MATHE 364

19.10. Definitionen und Sätze der Potenzrechnung

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n\,\text{Faktoren}}$ $\qquad$ $3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5\,\text{Faktoren}} = 243$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

a) Teste dich selbst und **markiere** mit √, ? oder **–** :
Was kannst du abhaken √, wo bist du unsicher ?, wo bist du unwissend **–** ?

b) **Gib** zu *drei* Termen deiner Wahl ein Zahlenbeispiel **an.** Falls du den ersten Term wählen möchtest, dann gib hier ein weiteres Beispiel mit anderen Zahlen.

c) Obwohl Potenzen mit negativen Grundzahlen unter bestimmten Voraussetzungen sinnvoll sein können, wird in der Potenzrechnung $a > 0$ verlangt.

Kennzeichne *mindestens zwei* Terme, für die $a > 0$ verlangt werden muss.

Gib an, was $n \in \mathbb{N}$ bedeutet.
Kennzeichne einen Term, bei dem $n \in \mathbb{N}$ verlangt werden muss.

c) **Markiere** *mindestens zwei* Definitionen mit **D**. **Markiere** *mindestens einen* Satz mit **S** und **leite** ihn aus Definitionen und anderen Sätzen **her** bzw. **beweise** ihn.

MATHE 364

Lösungen 19.10. Definitionen und Sätze der Potenzrechnung

D	$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}_{n\,\text{Faktoren}}$	$n \in \mathbb{N}$	$4^3 = \underbrace{4\cdot 4\cdot 4}_{3\text{ Faktoren}} = 64$
D	$a^1 = a$		$42^1 = 42$
D	$a^0 = 1$	$a > 0$	$42^0 = 1$
D	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a > 0$ wegen $a \neq 0$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$
D	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a > 0$ wegen $a \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$
S	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		$10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$
S	$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	wegen $a \neq 0$	$10^7 : 10^2 = 10^{7-3} = 10^5$
S	$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$		$2^3 \cdot 5^3 = (2\cdot 5)^3 = 10^3$
S	$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$b > 0$ wegen $b \neq 0$	$14^3 : 7^3 = (14:7)^3 = 2^3 = 8$
S	$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$		$\left(10^3\right)^2 = 10^{3\cdot 2} = 10^6$
D	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	$a > 0$	$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$
D	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a > 0$	$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$
D	$a^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$	$a > 0$	$125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125}^2 = 25$

a) Teste dich selbst und **markiere** mit √, ? oder **–** : individuelle Entscheidungen
Was kannst du abhaken √, wo bist du unsicher ?, wo bist du unwissend **–** ?

b) **Gib** zu *drei* Termen deiner Wahl ein Zahlenbeispiel **an**. siehe rechte Spalte

c) Obwohl Potenzen mit negativen Grundzahlen unter bestimmten Voraussetzungen sinnvoll sein können, wird in der Potenzrechnung $a > 0$ verlangt.

Kennzeichne *mindestens zwei* Terme, für die $a > 0$ verlangt werden muss. s. o.

Gib an, was $n \in \mathbb{N}$ bedeutet. n ist eine natürliche Zahl aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$
Kennzeichne einen Term, bei dem $n \in \mathbb{N}$ verlangt werden muss. siehe Tabelle

c) **Markiere** *mindestens zwei* Definitionen mit **D**.

Kennzeichnung siehe Tabelle

Markiere *mindestens einen* Satz mit **S** und **leite** ihn aus Definitionen und anderen Sätzen **her** bzw. **beweise** ihn.

Herleitungen siehe nächste Seite

MATHE 364

Lösungen 19.10. Definitionen und Sätze der Potenzrechnung

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{N}$

S

$$a^n \cdot a^m = \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}}}^{n+m \text{ Faktoren}} = a^{n+m}$$

$a^n : a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $n, m \in \mathbb{N}$

S

$$a^n : a^m = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren}}}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-m \text{ Faktoren}}}{1} = a^{n-m} \quad \text{falls } n > m$$

$$a^n : a^m = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}} \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n \text{ Faktoren}}} = \frac{1}{a^{m-n}} = a^{n-m} \quad \text{falls } n < m$$

$a > 0$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, $n \in \mathbb{N}$

S

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Klammern}} = (a \cdot b)^n$$

$a^n : b^n = \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $b > 0$

S

$$a^n : b^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Brüche}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$, $n, m \in \mathbb{N}$

S

$$\left(a^n\right)^m = \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}^{m \text{ mal } n \text{ Faktoren}} = a^{n \cdot m}$$

c) Markiere *mindestens einen* Satz mit **S** und **leite** ihn aus Definitionen und anderen Sätzen **her** bzw. **beweise** ihn.

Herleitungen siehe oben