimme Oberfläche und Volumen.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot k = \tfrac{1}{3}\pi \cdot (8\text{ cm})^2 \cdot 6\text{ cm} = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 384\text{ cm}^3 = \pi \cdot 144\text{ cm}^3 \approx 402{,}124\text{ cm}^3$$

$$s = \sqrt{r^2 + k^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (8\text{ cm})^2 = \pi \cdot 64\text{ cm}^2$$

$$M = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 8\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = \pi \cdot 80\text{ cm}^2$$

$$O = G + M = \pi \cdot 64\text{ cm}^2 + \pi \cdot 80\text{ cm}^2 = \pi \cdot 144\text{ cm}^2 \approx 402{,}124\text{ cm}^3$$

k) Bestimme den Radius einer Kugel, bei der $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ ist.
Gib Oberfläche und Volumen dieser Kugel **an**.

$$\begin{aligned} & \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 && |:\pi \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{4}{3} \cdot r^3 = 4 \cdot r^2 && |:4 \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{3} \cdot r^3 = r^2 && |\cdot 3 \\ \Leftrightarrow\quad & r^3 = 3r^2 \\ \Leftrightarrow\quad & r \cdot r^2 = 3r^2 \end{aligned}$$

Man sieht, dass $r = 3$ sein muss.

$$V = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot (3\text{ cm})^3 = \pi \cdot 36\text{ cm}^3 \approx 113{,}097\text{ cm}^3$$

$$O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (3\text{ cm})^2 = \pi \cdot 36\text{ cm}^2 \approx 113{,}097\text{ cm}^2$$