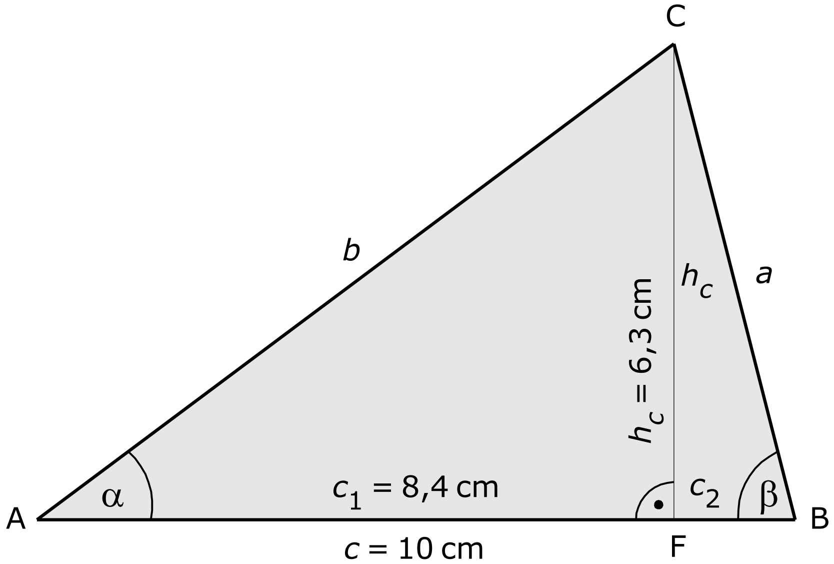
MATHE 364

15.09. Herleitung des Kosinussatzes

a) Die folgenden Maße des Dreiecks ABC sind bekannt:
$c = 10\,\text{cm}$, $c_1 = 8{,}4\,\text{cm}$, $h_c = 6{,}3\,\text{cm}$.

Gib einen Term für $\cos(\beta)$ im Dreieck FBC **an**.

Berechne *mindestens drei* der folgenden Werte: a, b, c_2, α, β.



b) **Ergänze** die Rechnung für das rechte Teildreieck mit dem Satz des __________.

linkes Teildreieck AFB	rechtes Teildreieck FBC
$b^2 = h_c^2 + c_1^2$	$a^2 = \quad + \quad$
$h_c^2 = b^2 - c_1^2$	$h_c^2 =$

c) **Wahlaufgabe**: **Ergänze** mindestens drei Lücken in der Herleitung. oder:
Gib in mindestens drei Rechenzeilen die Zahlenwerte für dieses Dreieck **an**.

Gleichsetzen $h_c^2 = h_c^2$, also $b^2 - c_1^2 = a^2 - \_\_\_\_\_$

$b^2 = a^2 - c_2^2 + c_1^2 = a^2 + c_1^2 - c_2^2$

Einsetzen $c_1 + c_2 = c \quad \Rightarrow \quad c_1 = c - c_2$, also $b^2 = a^2 + (c - c_2)^2 - \_\_\_\_\_$

$(c - c_2)^2 =$ ______________ Formel, also $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_2 + c_2^2 - c_2^2$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_2$

Einsetzen $c_2 = a \cdot \cos(\beta)$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \_\_\_\_\_$

d) **Ergänze**:
Der Kosinussatz $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ sieht beinahe aus wie der Satz des ______________. **Gib** eine Bedingung **an**, unter der $b^2 = a^2 + c^2$ korrekt wäre.

Lösungen 15.09. Herleitung des Kosinussatzes

a) Die folgenden Maße des Dreiecks ABC sind bekannt:
$c = 10$ cm, $c_1 = 8{,}4$ cm, $h_c = 6{,}3$ cm.

Gib einen Term für $\cos(\beta)$ im Dreieck FBC **an**. $\cos(\beta) = \frac{c_2}{a}$

Berechne *mindestens drei* der folgenden Werte:

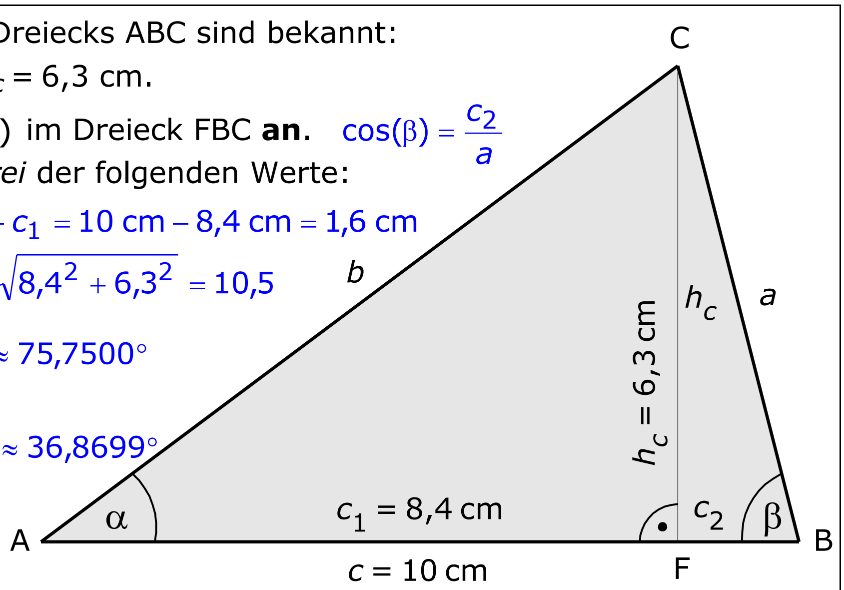
$c = c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = c - c_1 = 10\text{ cm} - 8{,}4\text{ cm} = 1{,}6\text{ cm}$

$b^2 = c_1^2 + h_c^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{8{,}4^2 + 6{,}3^2} = 10{,}5$

$\tan(\beta) = \frac{h_c}{c_2} = \frac{6{,}3}{1{,}6} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 75{,}7500°$

$\tan(\alpha) = \frac{h_c}{c_1} = \frac{6{,}3}{8{,}4} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}8699°$

$a = \frac{c_2}{\cos(\beta)} = 6{,}5$



b) **Ergänze** die Rechnung für das rechte Teildreieck mit dem Satz des Pythagoras.

linkes Teildreieck AFB	rechtes Teildreieck FBC
$b^2 = h_c^2 + c_1^2$	$a^2 = h_c^2 + c_2^2$
$h_c^2 = b^2 - c_1^2$	$h_c^2 = a^2 - c_2^2$

c) **Wahlaufgabe**: **Ergänze** mindestens drei Lücken in der Herleitung.

Rechnung mit Zahlen siehe nächste Seite

Gleichsetzen $h_c^2 = h_c^2$, also $\quad b^2 - c_1^2 = a^2 - c_2^2$

$$b^2 = a^2 - c_2^2 + c_1^2 = a^2 + c_1^2 - c_2^2$$

Einsetzen $c_1 + c_2 = c \quad \Rightarrow \quad c_1 = c - c_2$, also $\quad b^2 = a^2 + (c - c_2)^2 - c_2^2$

$(c - c_2)^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot c_2 - c_2^2$ 2. binomische Formel, also

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_2 + c_2^2 - c_2^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_2$$

Einsetzen $c_2 = a \cdot \cos(\beta) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta)$

d) **Ergänze**:
Der Kosinussatz $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ sieht beinahe aus wie der Satz des Pythagoras. **Gib** eine Bedingung **an**, unter der $b^2 = a^2 + c^2$ korrekt wäre.

Das Dreieck muss rechtwinklig sein mit β = 90°, d. h. *b* ist die Länge der Hypotenuse und *a* und *c* sind die Längen der Katheten.

Lösungen 15.09. Herleitung des Kosinussatzes

a) Die folgenden Maße des Dreiecks ABC sind bekannt:
$c = 10$ cm, $c_1 = 8{,}4$ cm, $h_c = 6{,}3$ cm.

Gib einen Term für $\cos(\beta)$ im Dreieck FBC **an**. $\cos(\beta) = \dfrac{c_2}{a}$

Berechne *mindestens drei* der folgenden Werte:

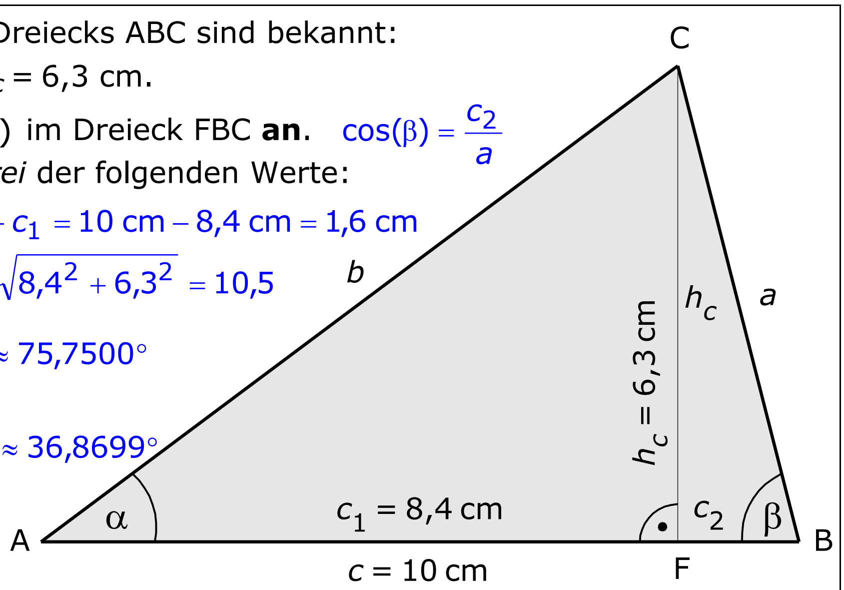
$c = c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = c - c_1 = 10\text{ cm} - 8{,}4\text{ cm} = 1{,}6\text{ cm}$

$b^2 = c_1^2 + h_c^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{8{,}4^2 + 6{,}3^2} = 10{,}5$

$\tan(\beta) = \dfrac{h_c}{c_2} = \dfrac{6{,}3}{1{,}6} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 75{,}7500°$

$\tan(\alpha) = \dfrac{h_c}{c_1} = \dfrac{6{,}3}{8{,}4} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}8699°$

$a = \dfrac{c_2}{\cos(\beta)} = 6{,}5$



b) **Ergänze** die Rechnung für das rechte Teildreieck mit dem Satz des Pythagoras.

linkes Teildreieck AFB	rechtes Teildreieck FBC
$b^2 = h_c^2 + c_1^2$	$a^2 = h_c^2 + c_2^2$
$h_c^2 = b^2 - c_1^2$	$h_c^2 = a^2 - c_2^2$

c) **Gib** in mindestens drei Rechenzeilen die Zahlenwerte für dieses Dreieck **an**.

$b^2 - c_1^2 = a^2 - c_2^2$	$10{,}5^2 - 8{,}4^2 = 6{,}5^2 - 1{,}6^2$ $110{,}25 - 70{,}56 = 42{,}25 - 2{,}56 = 39{,}69$
$b^2 = a^2 - c_2^2 + c_1^2 = a^2 + c_1^2 - c_2^2$	$10{,}5^2 = 6{,}5^2 - 1{,}6^2 + 8{,}4^2$ $110{,}25 = 42{,}25 - 2{,}56 + 70{,}56$
$b^2 = a^2 + (c - c_2)^2 - c_2^2$	$10{,}5^2 = 6{,}5^2 + (10 - 1{,}6)^2 - 1{,}6^2$ $110{,}25 = 42{,}25 + 70{,}56 - 2{,}56$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_2 + c_2^2 - c_2^2$	$10{,}5^2 = 6{,}5^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 1{,}6 + 1{,}6^2 - 1{,}6^2$ $110{,}25 = 42{,}25 + 100 - 32 + 2{,}56 - 2{,}56$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_2$	$10{,}5^2 = 6{,}5^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 1{,}6$ $110{,}25 = 42{,}25 + 100 - 32$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta)$	$10{,}5^2 = 6{,}5^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6{,}5 \cdot \dfrac{1{,}6}{6{,}5}$ $110{,}25 = 42{,}25 + 100 - 32$