MATHE 364

23.10. exponentielles Wachstum beim Papierfalten

Wenn man ein Blatt Papier mehrfach „auf die Hälfte faltet“, dann wächst die Anzahl der Papierschichten *exponentiell*: sie verdoppelt, vervierfacht, verachtfacht sich usw. Alle Aufgaben dieses Kalenderblatts behandeln diesen Sachverhalt. **Wahlaufgabe**:

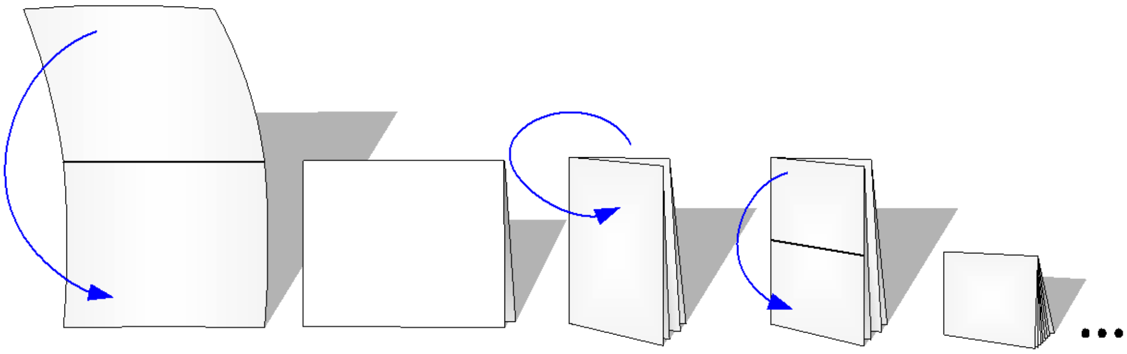
Bewerte die Aufgaben **a)** bis **d)** und **gib an**, welche dir am besten und welche dir am wenigsten gefällt. **Nenne** dabei deine Kriterien **Bearbeite** *eine* der Aufgaben.

a) Ein Blatt Papier ist 0,1 mm dick. Beim Falten liegen 2, 4, 8, 16 Schichten usw. übereinander. Wie oft muss man es falten, um die Höhe des höchsten Berges der Erde (8848 m) zu erreichen?

b) Ein Blatt Papier ist 0,1 mm dick. Beim Falten wächst die Anzahl der übereinanderliegenden Papierschichten exponentiell mit $d(x) = p \cdot 2^x$. Gib an, wofür die Variablen p, d und x stehen. Berechne, wie oft man das Papier falten müsste, damit es so dick ist wie die Entferung Erde – Mond (380 000 km).

c) Ein Blatt DIN A 0 hat einen Flächeninhalt von 1 m^2. Ein Blatt DIN A 1 hat einen Flächeninhalt von 0,5 m^2. Länge und Breite sind beim DIN-Format so festgelegt, dass man mit zwei Blättern DIN A 4 exakt ein Blatt DIN A 3 auslegen kann.

- Nimm mehrere Blätter DIN A 4 und lege auf dem Fußboden Rechtecke im Format DIN A 3, DIN A 2 bis DIN A 0. Gib an, wie viele Blätter du benötigst.
- Ein Blatt DIN A 3-Papier ist 0,1 mm dick. Es wird so wie im Bild gefaltet. Gib jeweils das DIN-Format, den Flächeninhalt dieses DIN-Formats sowie die Dicke aller Papierschichten an. Kann man es öfter falten als ein Blatt DIN A 4?



- Begründe: Das Produkt aus Flächeninhalt und Dicke bleibt immer gleich.

d) Im Jahre 2011 hat eine amerikanische Schülergruppe einen Weltrekord aufgestellt: Sie falteten Papier 13 mal auf die Hälfte. Aus einem ursprünglich 16 km langen Streifen aus Toilettenpapier wurde ein ca. 1,5 m langer und 80 cm hoher Stapel, der stabil liegen blieb und sich nicht auseinanderfaltete.

Diskutiere, ob dieser Rekord jemals gebrochen werden könnte.

MATHE 364

Lösungen 23.10. exponentielles Wachstum beim Papierfalten

Wenn man ein Blatt Papier mehrfach „auf die Hälfte faltet", dann wächst die Anzahl der Papierschichten *exponentiell*: sie verdoppelt, vervierfacht, verachtfacht sich usw. Alle Aufgaben dieses Kalenderblatts behandeln diesen Sachverhalt. **Wahlaufgabe**:

Bewerte die Aufgaben **a)** bis **d)** und **gib an**, welche dir am besten und welche dir am wenigsten gefällt. **Nenne** dabei deine Kriterien **Bearbeite** *eine* der Aufgaben.

Individuelle Entscheidungen. In der Musterlösungen werden mögliche Vor- und Nachteile der Aufgabe genannt, aber andere Kriterien sind durchaus vorstellbar.

a) Ein Blatt Papier ist 0,1 mm dick. Beim Falten liegen 2, 4, 8, 16 Schichten usw. übereinander. Wie oft muss man es falten, um die Höhe des höchsten Berges der Erde (8848 m) zu erreichen?

mögliche Vorteile

- kurze Aufgabe
- kurzer Aufgabentext
- eindeutige Aufgabenstellung

mögliche Nachteile

- vollkommen abstrakt
- völlig unrealistisch

0,1 mm = $1 \cdot 10^{-4}$ m.

$1 \cdot 10^{-4}\,\text{m} \cdot 2^{26} \approx 6711\,\text{m}$; $1 \cdot 10^{-4}\,\text{m} \cdot 2^{27} \approx 13422\,\text{m}$

Theoretisch müsste man das Papier 27 mal auf die Hälfte falten.

b) Ein Blatt Papier ist 0,1 mm dick. Beim Falten wächst die Anzahl der übereinanderliegenden Papierschichten exponentiell mit $d(x) = p \cdot 2^x$. Gib an, wofür die Variablen p, d und x stehen. Berechne, wie oft man das Papier falten müsste, damit es so dick ist wie die Entferung Erde – Mond (380 000 km).

mögliche Vorteile

- relativ kurzer Aufgabentext
- eindeutige Aufgabenstellung
- Es wird zunächst nach der Bedeutung der Variablen gefragt.

mögliche Nachteile

- vollkommen abstrakt
- völlig unrealistisch
- Der Funktionsterm und die Variablen sind zur Beantwortung der Frage nicht unbedingt erforderlich.

$p = 0{,}1$ mm steht für die Dicke des Papiers.

x steht für die Anzahl der Faltungen.

d ist abhängig von x (*d ist eine Funktion von x*) und steht für die Dicke aller Papierschichten.

2^x gibt die Anzahl der Papierschichten an.

0,1 mm = $1 \cdot 10^{-7}$ km; 380 000 km = $3{,}8 \cdot 10^5$ km

$1 \cdot 10^{-7}\,\text{km} \cdot 2^{41} \approx 2{,}2 \cdot 10^5\,\text{km}$; $1 \cdot 10^{-7}\,\text{km} \cdot 2^{42} \approx 4{,}4 \cdot 10^5\,\text{km}$

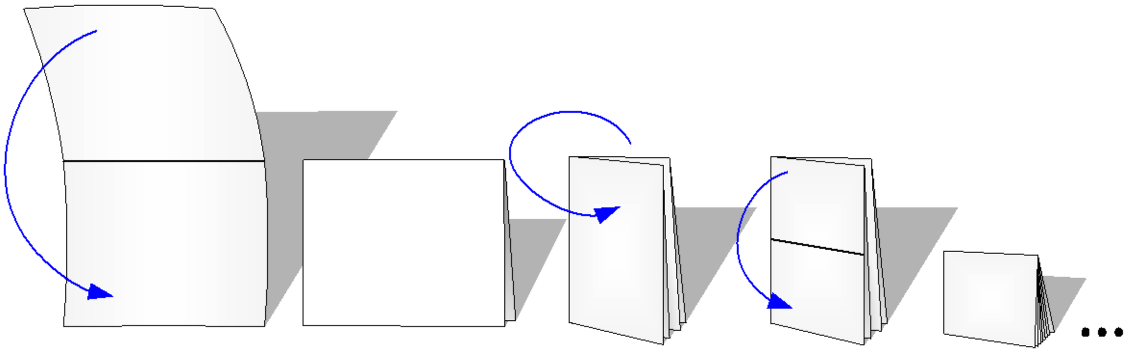
Theoretisch müsste man das Papier 42 mal auf die Hälfte falten.

c) und **d)** *siehe nächste Seiten*

Lösungen 23.10. exponentielles Wachstum beim Papierfalten

c) Ein Blatt DIN A 0 hat einen Flächeninhalt von 1 m^2. Ein Blatt DIN A 0 hat einen Flächeninhalt von 0,5 m^2. Länge und Breite sind beim DIN-Format so festgelegt, dass man mit zwei Blättern DIN A 4 exakt ein Blatt DIN A 3 auslegen kann.

- Nimm mehrere Blätter DIN A 4 und lege auf dem Fußboden Rechtecke im Format DIN A 3, DIN A 2 bis DIN A 0. Gib an, wie viele Blätter du benötigst.
- Ein Blatt DIN A 3-Papier ist 0,1 mm dick. Es wird so wie im Bild gefaltet. Gib jeweils das DIN-Format, den Flächeninhalt dieses DIN-Formats sowie die Dicke aller Papierschichten an. Kann man es öfter falten als ein Blatt DIN A 4?



- Begründe: Das Produkt aus Flächeninhalt und Dicke bleibt immer gleich.

mögliche Vorteile

- experimentell
- Anleitung mit Abbildung
- mehrere Teilschritte / Teilaufgaben
- Die Aufgabe kann mit verschiedenen Vorgehensweisen gelöst werden.
- Man muss nicht nur rechnen.

mögliche Nachteile

- Umfang der Aufgabe
- Leseaufwand
- Das mathematische Thema „exponentielles Wachstum" ist nicht sofort eindeutig erkennbar.
- Es wird kein bestimmtes mathematisches Verfahren zum Lösen nahegelegt.
- Es wird ein Begründungstext verlangt!

Anzahl DIN A 4-Blätter	2	4	8	16
Format des Rechtecks	DIN A 3	DIN A 2	DIN A 1	DIN A 0

wie oft wurde das DIN A 3-Blatt gefaltet?	1	2	3	4	5	6	7
Format des Rechtecks	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	A 10
Dicke aller Papierschichten in mm	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2	6,4	12,8

eigenes Experiment: Das DIN A 3-Blatt konnte siebenmal auf die Hälfte gefaltet werden, aber die 7. Faltung hielt nicht, sondern ging wieder auf. Ein DIN A 4-Blatt konnte nur sechsmal auf die Hälfte gefaltet werden und hielt auch nicht gut.

Das Volumen des DIN A 3-Blattes bleibt durch das Falten unverändert. Die Fläche halbiert sich bei jeder Faltung, die Dicke verdoppelt sich.

d) *siehe nächste Seite*

Lösungen 23.10. exponentielles Wachstum beim Papierfalten

Wenn man ein Blatt Papier mehrfach „auf die Hälfte faltet", dann wächst die Anzahl der Papierschichten *exponentiell*: sie verdoppelt, vervierfacht, verachtfacht sich usw. Alle Aufgaben dieses Kalenderblatts behandeln diesen Sachverhalt.

d) Im Jahre 2011 hat eine amerikanische Schülergruppe einen Weltrekord aufgestellt: Sie falteten Papier 13 mal auf die Hälfte. Aus einem ursprünglich 16 km langen Streifen aus Toilettenpapier wurde ein ca. 1,5 m langer und 80 cm hoher Stapel, der stabil liegen blieb und sich nicht auseinanderfaltete.

Diskutiere, ob dieser Rekord jemals gebrochen werden könnte.

Vorteile

- wirklich interessant
- Man könnte das Vorgehen in einem kleineren Rahmen praktisch nachvollziehen.
- Man muss (und kann) keine eindeutige Lösung angeben, sondern kann mit Begründungen abwägen.

Nachteile

- viele Fakten in einem (kurzen) Text
- Man muss das Problem überhaupt erst einmal verstehen.
- Es wird kein bestimmtes mathematisches Verfahren zum Lösen nahegelegt.
- Es gibt anscheinend keine eindeutige Antwort / Lösung.

Wenn das Papier mit der gleichen Vorgehensweise 14 mal auf die Hälfte gefaltet werden soll, muss der Stapel zum Schluss ca. 1,6 m hoch sein, also doppelt so hoch wie bei 13 Faltungen.

Da der Stapel bei dieser Höhe höher wäre als die Länge von 1,5 m beim Rekord von 2011, reichen 32 km Toilettenpapier vermutlich nicht aus. Da das Papier nicht scharf umgeknickt werden kann, sondern sich beim Umfalten jedesmal eine noch dickere Rundung ergibt, sollte der Stapel am Schluss vermutlich 3 m lang sein, damit er stabil liegen bleiben kann. Dafür wären 64 km Toilettenpapier erforderlich.

Vermutung: Es wäre möglich, den Rekord zu brechen, aber dafür wäre mindestens der vierfache Aufwand erforderlich.