

# MATHE 364

## 11.11. Apfelringe

*Auf den folgenden Seiten findest du drei Versionen der selben Aufgabe.  
Du brauchst nur eine Version zu bearbeiten.*



Die Bilder zeigen die Apfelscheiben frisch geschnitten sowie 24 Stunden später.

**Schätze** das Gewicht vor und nach dem Trocknen.

**Tipp** für alle drei Versionen der Aufgabe: Der QR-Code verrät das Gewicht des Gitters, auf dem die Apfelscheiben zum Trocknen liegen.

**Tipp** für Version 1 und 2: Schaue bei Problemen einmal in die Aufgabenstellung von Version 3.



# MATHE 364

## 11.11. Apfelringe Version 1

Hier und auf den folgenden Seiten findest du drei Versionen der selben Aufgabe. Du brauchst nur eine Version zu bearbeiten. **Tipp:** Schau bei Problemen einmal in die Aufgabenstellung von Version 2 und 3.

**Version 1** Ingrid hat sehr dünne Apfelscheiben geschnitten, nebeneinander auf ein Gitter gelegt und zum Trocknen auf den Kachelofen gestellt. Da die Familie staunt, wie schnell die Apfelscheiben an Gewicht verlieren, wurde gestern und heute einmal der Trocknungsvorgang aus echtem Interesse protokolliert.

a) **Stelle** die Daten **dar** und **werte** sie **aus**.

Zeit	Bruttogewicht in g Äpfel mit Gitter
17:50	660
18:05	654
18:20	649
18:35	640
18:50	632
19:05	623
19:20	614
19:35	606
19:50	598
20:05	586
20:20	575
20:35	566
20:50	553
21:05	543
21:20	533
21:35	522
21:50	513
22:05	504
22:20	495
22:35	483
22:50	473
23:05	464
23:20	453
23:35	446

Zeit	Bruttogewicht in g Äpfel mit Gitter
23:50	437
00:05	425
00:20	422
00:35	413
01:50	381
06:20	326
06:50	322
07:50	315
09:50	302
11:50	294
14:50	286
17:50	281

b) **Diskutiere**, welche mathematischen Modelle sich für die Beschreibung des Trocknungsvorgangs eignen.

# MATHE 364

## 11.11. Apfelringe Version 2

Von dieser Aufgabe gibt es drei Versionen. Du brauchst nur eine zu bearbeiten.

Ingrid stellt Trockenobst her. Sie hat Äpfel in sehr dünne Scheiben geschnitten, zum Trocknen nebeneinander auf ein Gitter gelegt und auf den Kachelofen gestellt. Die Tabelle gibt an, wie das Bruttogewicht (die Äpfel werden zusammen mit dem Gitter gewogen) mit der Zeit abnimmt.

a) **Zeichne** ein Diagramm.

Zeit in h	Bruttogewicht in g
0	660
0,5	649
1	632
1,5	614
2	598
2,5	575
3	553
3,5	533
4	513
4,5	495
5	473
5,5	453
6	437

Zeit in h	Bruttogewicht in g
8	389
10	360
12	338
14	323
16	311
18	303
20	297
22	292
24	289
26	287
28	285
30	284
32	283

b) **Wahlaufgaben:** Bearbeite *mindestens zwei* der folgenden Aufgabenstellungen.

- Der Graph verläuft anfangs fast geradlinig.  
**Erkläre**, warum der Graph nicht beliebig lange geradlinig weiterlaufen kann.
- Über einen längeren Zeitraum ergeben die Messwerte einen gekrümmten Graphen ähnlich wie bei einer Exponentialfunktion.  
**Erkläre**, warum die Messwerte nicht exponentiell abnehmen.
- **Schätze** oder **bestimme**  
das Gewicht der frischen Apfelscheiben,  
das Gewicht des beim Trocknen entzogenen Wassers,  
das Gewicht der getrockneten Apfelscheiben und  
das Gewicht des Gitters.
- Entscheide, welche der folgenden Größen (in etwa) exponentiell abnimmt:  
das Gesamtgewicht, das Gewicht der Apfelscheiben, das Gewicht des Wassers
- **Gib** eine Exponentialfunktion für diejenige Größe (siehe oben) an, die in etwa exponentiell abnimmt.

# MATHE 364

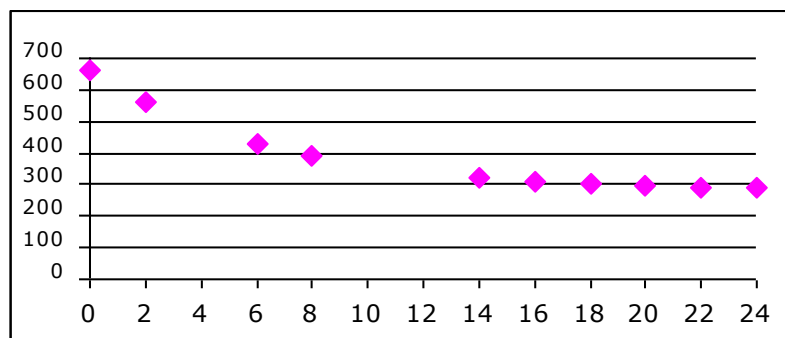
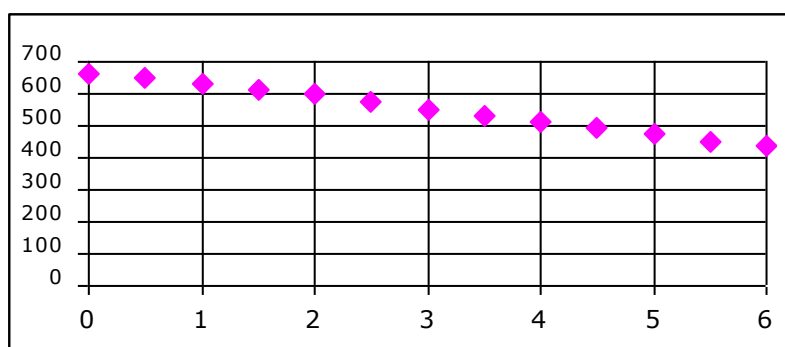
## 11.11. Apfelringe Version 3

Von dieser Aufgabe gibt es drei Versionen. Du brauchst nur eine zu bearbeiten.

Ingrid trocknet Obst. Sie hat Äpfel in sehr dünne Scheiben geschnitten und auf ein Gitter gelegt. Die Tabelle und die Diagramme stellen dar, wie beim Trocknen das Gewicht mit der Zeit abnimmt. Die Äpfel werden zusammen mit dem Gitter gewogen (Bruttogewicht).

a) **Ergänze** in der Tabelle *mindestens drei* fehlende Werte

Zeit in h	Bruttogewicht in g
0	660
0,5	649
1	632
	614
2	598
2,5	575
	553
3,5	533
4	
4,5	495
5	473
5,5	453
6	437
7	



b) **Wahlaufgaben:** Bearbeite *mindestens zwei* der folgenden Aufgabenstellungen.

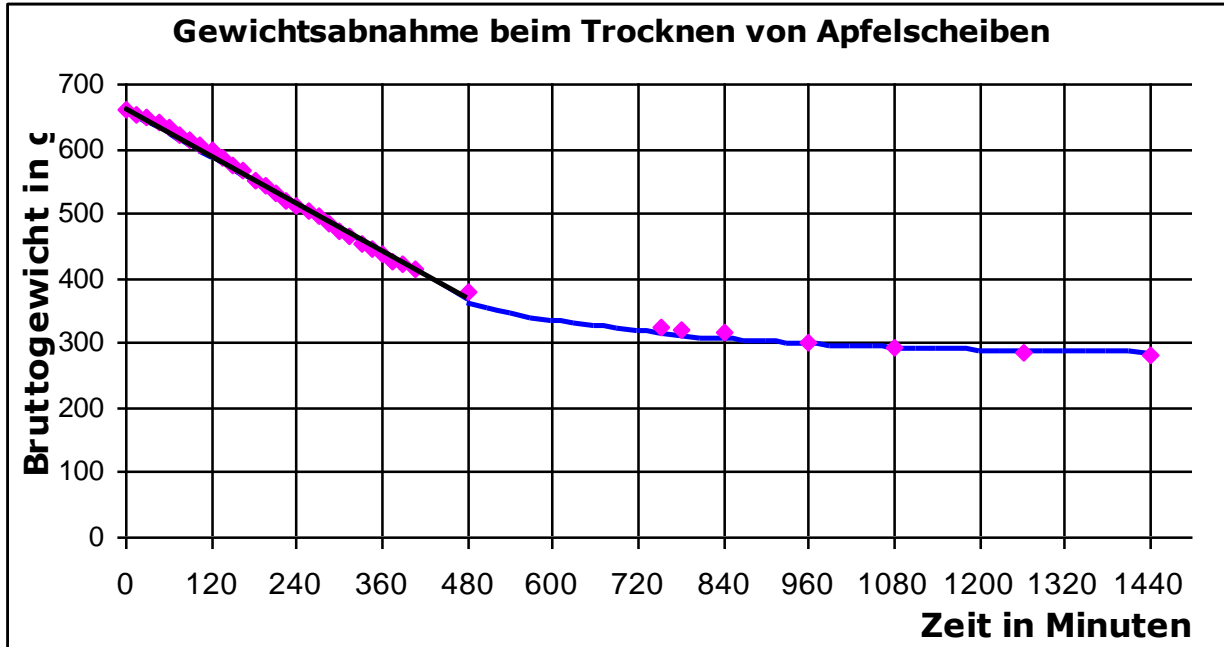
- Der Graph verläuft anfangs fast geradlinig. **Zeichne** diese Gerade in das obere Diagramm **ein** und **bestimme** ihre Steigung in Gramm pro Stunde.
- Unteres Diagramm: Über einen längeren Zeitraum ergeben die Messwerte einen gekrümmten Graphen ähnlich wie bei einer Exponentialfunktion. **Ergänze** diesen Graphen.
- **Schätze** oder **bestimme** aus dem unteren Diagramm das Gewicht des Gitters mit den vollständig getrockneten Apfelscheiben.
- Die Tabelle gibt an, wie die Wassermenge in den Apfelscheiben exponentiell abnimmt. **Bestimme** den Wachstumsfaktor.

Zeit in Stunden	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Wassermenge in g	380	282	209	154	114	85	63	47	34	26	19	14	10

**Schätze** das Gewicht vor und nach dem Trocknen. **Messwerte:** 474 g und 95 g

- a) Stelle** die Daten **dar** und **werte** sie **aus**. **b) Diskutiere**, welche mathematischen Modelle sich für die Beschreibung des Trocknungsvorgangs eignen.

Am einfachsten ist das Zeichnen und Auswerten mit der Tabellenkalkulation:



Der Graph verläuft vom Beginn bis zum Zeitpunkt 480 Minuten etwa linear. Mit der Tabellenkalkulation wurde deshalb eine Ausgleichsgerade („Trendlinie“) gezeichnet. Das Programm kann auch eine Funktionsgleichung angeben:

$y = -0,6108 x + 660$  an. Die Steigung bedeutet, dass die Apfelscheiben 0,6 g pro Minute oder ca. 37 Gramm pro Stunde an Gewicht verlieren.

Dieser lineare Verlauf ist nachvollziehbar: Am Anfang verdunstet viel Wasser nahe an der Oberfläche, fast wie bei einem offenen flachen Gefäß, aus dem Wasser gleichmäßig mit der Zeit verdunstet (konstante Verdunstungsrate).

Nach 6 Stunden bis zum Ende der Messung ähnelt der Verlauf eher dem einer Exponentialfunktion, deren Graph vertikal nach oben verschoben wurde. Das Gewicht nähert sich am Ende asymptotisch an 280 g an. Davon entfallen 186 g auf das Gewicht des Gitters (Wert aus dem QR-Code oder Schätzung) und 95 g auf die Trockenmasse der Äpfel.

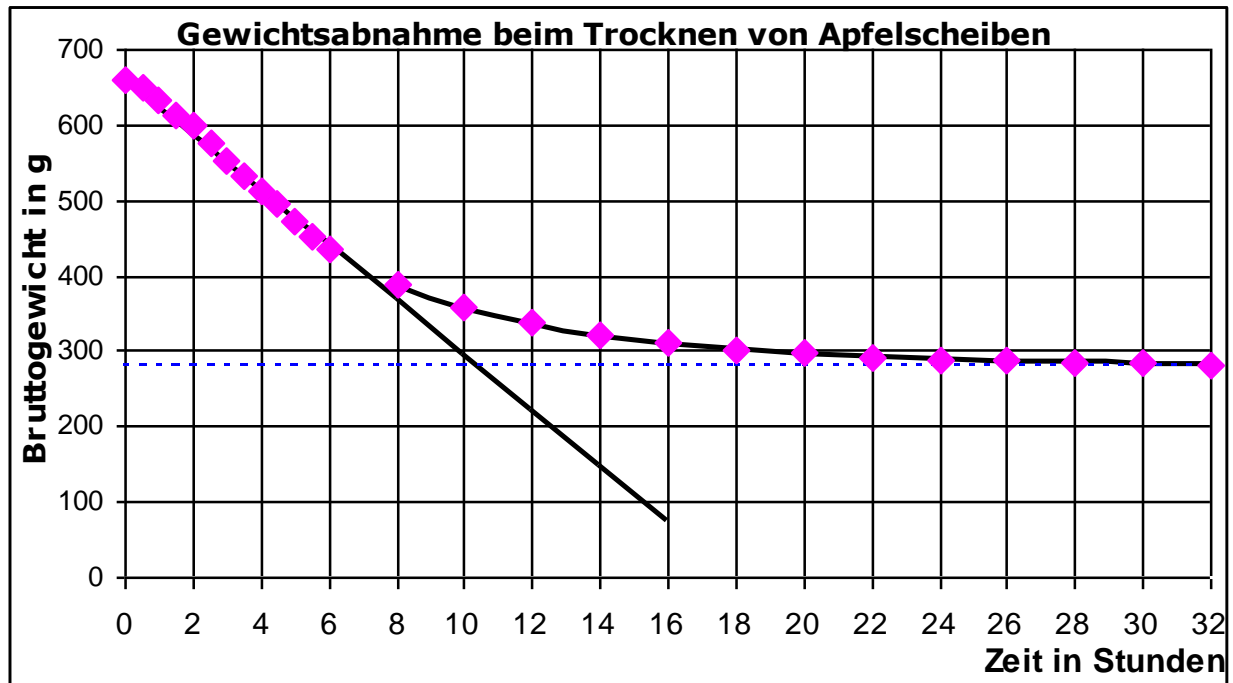
Für die Schätzung hatte Ingrid, die die Apfelscheiben herstellt, vorab den Erfahrungswert „von 400 g bleiben nur 80 g Trockenmasse“ mitgeteilt. Mit dem Dreisatz hochgerechnet auf 474 g ergeben sich 95 g, was praktisch auf das Gramm genau stimmt.

Die exponentielle Abnahme des Wasseranteils ist nachvollziehbar. Je trockener die Apfelscheiben werden, umso mehr muss Wasser aus dem Innern durch Diffusion in den Bereich nahe der Oberfläche wandern. Der Antrieb durch den Unterschied zwischen der Feuchtigkeit im Gewebe und der Luftfeuchtigkeit nimmt immer weiter ab.



a) **Zeichne** ein Diagramm. Am einfachsten ist das Zeichnen und Auswerten mit der Tabellenkalkulation, siehe Abbildung.

**Hinweis:** Die Tabelle zu Version 1 gibt die echten Messwerte an. Für Version 2 wurden diese Daten geringfügig verändert, damit die Funktionstypen für das mathematische Modell deutlicher erkennbar werden.

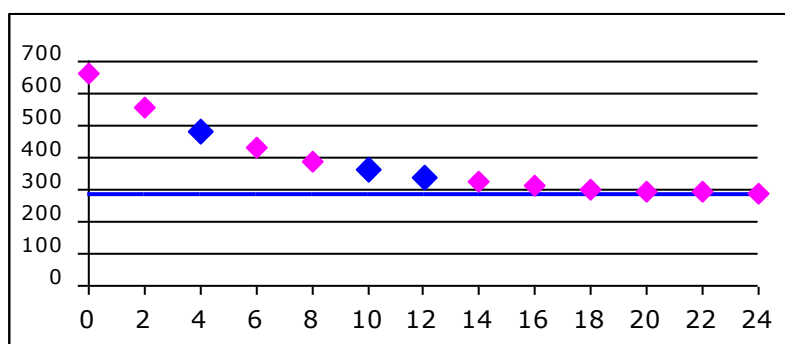
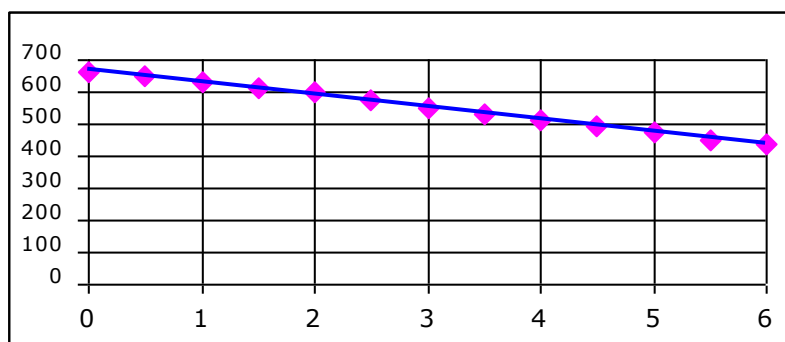


b) Der Graph verläuft anfangs fast geradlinig.

- **Erkläre**, warum der Graph nicht beliebig lange geradlinig weiterlaufen kann. Die Funktionswerte der Geraden werden ab ca. 18 Stunden negativ. In der Realität kann das Bruttogewicht niemals kleiner werden als das Gewicht des Gitters plus die Trockenmasse der Apfelscheiben.
- Über einen längeren Zeitraum ergeben die Messwerte einen gekrümmten Graphen ähnlich wie bei einer Exponentialfunktion.  
**Erkläre**, warum die Messwerte nicht exponentiell abnehmen. Die Werte einer fallenden Exponentialfunktion nähern sich dem Wert 0 an. Beim Trocknungsvorgang nähert sich das Gewicht dem Wert 281 an (Gewicht des Gitters plus die Trockenmasse der Apfelscheiben.)
- **Schätze** oder **bestimme** ... das Gewicht der frischen Apfelscheiben 474 g, das Gewicht des beim Trocknen entzogenen Wassers 397 g, das Gewicht der getrockneten Apfelscheiben 95 g und das Gewicht des Gitters 186 g (aus dem Diagramm ist nur die Summe  $95 + 186$  ablesbar, siehe gestrichelte waagerechte Linie).
- Entscheide, welche der folgenden Größen (in etwa) exponentiell abnimmt: das Gesamtgewicht, das Gewicht der Apfelscheiben, **das Gewicht des Wassers**
- **Gib** eine Exponentialfunktion für diejenige Größe (siehe oben) an, die in etwa exponentiell abnimmt  $397 \cdot 0,85^x + 281$ . Dabei ist 397 die Anfangsmasse des Wassers, 0,85 der "Wachstums"faktor in einer halben Stunde, x die Anzahl der halben Stunden und  $281 = 95 + 186$  das Gewicht von Gitter und Trockenmasse

a) **Ergänze** in der Tabelle *mindestens drei* fehlende Werte [siehe Tabelle](#)

Zeit in h	Bruttogewicht in g
0	660
0,5	649
1	632
1,5	614
2	598
2,5	575
3	553
3,5	533
4	513
4,5	495
5	473
5,5	453
6	437
7	363



b) **Wahlaufgaben:** Bearbeite *mindestens zwei* der folgenden Aufgabenstellungen.

- Der Graph verläuft anfangs fast geradlinig. **Zeichne** diese Gerade in das obere Diagramm **ein** und **bestimme** ihre Steigung in Gramm pro Stunde. [zum Beispiel](#)

$$m = \frac{660 - 437}{0 - 6} = \frac{223}{-6} = -74, \bar{3} \text{ d. h. das Gewicht nimmt zu Beginn um ca. } 74 \text{ g}$$

pro Stunde ab. Damit kannst du den letzten Wert berechnen:  $437 - 74 = 363$ .

- Unteres Diagramm: Über einen längeren Zeitraum ergeben die Messwerte einen gekrümmten Graphen ähnlich wie bei einer Exponentialfunktion.

**Ergänze** diesen Graphen. [siehe Abb.](#); auch eine durchgehende Linie möglich

- Schätze** oder **bestimme** aus dem unteren Diagramm das Gewicht des Gitters mit den vollständig getrockneten Apfelscheiben. **281 g**  
Das Bruttogewicht näherts sich dem Wert 281 an, siehe waagerechte blaue Linie im unteren Diagramm.
- Die Tabelle gibt an, wie die Wassermenge in den Apfelscheiben exponentiell abnimmt. **Bestimme** den Wachstumsfaktor. **Jedes Gewicht ist ca. das 0,74-fache des Gewichts bei der vorherigen Messung, z. B.  $380 \cdot 0,74 \approx 282$**

Zeit in Stunden	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Wassermenge in g	380	282	209	154	114	85	63	47	34	26	19	14	10
Faktor		0,74	0,74	0,74	0,74	0,75	0,74	0,75	0,72	0,76	0,73	0,74	0,71