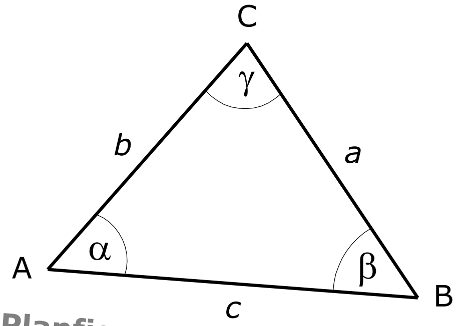
MATHE 364

22.09. Gleichungen lösen in trigonometrischen Berechnungen



Planfigur, nicht maßstäblich

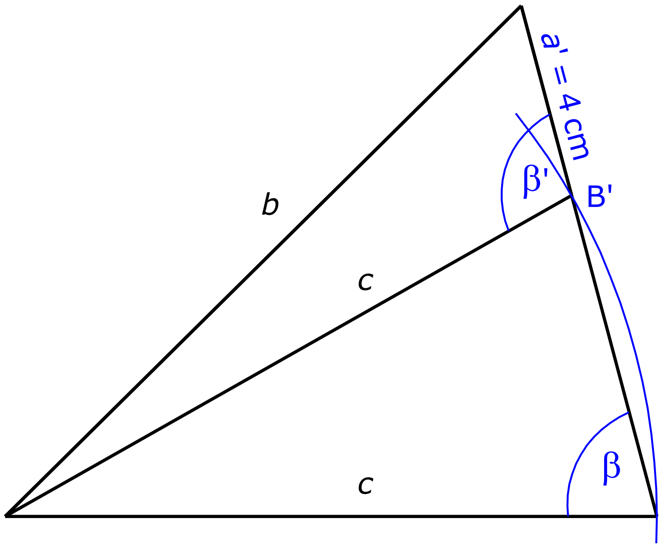
a) Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 7$ cm, $b = 9{,}6$ cm und $c = 8{,}6$ cm.
Gib den zugehörigen Kongruenzsatz **an**.
Entscheide, ob das Dreieck eindeutig bestimmt ist.
Löse die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$ nach γ **auf**, **setze** die gegebenen Werte **ein** und **berechne** γ.

b) Ein Dreieck ist durch $b = 9{,}6$ cm, $c = 8{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ bestimmt.
Gib den zugehörigen Kongruenzsatz **an**.
Entscheide, ob das Dreieck eindeutig bestimmt ist.
Löse die Gleichung $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ nach β **auf**, **setze** die gegebenen Werte **ein** und **berechne** β.

c) **Wahlaufgabe**: Bearbeite *eine* der folgenden Teilaufgaben.

- **Weise nach**, dass das Dreieck aus **a)** kongruent zu einem der Dreiecke aus **b)** ist.
- **Berechne** in **a)** oder in **b)** den Wert von α.
- **Zeichne** das Dreieck aus **a)** oder aus **b)**.
- **Weise rechnerisch nach**, dass im Dreieck aus **a)** die Seitenhalbierende zur Seite $\overline{AC}$ die Länge $s_b = 6{,}2$ cm hat.
- **Wähle** Seitenlängen und Winkel aus **a)** und **b)**, insgesamt drei Bestimmungsstücke. **Gib** eine Gleichung **an**, bei der mit dem Kosinussatz eine Seitenlänge bestimmt wird.

Lösungen 22.09. Gleichungen lösen in trigonometrischen Berechnungen



a) Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 7$ cm, $b = 9{,}6$ cm und $c = 8{,}6$ cm.

Gib den zugehörigen Kongruenzsatz **an**. SSS

Entscheide, ob das Dreieck eindeutig bestimmt ist. ja

Löse die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$ nach γ **auf**, **setze** die gegebenen Werte **ein** und **berechne** γ.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \qquad \left| -a^2 - b^2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 - a^2 - b^2 = -2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \qquad \left| \cdot(-1) \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \qquad \left| : (2 \cdot a \cdot b) \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{7^2 + 9{,}6^2 - 8{,}6^2}{2 \cdot 7 \cdot 9{,}6} = \frac{49 + 92{,}16 - 73{,}96}{165{,}12} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60^\circ$$

b) Ein Dreieck ist durch $b = 9{,}6$ cm, $c = 8{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ bestimmt.

Gib den zugehörigen Kongruenzsatz **an**. SSW

Entscheide, ob das Dreieck eindeutig bestimmt ist. Nein: Da der 60°-Winkel der kürzeren der beiden Seiten gegenüber liegt, gibt es die zweite Lösung β'.

Löse die Gleichung $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ nach β **auf**, **setze** die gegebenen Werte **ein** und **berechne** β.

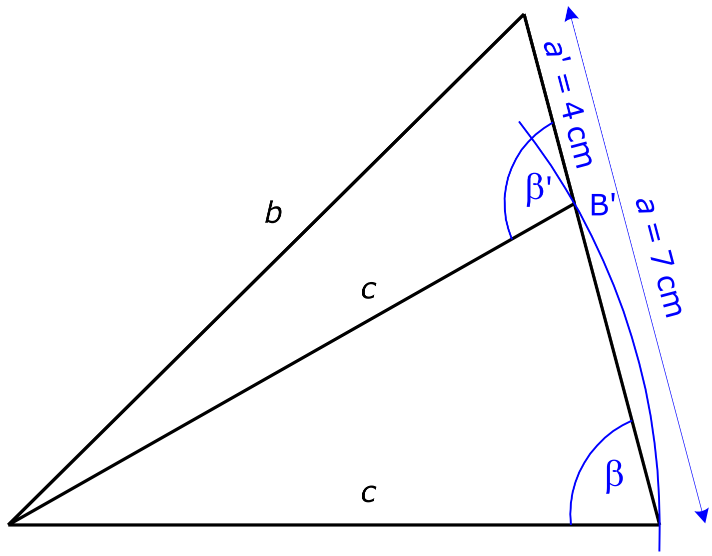
$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} = 9{,}6 \cdot \frac{\sin(60^\circ)}{8{,}6} \approx 0{,}9667 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 75{,}1782^\circ$$

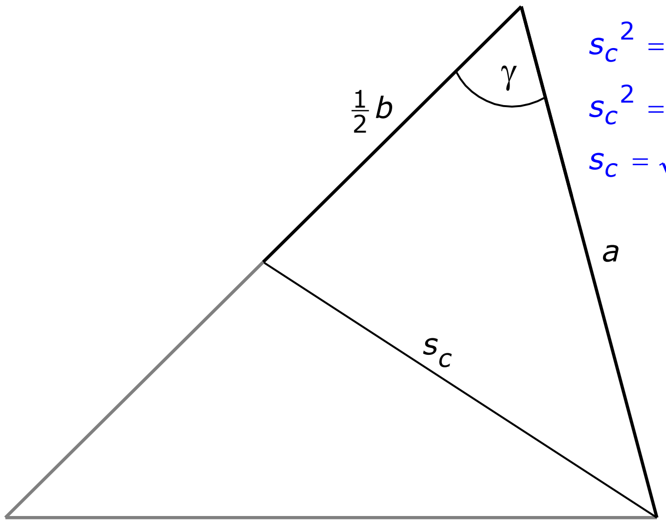
$$\beta' = 180^\circ - \beta \approx 104{,}8218^\circ$$



c) Wahlaufgabe: Bearbeite *eine* der folgenden Teilaufgaben.

- **Weise nach**, dass das Dreieck aus **a)** kongruent zu einem der Dreiecke aus **b)** ist. Beide Dreiecke stimmen in $b = 9{,}6$ cm, $c = 8{,}6$ cm und in $\gamma = 60°$ überein. Da in **a)** $a = 7$ cm ist, ist dieses Dreieck kongruent zu dem größeren Dreieck in b).
- **Berechne** in **a)** oder in **b)** den Wert von α.

  $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 44{,}8218°$ $\quad \alpha' = 180° - \beta' - \gamma \approx 15{,}1782°$
- **Zeichne** das Dreieck aus **a)** oder aus **b)**. siehe Abbildung
- **Weise rechnerisch nach**, dass im Dreieck aus **a)** die Seitenhalbierende zur Seite $\overline{AC}$ die Länge $s_b = 6{,}2$ cm hat.



$$s_c{}^2 = a^2 + \left(\tfrac{1}{2}b\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \tfrac{1}{2}b \cdot \cos(\gamma)$$
$$s_c{}^2 = 7^2 + 4{,}8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4{,}8 \cdot \cos(60°) = 38{,}44$$
$$s_c = \sqrt{38{,}44} = 6{,}2$$

- **Wähle** Seitenlängen und Winkel aus **a)** und **b)**, insgesamt drei Bestimmungsstücke. **Gib** eine Gleichung **an**, bei der mit dem Kosinussatz eine Seitenlänge bestimmt wird. Ich wähle a, b und γ.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$
$$c^2 = 7^2 + 9{,}6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9{,}6 \cdot \cos(60°)$$