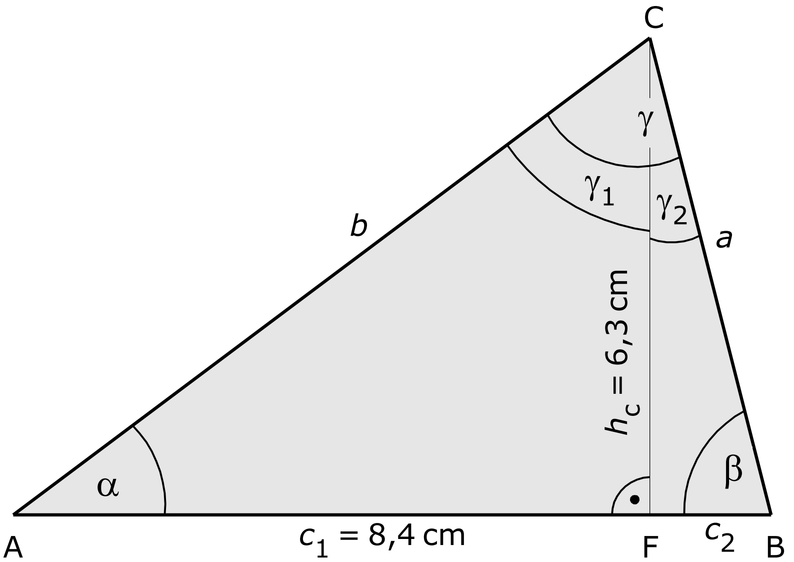
MATHE 364

07.09. Höhen und rechtwinklige Teildreiecke

Die Abbildung zeigt das Dreieck ABC. Die eingezeichnete Höhe zur Grundseite $\overline{\text{AB}}$ hat die Länge h_c = 6,3 cm. Sie zerlegt das Dreieck ABC in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ABC und FBC. Der linke Abschnitt $\overline{\text{AF}}$ der Grundseite hat die Länge c_1 = 8,4 cm.

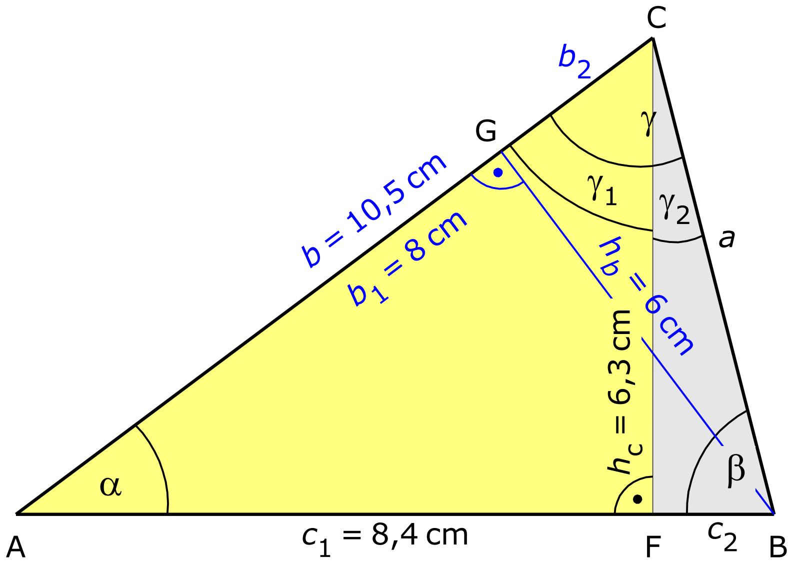


Aufgabe: Möglichst alle Seitenlängen *a*, *b* und *c*, Innenwinkel α, β und γ sowie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sollen rechnerisch bestimmt werden.
Dafür gibt es zahlreiche Lösungswege. Um auf Ideen zu kommen, darfst du dir beliebig Wahlaufgaben aussuchen.

- $\frac{1}{2} \cdot 8{,}4\,\text{cm} \cdot 6{,}3\,\text{cm}$ gibt nur den Fächeninhalt eines Teildreiecks an.
  Markiere dieses Teildreieck oder **gib** seine Eckpunkte **an**.
- **Berechne** die Seitenlänge *b*.
- **Bestimme** die Winkelgrößen α und γ_1 **rechnerisch**.
- **Zeichne** die Höhe zur Seite $\overline{\text{AC}}$ **ein**. Diese Höhe steht im Punkt G senkrecht auf der Seite $\overline{\text{AC}}$. **Weise rechnerisch nach**, dass das Dreieck ABG die Seitenlängen 6 cm, 8 cm und 10 cm hat und dass seine Seiten tatsächlich auf den Geraden AB, AC und BG liegen.
- **Berechne** den Flächeninhalt des Dreiecks ABG und den des Dreiecks ABC.
- **Weise rechnerisch nach**, dass die Terme $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$**,** $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$ und $\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta)$ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC richtig angeben.
- $c_1 = b \cdot \cos(\alpha)$ und $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$. **Gib** ähnliche Terme für die Längen der anderen Höhen sowie der Strecken vom Eckpunkt bis zum Höhenfußpunkt **an**.

Lösungen 07.09. Höhen und rechtwinklige Teildreiecke

Die Abbildung zeigt das Dreieck ABC. Die eingezeichnete Höhe zur Grundseite $\overline{AB}$ hat die Länge h_c = 6,3 cm. Sie zerlegt das Dreieck ABC in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ABC und FBC. Der linke Abschnitt $\overline{AF}$ der Grundseite hat die Länge c_1 = 8,4 cm.



Aufgabe: Möglichst alle Seitenlängen *a*, *b* und *c*, Innenwinkel α, β und γ sowie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sollen rechnerisch bestimmt werden. Dafür gibt es zahlreiche Lösungswege. Um auf Ideen zu kommen, darfst du dir beliebig Wahlaufgaben aussuchen.

- $\frac{1}{2} \cdot 8{,}4\text{ cm} \cdot 6{,}3\text{ cm}$ gibt nur den Fächeninhalt eines Teildreiecks an.
  Markiere dieses Teildreieck oder **gib** seine Eckpunkte **an**. AFC gelb markiert
- **Berechne** die Seitenlänge *b*. $b = \sqrt{8{,}4^2 + 6{,}3^2} = \sqrt{110{,}25} = 10{,}5$
- **Bestimme** die Winkelgrößen α und γ_1 **rechnerisch**.
  $\tan(\alpha) = \frac{6{,}3}{8{,}4} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}8699° \quad \gamma_1 = 180° - 90° - \alpha = 53{,}1301°$
- **Zeichne** die Höhe zur Seite $\overline{AC}$ **ein**. siehe Abbildung Diese Höhe steht im Punkt G senkrecht auf der Seite $\overline{AC}$. **Weise rechnerisch nach**, dass das Dreieck ABG die Seitenlängen 6 cm, 8 cm und 10 cm hat und dass seine Seiten tatsächlich auf den Geraden AB, AC und BG liegen.
  Zum Beispiel: $8^2 + 6^2 = 10^2$ Nachweis, dass das Dreieck rechtwinklig ist
  $\tan(\alpha) = \frac{6}{8} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}8699°$ Nachweis, dass die Dreiecke ABC und ABG beide einen Winkel der gleichen Größe $\alpha \approx 36{,}8699°$ besitzen.
- **Berechne** den Flächeninhalt des Dreiecks ABG und den des Dreiecks ABC.
  ABG $\frac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 24\text{ cm}^2$

  ABC $\frac{1}{2} \cdot 10\text{ cm} \cdot 6{,}3\text{ cm} = 31{,}5\text{ cm}^2$ oder $\frac{1}{2} \cdot 10{,}5\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 31{,}5\text{ cm}^2$

Lösungen 07.09. Höhen und rechtwinklige Teildreiecke

Die Abbildung zeigt das Dreieck ABC. Die eingezeichnete Höhe zur Grundseite $\overline{AB}$ hat die Länge h_c = 6,3 cm. Sie zerlegt das Dreieck ABC in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ABC und FBC. Der linke Abschnitt $\overline{AF}$ der Grundseite hat die Länge c_1 = 8,4 cm.

$a = 6{,}5$ cm

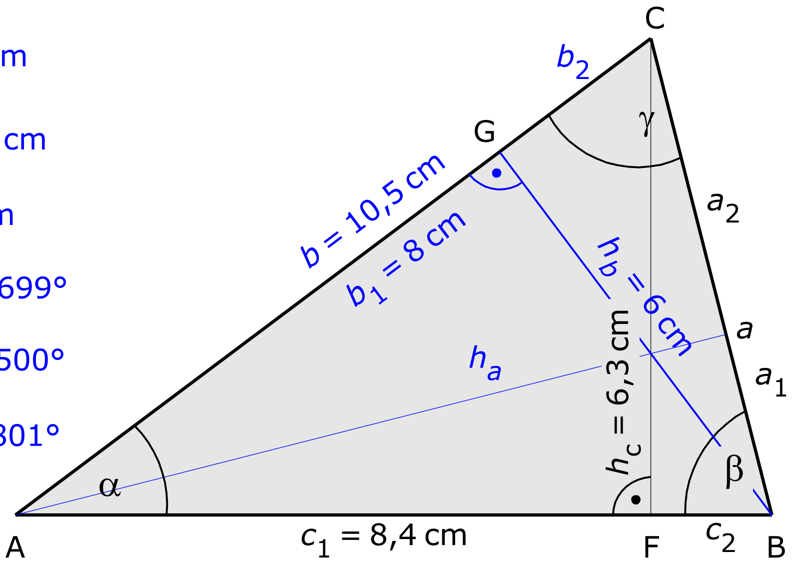
$b = 10{,}5$ cm

$c = 10$ cm

$\alpha \approx 36{,}8699°$

$\beta \approx 75{,}7500°$

$\gamma \approx 67{,}3801°$



Aufgabe: Möglichst alle Seitenlängen a, b und c, Innenwinkel α, β und γ sowie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sollen rechnerisch bestimmt werden. Dafür gibt es zahlreiche Lösungswege. Um auf Ideen zu kommen, darfst du dir beliebig Wahlaufgaben aussuchen.

- **Weise rechnerisch nach**, dass die Terme $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$, $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$ und $\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta)$ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC richtig angeben. $A = 31{,}5 \text{ cm}^2$

  $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 10{,}5 \cdot 10 \cdot \sin(36{,}8699°) \approx 31{,}5$ gibt den Flächeninhalt richtig an.

  Berechnung der Winkelgröße β: $c_1 + c_2 = c = 10$ cm. $c_2 = 10 \text{ cm} - 8{,}4 \text{ cm} = 1{,}6$ cm

  Dreieck FBC: $\tan(\beta) = \frac{6{,}3}{1{,}6} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 75{,}7500°$

  Berechnung der Seitenlänge a zum Beispiel: $a = \sqrt{1{,}6^2 + 6{,}3^2} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$

  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot 6{,}5 \cdot 10 \cdot \sin(75{,}7500°) \approx 31{,}5$ gibt den Flächeninhalt richtig an.

  Berechnung der Winkelgröße β: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 67{,}38013505°$

  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 6{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot \sin(67{,}3801°) \approx 31{,}5$

- $c_1 = b \cdot \cos(\alpha)$ und $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$. **Gib** ähnliche Terme für die Längen der anderen Höhen sowie der Strecken vom Eckpunkt bis zum Höhenfußpunkt **an**.

$c_1 = b \cdot \cos(\alpha)$	$b_1 = c \cdot \cos(\alpha)$	$a_1 = c \cdot \cos(\beta)$
$c_2 = a \cdot \cos(\beta)$	$b_2 = a \cdot \cos(\gamma)$	$a_2 = b \cdot \cos(\gamma)$
$h_c = b \cdot \sin(\alpha)$	$h_b = a \cdot \sin(\gamma)$	$h_a = b \cdot \sin(\gamma)$
$h_c = a \cdot \sin(\beta)$	$h_b = c \cdot \sin(\alpha)$	$h_a = c \cdot \sin(\beta)$