MATHE 364

18.10. Potenzrechnung – alles noch präsent?

Das heutige Kalenderblatt dient nicht in erster Linie dem Üben, sondern es ist ein Selbsttest. Was weißt du, was kannst du, was musst du wiederholen oder erarbeiten?

- **Hake ab**, was du sicher kannst. Diese Aufgaben brauchst du nicht zu bearbeiten.
- **Kreuze** die Aufgaben **an**, die du nicht lösen kannst, weil dir Wissen fehlt.
- **Wahlaufgaben**: Bearbeite *zwei* Aufgaben, die du ziemlich schwierig findest, aber noch lösen kannst.

a) **Stelle** 7^3 sowie a^3 als Produkt **dar**.

b) **Gib** ein Zahlenbeispiel für eine *Potenz* und **gib** die Bedeutung der Begriffe *Hochzahl* (*Exponent*) und *Grundzahl* (*Basis*) **an**.

c) **Gib** den Wert von 5^{-2} **an**.

Stelle a^{-3} als Term **dar**, in dem die Potenz eine positive Hochzahl hat.

d) Die Werte der Potenzen a^1, a^0, a^{-1} bzw. a^{-n} mit $n \in \mathbb{N}$ sind durch zusätzliche Definitionen festgelegt.

Gib diese Definitionen **an**. **Begründe**, weshalb diese Definitionen sinnvoll sind.

e) **Gib** die Werte der Terme **an**.

$10^3 \cdot 10^2$ $\quad (10^3)^2$ $\quad 10^3 + 10^2$ $\quad 10^{3+2}$ $\quad (10^2)^3$ $\quad 10^{3\cdot 2}$ $\quad 7^3 \cdot 7^{-3}$

f) Vereinfache die Terme

$a^n \cdot a^k$ $\quad a^n : a^k$ $\quad (a^n)^k$ $\quad a^n \cdot b^n$ $\quad \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $\quad \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$

g) **Gib** die Werte der Terme **an**.

$25^{\frac{1}{2}}$ $\quad 8^{\frac{1}{3}}$ $\quad 8^{\frac{2}{3}}$ $\quad \left(2^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)$

h) Die Bedeutung von $a^{\frac{1}{2}}$ ist durch eine Definition festgelegt.

Gib diese Definition **an**. **Begründe**, weshalb diese Definition sinnvoll ist.

i) Für die Basis wird in der Potenzrechnung verlangt, dass $a > 0$ sein muss.

Gib je ein Beispiel für Probleme, die durch $a = 0$ und durch $a < 0$ entstehen.

j) Skizziere je zwei aussagekräftige Graphen für Potenzfunktionen sowie für Exponentialfunktionen.

Lösungen 18.10. Potenzrechnung – alles noch präsent?

Das heutige Kalenderblatt dient nicht in erster Linie dem Üben, sondern es ist ein Selbsttest.

- **Hake ab**, was du sicher kannst. individuelle Entscheidungen
- **Kreuze** die Aufgaben **an**, die du nicht lösen kannst, weil dir Wissen fehlt. siehe oben
- **Wahlaufgaben**: Bearbeite zwei schwierige Aufgaben, die du noch lösen kannst. s. o.

a) **Stelle** 7^3 sowie a^3 als Produkt **dar**. $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$ $\quad a^3 = a \cdot a \cdot a$

b) **Gib** ein Zahlenbeispiel für eine *Potenz* und **gib** die Bedeutung der Begriffe *Hochzahl* (*Exponent*) und *Grundzahl* (*Basis*) **an**.

Potenz → 7^3 Exponent (Hochzahl) Basis (Grundzahl)

7^3 heißt <u>Potenz</u>. Dabei ist 7 im Beispiel die <u>Basis</u> und 3 ist der <u>Exponent</u>.

Die Potenzschreibweise ist eine Abkürzung für ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren. Dabei ist die Basis der mehrfach vorkommende Faktor, und der Exponent gibt die Anzahl der Faktoren an.

Im Beispiel kommt der Faktor 7 dreimal vor: $7^3 = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{3 Faktoren}} = 343$.

c) **Gib** den Wert von 5^{-2} **an**. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

Stelle a^{-3} als Term **dar**, in dem die Potenz eine positive Hochzahl hat. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

d) Die Werte der Potenzen a^1, a^0, a^{-1} bzw. a^{-n} mit $n \in \mathbb{N}$ sind durch zusätzliche Definitionen festgelegt.

Gib diese Definitionen **an**. $a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Begründe, weshalb diese Definitionen sinnvoll sind.

Permanenzprinzip (sinnvolle Fortsetzung)

$a^3 = a \cdot a \cdot a$
$\downarrow :a$
$a^2 = a \cdot a$
$\downarrow :a$
$a^1 = a$
$\downarrow :a$
$a^0 = 1$
$\downarrow :a$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$\downarrow :a$
$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
$\downarrow :a$
$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

Rechengesetze der Potenzrechnung

$a^2 : a = (a \cdot a) : a = a$
a^1 nur sinnvoll, wenn
$a^2 : a^1 = a^{2-1} = a^1$ ist.

$a^2 : a^2 = 1$
a^0 nur sinnvoll, wenn
$a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0 = 1$ ist.

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$
a^{-1} nur sinnvoll wenn $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ist,
da $a^1 \cdot a^{-1} = a^{1+(-1)} = a^0 = 1$ gilt.
analog : $a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1$, sinnvoll $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
da $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$

MATHE 364

Lösungen 18.10. Potenzrechnung – alles noch präsent?

Das heutige Kalenderblatt dient nicht in erster Linie dem Üben, sondern es ist ein Selbsttest.

e) **Gib** die Werte der Terme **an**.

$10^3 \cdot 10^2 = 10^5$ $\qquad (10^3)^2 = 10^6$ $\qquad 10^3 + 10^2 = 1000 + 100 = 1100$

$10^3 + 10^2 = 10 \cdot 10^2 + 10^2 = 10^2 \cdot (10+1) = 11 \cdot 10^2$ $\qquad 10^{3+2} = 10^5$

$(10^2)^3 = 10^6$ $\qquad 10^{3\cdot 2} = 10^6$ $\qquad 7^3 \cdot 7^{-3} = 7^0 = 1$

Es ist wichtig, dass du 10^6 als *„anständige Zahl"* akzeptierst und ohne langes Umrechnen aus dem Gedächtnis als eine Million erkennst.

f) Vereinfache die Terme

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ $\qquad a^n : a^k = a^{n-k}$ $\qquad (a^n)^k = a^{n\cdot k}$ $\qquad a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$

$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}} = a^{-(-n)} = a^n$

g) **Gib** die Werte der Terme **an**.

$25^{\frac{1}{2}} = 5$ $\qquad 8^{\frac{1}{3}} = 2$ $\qquad 8^{\frac{2}{3}} = 4$ $\qquad \left(2^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right) = 2$

h) Die Bedeutung von $a^{\frac{1}{2}}$ ist durch eine Definition festgelegt.

Gib diese Definition **an**.

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Begründe, weshalb diese Definition sinnvoll ist.

einerseits ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a$

andererseits ist $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$

Um beides miteinander vereinbar zum machen definiert man $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

i) Für die Basis wird in der Potenzrechnung verlangt, dass $a > 0$ sein muss.

Gib je ein Beispiel für Probleme, die durch $a = 0$ und durch $a < 0$ entstehen.

Sicherlich ist $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. Aber wenn man 0^3 zulassen möchte, welchen sinnvollen Wert sollte dann 0^0 haben?

Sicherlich ist $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = +125$. Aber mit $(-9)^{0,5}$ entsteht das Problem, dass die Wurzel aus -9 nicht definiert ist. Man darf also nicht $(-9)^{0,5} \cdot (-9)^{0,5}$ rechnen, da die Wurzel aus einer negativen Zahl in den reellen Zahlen nicht definiert ist.

Lösungen 18.10. Potenzrechnung – alles noch präsent?

Das heutige Kalenderblatt dient nicht in erster Linie dem Üben, sondern es ist ein Selbsttest.

j) Skizziere je zwei aussagekräftige Graphen für Potenzfunktionen sowie für Exponentialfunktionen.