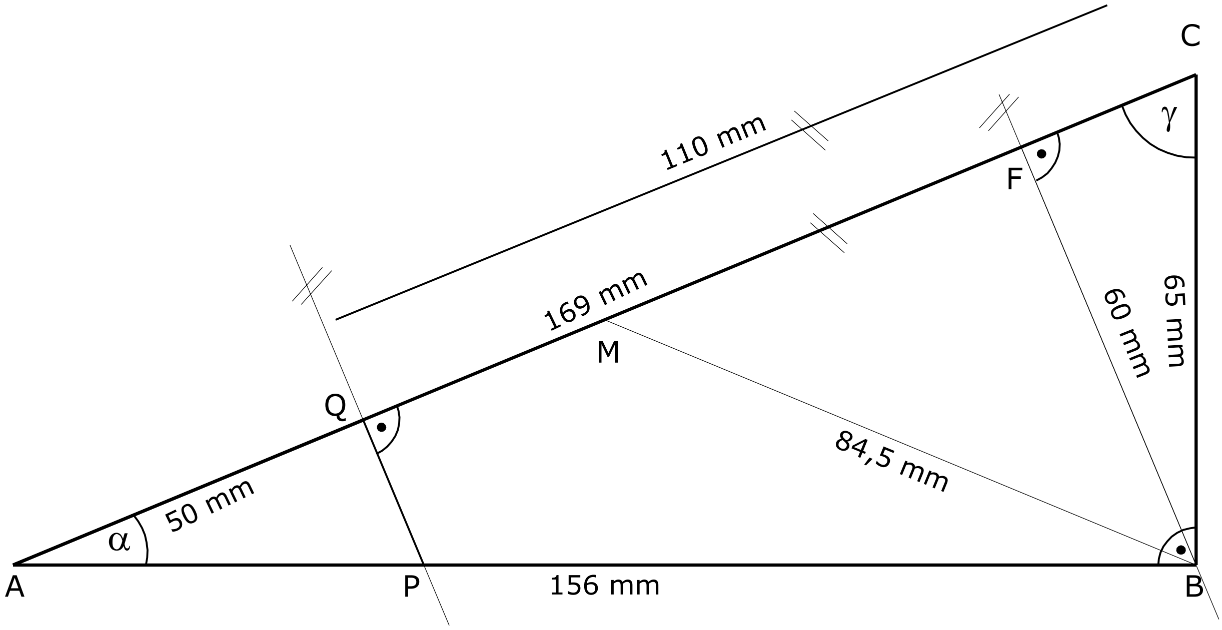
MATHE 364

17.10. Strahlensätze und ein rechtwinkliges Dreieck

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, in dem für Berechnungen der Satz des Pythagoras, die Strahlensätze oder die Trigonometrie genutzt werden können.



a) Beschrifte je eine Teilaufgabe mit P, S sowie T, die

P mit dem Satz des Pythagoras (P)

S mit den Strahlensätzen (S)

T mit der Trigonometrie (T) bearbeitet werden kann.

Bei einigen Teilaufgaben sind mehrere verschiedene Ansätze möglich.

Wahlaufgaben: Bearbeite *mindestens zwei* der Teilaufgaben **b)** bis **g)**.

b) Berechne die Länge der Strecke $\overline{FC}$.

c) Gegeben ist die Länge $|AQ| = 50$ mm.
Berechne die Längen der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{QP}$.

d) Weise rechnerisch nach, dass M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist.

e) Bestimme die Größen α und γ der Winkel $\sphericalangle$ BAC und $\sphericalangle$ ACB **rechnerisch**.

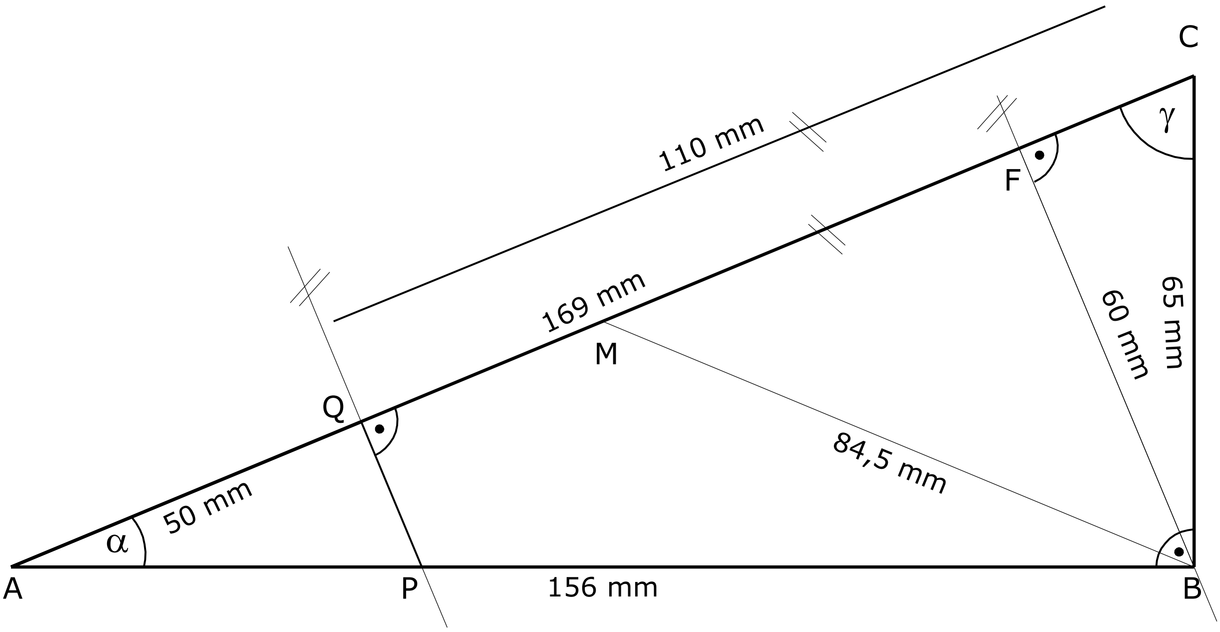
f) Berechne die Länge der Strecke $\overline{MF}$.

g) Die Abbildung zeigt eine 110 mm lange Parallele zu $\overline{AC}$. Diese Strecke soll parallel verschoben werden, so dass ein kleineres Dreieck entsteht, das zu ABC ähnlich ist.

Zeichne die verschobene Strecke **ein**. **Bestimme rechnerisch** ihre exakte Lage, z. B. Abstände zu bestimmten Punkten.

Lösungen 17.10. Strahlensätze und ein rechtwinkliges Dreieck

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, in dem für Berechnungen der Satz des Pythagoras, die Strahlensätze oder die Trigonometrie genutzt werden können.



a) **Beschrifte** je eine Teilaufgabe mit P, S sowie T, die

P mit dem Satz des Pythagoras (P)

S mit den Strahlensätzen (S)

T mit der Trigonometrie (T) bearbeitet werden kann.

Bei einigen Teilaufgaben sind mehrere verschiedene Ansätze möglich.

Wahlaufgaben: Bearbeite *mindestens zwei* der Teilaufgaben **b)** bis **g)**.

b) Pythagoras oder Trigonometrie **Berechne** die Länge der Strecke $\overline{FC}$.

c) Pythagoras für das Zwischenergebnis |FC|, damit |AF| =|AC| – |FC| bestimmen, dann 2. Strahlensatz

Gegeben ist die Länge |AQ| = 50 mm.

Berechne die Längen der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{QP}$.

d) sehr viele Ansätze möglich, Pythagoras, Strahlensatz oder Trigonometrie, aber am besten über eine geometrische Argumentation

Weise rechnerisch nach, dass M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist.

e) Trigonometrie **Bestimme** die Größen α und γ der Winkel ∢ BAC und ∢ ACB **rechnerisch**.

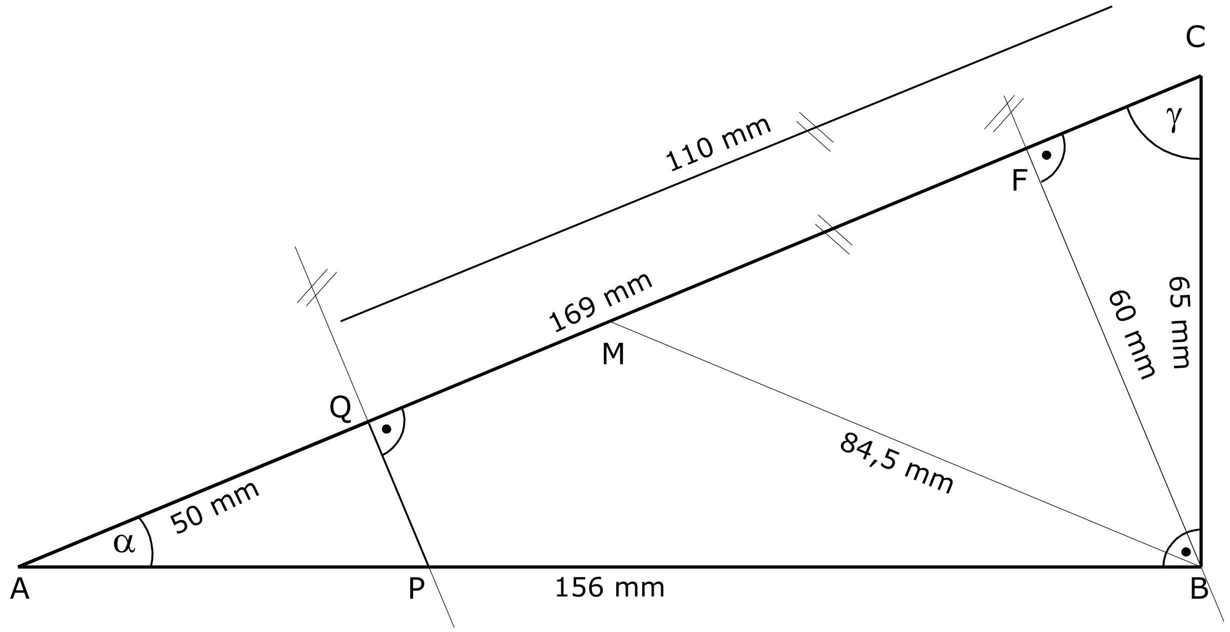
f) Pythagoras oder Trigonometrie **Berechne** die Länge der Strecke $\overline{MF}$.

g) Strahlensätze Die Abbildung zeigt eine 110 mm lange Parallele zu $\overline{AC}$. Diese Strecke soll parallel verschoben werden, so dass ein kleineres Dreieck entsteht, das zu ABC ähnlich ist.

Zeichne die verschobene Strecke **ein**. **Bestimme rechnerisch** ihre exakte Lage, z. B. Abstände zu bestimmten Punkten.

Lösungen 17.10. Strahlensätze und ein rechtwinkliges Dreieck

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, in dem für Berechnungen der Satz des Pythagoras, die Strahlensätze oder die Trigonometrie genutzt werden können.



Wahlaufgaben: Bearbeite *mindestens zwei* der Teilaufgaben **b)** bis **g)**.

b) **Berechne** die Länge der Strecke $\overline{FC}$.

$$|FB|^2 + |FC|^2 = |BC|^2 \quad \Rightarrow$$

$$|FC|^2 = |BC|^2 - |FB|^2 = 65^2 - 60^2 = 4225 - 3600$$

$$|FC| = \sqrt{625} = 25$$

c) Gegeben ist die Länge |AQ| = 50 mm.
Berechne die Längen der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{QP}$.

$$|AC| = |AF| + |FC| \quad \Rightarrow$$

$$|AF| = |AC| - |FC| = 169 - 25 = 144$$

$$\frac{|QP|}{|FB|} = \frac{|AQ|}{|AF|}$$

$$|QP| = |FB| \cdot \frac{|AQ|}{|AF|} = 60 \cdot \frac{50}{144} = \frac{125}{6} = 20{,}8\overline{3}$$

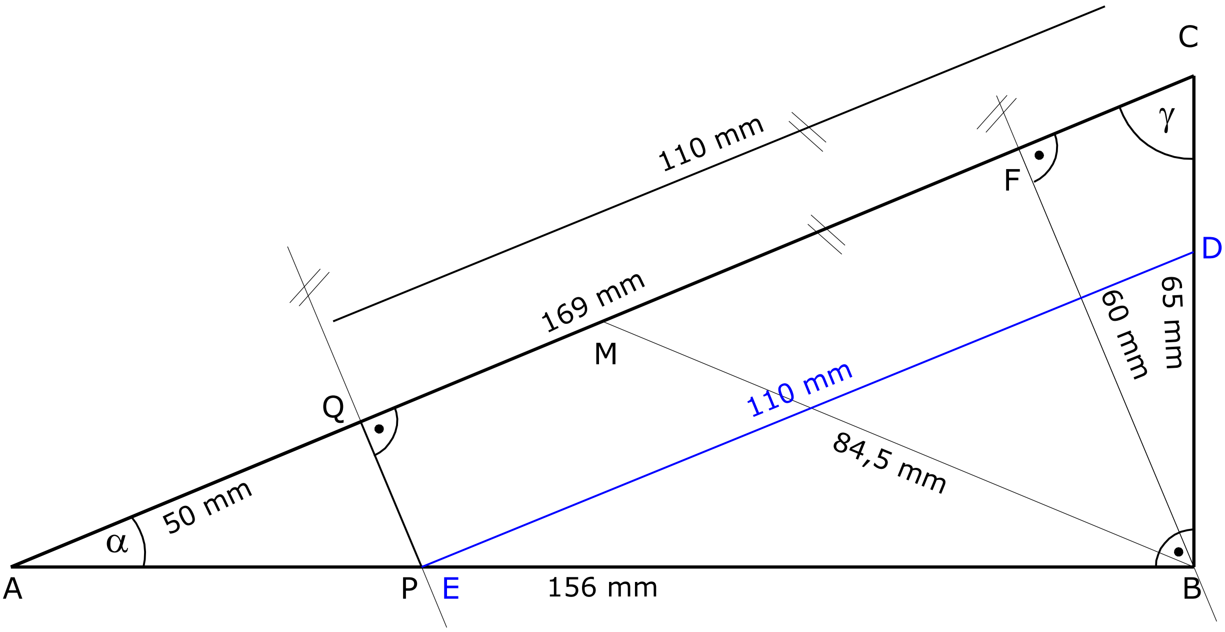
d) **Weise rechnerisch nach**, dass M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist.

z. B. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, die Hypotenuse ist $\overline{AC}$. Schlägt man einen Thaleskreis um den Mittelpunkt der Hypotenuse, dann liegen A, B und C auf der Kreislinie (Satz des Thales). Also sind die Längen|AM|, |MC| und |MB| gleich groß. Die Länge |MB| = 84,5 mm war in der Zeichnung angegeben. Das ist tatsächlich halb so lang wie die Hypotenuse. |AC| : 2 = 169 : 2 = 84,5. Also ist M tatsächlich der Mittelpunkt der Hypotenuse.

weitere Lösungen auf den nächsten Seiten

Lösungen 17.10. Strahlensätze und ein rechtwinkliges Dreieck

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, in dem für Berechnungen der Satz des Pythagoras, die Strahlensätze oder die Trigonometrie genutzt werden können.



e) **Bestimme** die Größen α und γ der Winkel $\sphericalangle$ BAC und $\sphericalangle$ ACB **rechnerisch**.

$$\tan(\alpha) = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{65}{156} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 22{,}6199°$$

$$\gamma = 90° - \alpha \approx 67{,}3801°$$

f) **Berechne** die Länge der Strecke $\overline{MF}$.

$$\tan(\alpha) = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{65}{156} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 22{,}6199° \qquad \gamma = 90° - \alpha \approx 67{,}3801°$$

g) Die Abbildung zeigt eine 110 mm lange Parallele zu $\overline{AC}$. Diese Strecke soll parallel verschoben werden, so dass ein kleineres Dreieck entsteht, das zu ABC ähnlich ist.

Zeichne die verschobene Strecke **ein**. **Bestimme rechnerisch** ihre exakte Lage, z. B. Abstände zu bestimmten Punkten.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in ihren drei Innenwinkel übereinstimmen. Da $\overline{ED}$ eine Parallele zu $\overline{AC}$ sein soll, müssen die Dreiecke ABC und EBD die gleichen Winkelgrößen α und γ besitzen. Wir berechnen die Längen der Katheten im rechtwinkligen Dreieck EBD.

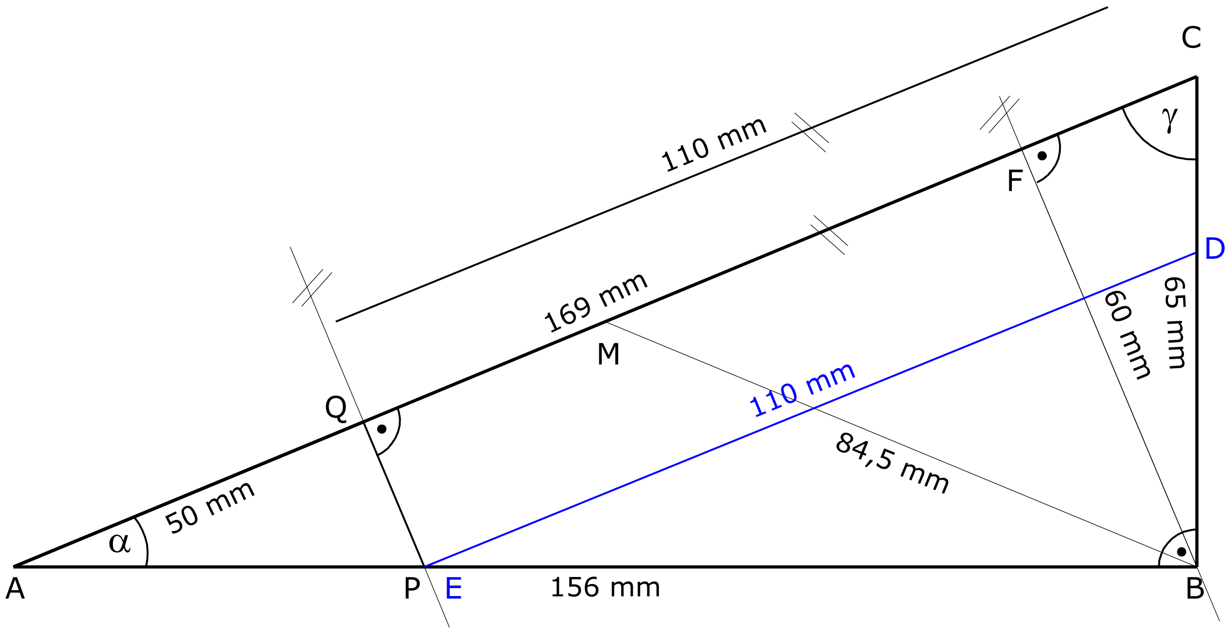
$$\cos(\alpha) = \frac{|EB|}{|ED|} \quad \Rightarrow \quad |EB| = |ED| \cdot \cos(\alpha) \approx 110 \cdot 0{,}92307\ldots = 101{,}53846\ldots$$

$$\sin(\alpha) = \frac{|BD|}{|ED|} \quad \Rightarrow \quad |BD| = |ED| \cdot \sin(\alpha) \approx 110 \cdot 0{,}38461\ldots = 42{,}3076\ldots$$

Es sieht fast so aus, als ob P und E übereinstimmen. Das ist nicht der Fall, siehe Rechnung auf der nächsten Seite.

Lösungen 17.10. Strahlensätze und ein rechtwinkliges Dreieck

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, in dem für Berechnungen der Satz des Pythagoras, die Strahlensätze oder die Trigonometrie genutzt werden können.



g) Die Abbildung zeigt eine 110 mm lange Parallele zu $\overline{AC}$. Diese Strecke soll parallel verschoben werden, so dass ein kleineres Dreieck entsteht, das zu ABC ähnlich ist.

Zeichne die verschobene Strecke **ein**. **Bestimme rechnerisch** ihre exakte Lage, z. B. Abstände zu bestimmten Punkten.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in ihren drei Innenwinkel übereinstimmen. Da $\overline{ED}$ eine Parallele zu $\overline{AC}$ sein soll, müssen die Dreiecke ABC und EBD die gleichen Winkelgrößen α und γ besitzen. Wir berechnen die Längen der Katheten im rechtwinkligen Dreieck EBD.

$$\cos(\alpha) = \frac{|EB|}{|ED|} \quad \Rightarrow \quad |EB| = |ED| \cdot \cos(\alpha) \approx 110 \cdot 0{,}92307... = 101{,}53846...$$

$$\sin(\alpha) = \frac{|BD|}{|ED|} \quad \Rightarrow \quad |BD| = |ED| \cdot \sin(\alpha) \approx 110 \cdot 0{,}38461... = 42{,}3076...$$

Es sieht fast so aus, als ob P und E übereinstimmen. Tatsächlich liegt E etwas näher an B als P. Der Unterschied von drei Hunderstel Millimetern ist in der zeichnung nicht erkennbar.

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|AB|}{|AF|}$$

$$|AP| = |AQ| \cdot \frac{|AB|}{|AF|} = 50 \cdot \frac{156}{144} = \frac{325}{6} = 54{,}1\overline{6}$$

$$|AB| = |AP| + |PB| \quad \Rightarrow$$

$$|PB| = |AB| - |AP| = 156 - \frac{325}{6} = \frac{611}{6} = 101{,}8\overline{3}$$