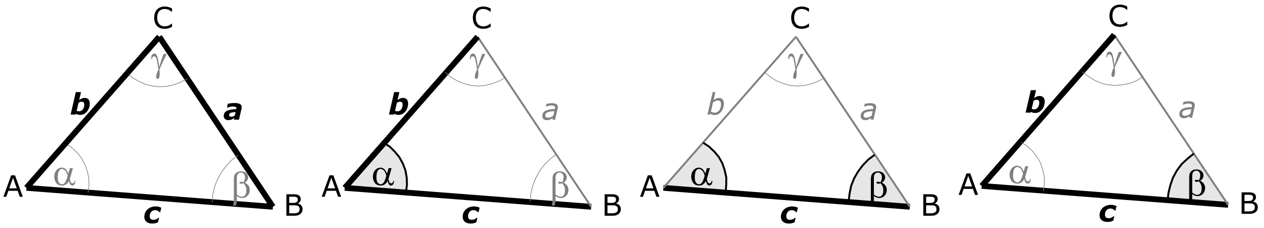
MATHE 364

18.09. trigonometrische Berechnungen

Drei Seitenlängen bzw. Winkelgrößen eines Dreiecks sind gegeben, die drei fehlenden Maße sollen jeweils berechnet werden. Es gibt im Prinzip diese vier Möglichkeiten, drei Bestimmungsstücke zusammenzustellen.



WSW | WWW | SSS | SSW | SWS | WWS

eine Seitenlänge und die anliegenden Winkel

drei Seitenlängen

zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel

zwei Seitenlängen und ein anliegender Winkel

eine Seitenlänge, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel

Ich muss mit dem Kosinussatz beginnen.

Ich muss mit dem Sinussatz beginnen.

a) **Ordne** den vier Planfiguren passende Kärtchen **zu**. Es bleiben Kärtchen übrig. Die beiden unteren Kärtchen müssen je zweimal verwendet werden.

b) Die Dreiecke **I** bis **VI** sind durch jeweils drei Bestimmungsstücke gegeben.

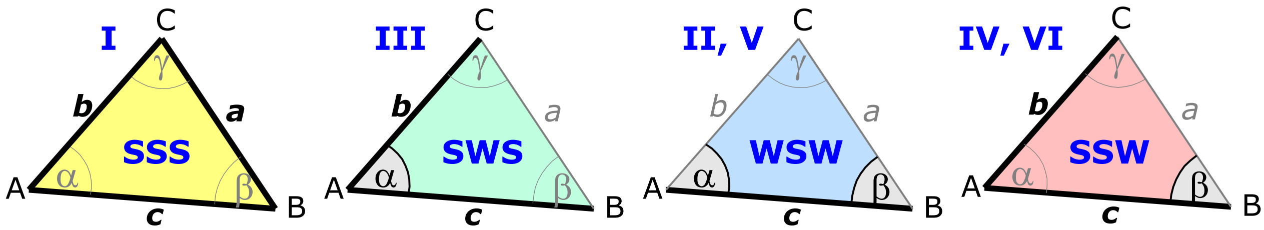
I	$a = 6$ cm, $b = 10$ cm, $c = 14$ cm	**II**	$c = 14$ cm, $\alpha = 40°$, $\beta = 70°$
III	$b = 9{,}6$ cm, $c = 14$ cm, $\alpha = 60°$	**IV**	$b = 14{,}8$ cm, $c = 14$ cm, $\beta = 60°$
V	$c = 14$ cm, $\beta = 70°$, $\gamma = 70°$	**VI**	$b = 12{,}4$ cm, $c = 14$ cm, $\beta = 60°$

- **Wähle** *eines* dieser Dreiecke.
- **Ordne** die römische Zahl der gewählten Bestimmungsstücke einer Planfigur **zu**.
- **Konstruiere** das Dreieck.
- **Berechne** die drei fehlenden Maße des Dreiecks. **Gib** bei jedem Ansatz **an**, welchen Satz du verwendest. **Überprüfe** deine Ergebnisse an deiner Zeichnung.
- Bei einem der Rechenschritte besteht die Möglichkeit, dass zwei Lösungen existieren. **Gib** den zugehörigen Kongruenzsatz sowie den trigonometrischen Satz **an**, bei dem dieser Fall auftreten kann. **Überprüfe**, ob dieser Fall bei deiner Berechnung vorliegt.

MATHE 364

Lösungen 18.09. trigonometrische Berechnungen

Drei Seitenlängen bzw. Winkelgrößen eines Dreiecks sind gegeben, die drei fehlenden Maße sollen jeweils berechnet werden. Es gibt im Prinzip diese vier Möglichkeiten, drei Bestimmungsstücke zusammenzustellen.



WSW WWW SSS SSW SWS WWS

WWW kein Kongruenzsatz, aber ähnliche Dreiecke

eine Seitenlänge und die anliegenden Winkel

drei Seitenlängen

zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel

zwei Seitenlängen und ein anliegender Winkel

WWS ohne Planfigur, ist wegen der Winkelsumme 180° ähnlich zu WSW

WWS eine Seitenlänge, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel

Ich muss mit dem Kosinussatz beginnen.

Ich muss mit dem Sinussatz beginnen.

a) **Ordne** den vier Planfiguren passende Kärtchen **zu**. Es bleiben Kärtchen übrig. Die beiden unteren Kärtchen müssen je zweimal verwendet werden. siehe Abb.

b) Die Dreiecke **I** bis **VI** sind durch jeweils drei Bestimmungsstücke gegeben.
Lösungen auf den nächsten Seiten

I	$a = 6$ cm, $b = 10$ cm, $c = 14$ cm	**II**	$c = 14$ cm, $\alpha = 40°$, $\beta = 70°$
III	$b = 9{,}6$ cm, $c = 14$ cm, $\alpha = 60°$	**IV**	$b = 14{,}8$ cm, $c = 14$ cm, $\beta = 60°$
V	$c = 14$ cm, $\beta = 70°$, $\gamma = 70°$	**VI**	$b = 12{,}4$ cm, $c = 14$ cm, $\beta = 60°$

- **Wähle** *eines* dieser Dreiecke. siehe Abbildung
- **Ordne** die römische Zahl der gewählten Bestimmungsstücke einer Planfigur **zu**.
- **Konstruiere** das Dreieck.
- **Berechne** die drei fehlenden Maße des Dreiecks. **Gib** bei jedem Ansatz **an**, welchen Satz du verwendest. **Überprüfe** deine Ergebnisse an deiner Zeichnung.
- Bei einem der Rechenschritte besteht die Möglichkeit, dass zwei Lösungen existieren. **Gib** den zugehörigen Kongruenzsatz sowie den trigonometrischen Satz **an**, bei dem dieser Fall auftreten kann. **Überprüfe**, ob dieser Fall bei deiner Berechnung vorliegt.

b) Die Dreiecke **I** bis **VI** sind durch jeweils drei Bestimmungsstücke gegeben.

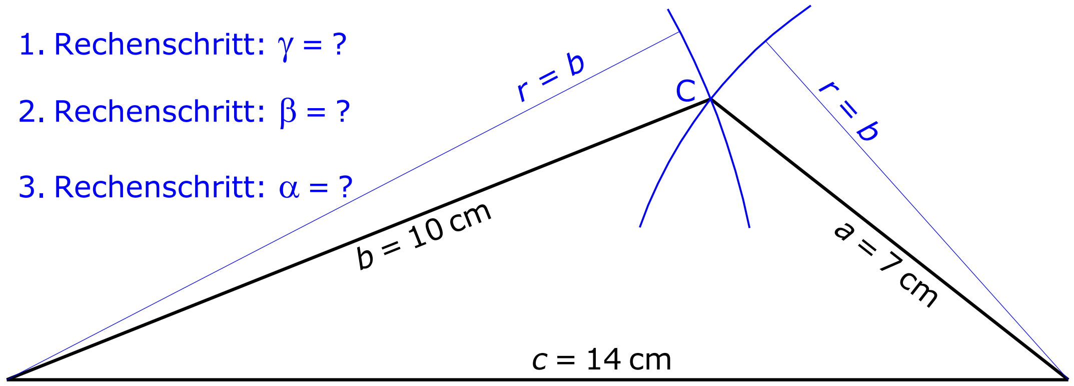
I $a = 6\text{ cm}$, $b = 10\text{ cm}$, $c = 14\text{ cm}$

- **Wähle** *eines* dieser Dreiecke. Dreieck **I**
- **Ordne** die gewählten Bestimmungsstücke einer Planfigur **zu**. Planfigur SSS

1. Rechenschritt: $\gamma = ?$

2. Rechenschritt: $\beta = ?$

3. Rechenschritt: $\alpha = ?$



- **Konstruiere** das Dreieck. 14 cm lange Strecke von A nach B, Kreis mit 10 cm Radius um A, Kreis mit 6 cm Radius um B, Schnittpunkt der Kreisbögen ist C.
- **Berechne** die drei fehlenden Maße des Dreiecks. **Gib** bei jedem Ansatz **an**, welchen Satz du verwendest. **Überprüfe** deine Ergebnisse an deiner Zeichnung.

Ich muss den Kosinussatz nutzen und beginne mit der Berechnung des Winkels, der der längsten Seite gegenüber liegt.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \qquad \left| -a^2 - b^2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 - a^2 - b^2 = -2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \qquad \left| \cdot (-1) \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \qquad \left| : (2 \cdot a \cdot b) \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = \frac{36 + 100 - 196}{120} = -\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 120°$$

Ich könnte dreimal den Kosinussatz nutzen. Diese Berechnung bedeutet aber zu viel Aufwand, außer, wenn ich das Lösen der Gleichung mit der SOLVE-Funktion des Taschenrechners durchführe. Da ich jetzt die Größe eines Winkels kenne, kann ich den Sinussatz benutzen.

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} = 10 \cdot \frac{\sin(120°)}{14} \approx 0{,}6186 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 38{,}2132°$$

Zuletzt erhalte ich aus der Winkelsumme im Dreieck $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 21{,}7868°$.

- Bei einem der Rechenschritte besteht die Möglichkeit, dass zwei Lösungen existieren. **Gib** den zugehörigen Kongruenzsatz sowie den trigonometrischen Satz **an**, bei dem dieser Fall auftreten kann. **Überprüfe**, ob dieser Fall bei deiner Berechnung vorliegt. Beim 2. Schritt nutze ich den Sinussatz. Da ich aber den Winkel kenne, der der längsten Seite gegenüber liegt, gibt es nur eine Lösung.

b) Die Dreiecke **I** bis **VI** sind durch jeweils drei Bestimmungsstücke gegeben.

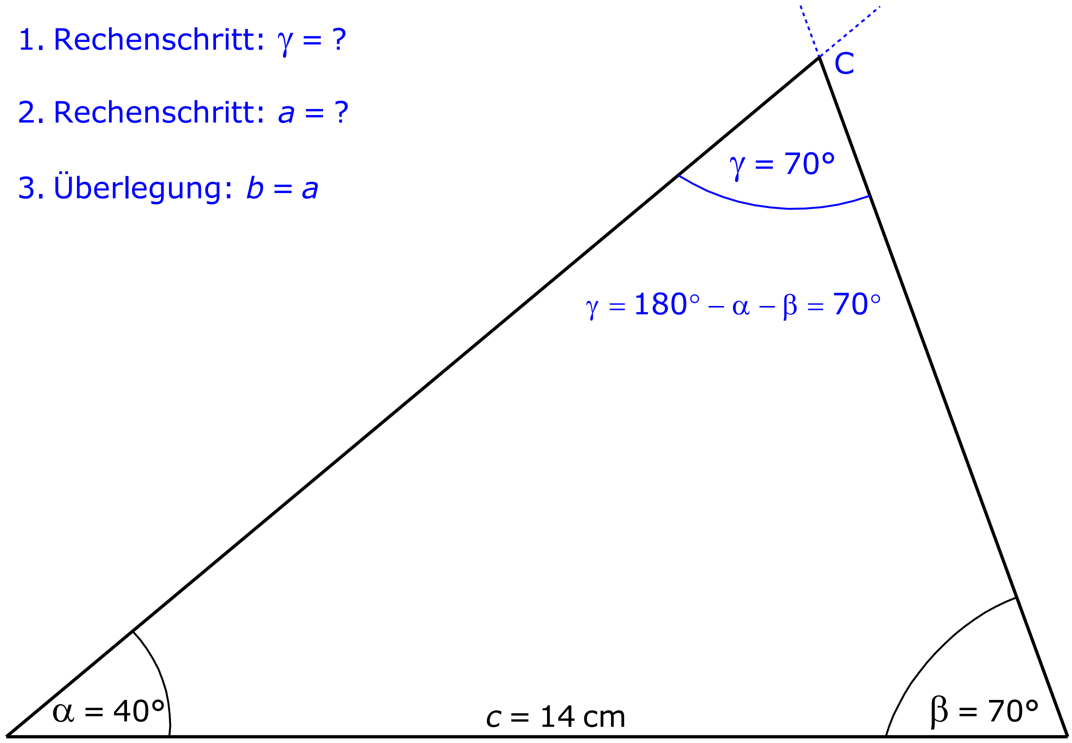
II $c = 14\text{ cm},\ \alpha = 40°,\ \beta = 70°$

- **Wähle** *eines* dieser Dreiecke. Dreieck **II**
- **Ordne** die gewählten Bestimmungsstücke einer Planfigur **zu**. Planfigur WSW

1. Rechenschritt: $\gamma = ?$

2. Rechenschritt: $a = ?$

3. Überlegung: $b = a$



- **Konstruiere** das Dreieck. 14 cm lange Strecke von A nach B, im Punkt A einen Winkel von 40° gegen den Uhrzeigersinn antragen, im Punkt B einen Winkel von 70° im Uhrzeigersinn antragen, der Schnittpunkt der beiden Schenkel ist C.
- **Berechne** die drei fehlenden Maße des Dreiecks. **Gib** bei jedem Ansatz **an**, welchen Satz du verwendest. **Überprüfe** deine Ergebnisse an deiner Zeichnung.

  Ich bereche aus der Winkelsumme im Dreieck die Größe des dritten Winkels: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 70°$. Jetzt kann und muss ich den Sinussatz nutzen und berechne die fehlenden Seitenlängen.

  $$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

  $$\Leftrightarrow \quad a = \sin(\alpha) \cdot \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad \Leftrightarrow \quad b = \sin(\beta) \cdot \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

  $$a = \sin(40°) \cdot \frac{14}{\sin(70°)} \approx 9{,}5766 \qquad b = \sin(70°) \cdot \frac{14}{\sin(70°)} = 14$$

  Die zweite Berechnung ist überflüssig, da man aus den beiden gleich großen Winkeln (Basiswinkel) erkennen kann, dass das Dreieck gleichschenklig ist.
- Bei einem der Rechenschritte besteht die Möglichkeit, dass zwei Lösungen existieren. **Gib** den zugehörigen Kongruenzsatz sowie den trigonometrischen Satz **an**, bei dem dieser Fall auftreten kann. **Überprüfe**, ob dieser Fall bei deiner Berechnung vorliegt. Da ich alle Winkel kenne, weiß ich, dass dieses Dreieck spitzwinklig ist. Beim Rechnen mit dem Sinussatz kann keine zweite Lösung mit einem stumpfen Winkel auftreten.

MATHE 364

Lösungen 18.09. trigonometrische Berechnungen

b) Die Dreiecke **I** bis **VI** sind durch jeweils drei Bestimmungsstücke gegeben.

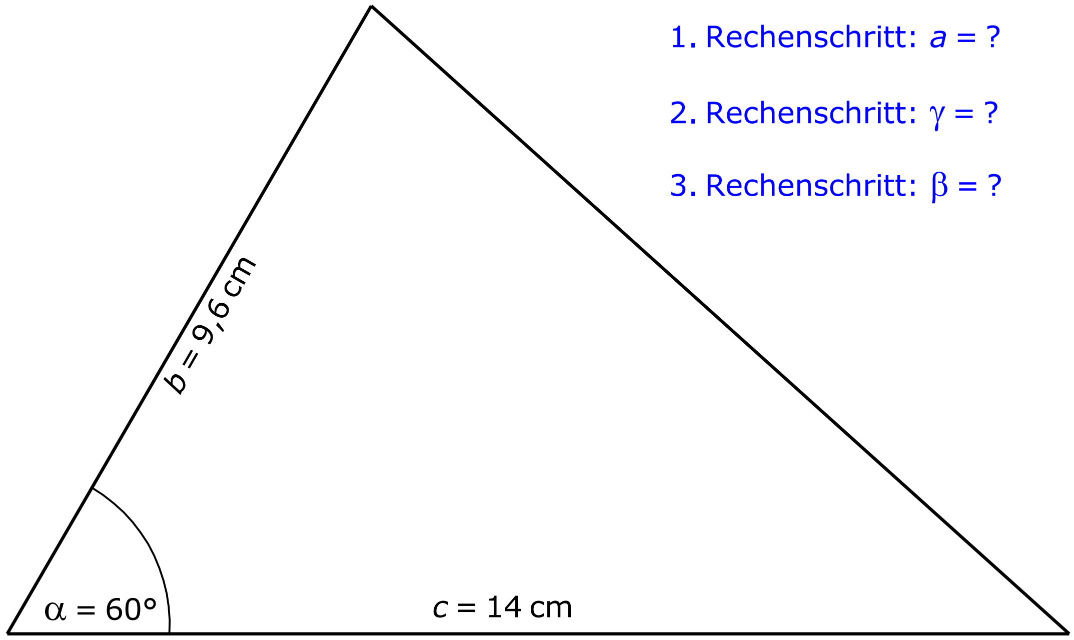
III $b = 9{,}6$ cm, $c = 14$ cm, $\alpha = 60°$

- **Wähle** *eines* dieser Dreiecke. Dreieck **III**
- **Ordne** die gewählten Bestimmungsstücke einer Planfigur **zu**. Planfigur SWS

1. Rechenschritt: $a = ?$

2. Rechenschritt: $\gamma = ?$

3. Rechenschritt: $\beta = ?$



- **Konstruiere** das Dreieck. 14 cm lange Strecke von A nach B, im Punkt A einen Winkel von 60° gegen den Uhrzeigersinn antragen, Kreis um A mit Radius 9,6 cm, Schnittpunkt mit dem Schenkel des Winkels ist C.
- **Berechne** die drei fehlenden Maße des Dreiecks. **Gib** bei jedem Ansatz **an**, welchen Satz du verwendest. **Überprüfe** deine Ergebnisse an deiner Zeichnung.

  Ich muss den Kosinussatz nutzen und beginne mit der Berechnung der fehlenden Seitenlänge *a*. Für die Berechung des zweiten unbekannten Winkels kann ich zwischen Kosinussatz und Sinussatz wählen. Mit dem Sinussatz ist die Rechnung einfacher. Den dritten Winkel bestimme ich über die Innenwinkelsumme 180°.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$a^2 = 9{,}6^2 + 14^2 - 2 \cdot 9{,}6 \cdot 14 \cdot \cos(60°)$$
$$a^2 = 92{,}16 + 196 - 2 \cdot 9{,}6 \cdot 14 \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$a = \sqrt{153{,}76} = 12{,}4$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a}$$

$$\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} = 14 \cdot \frac{\sin(60°)}{12{,}4} \approx 0{,}9778 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 77{,}8966°$$

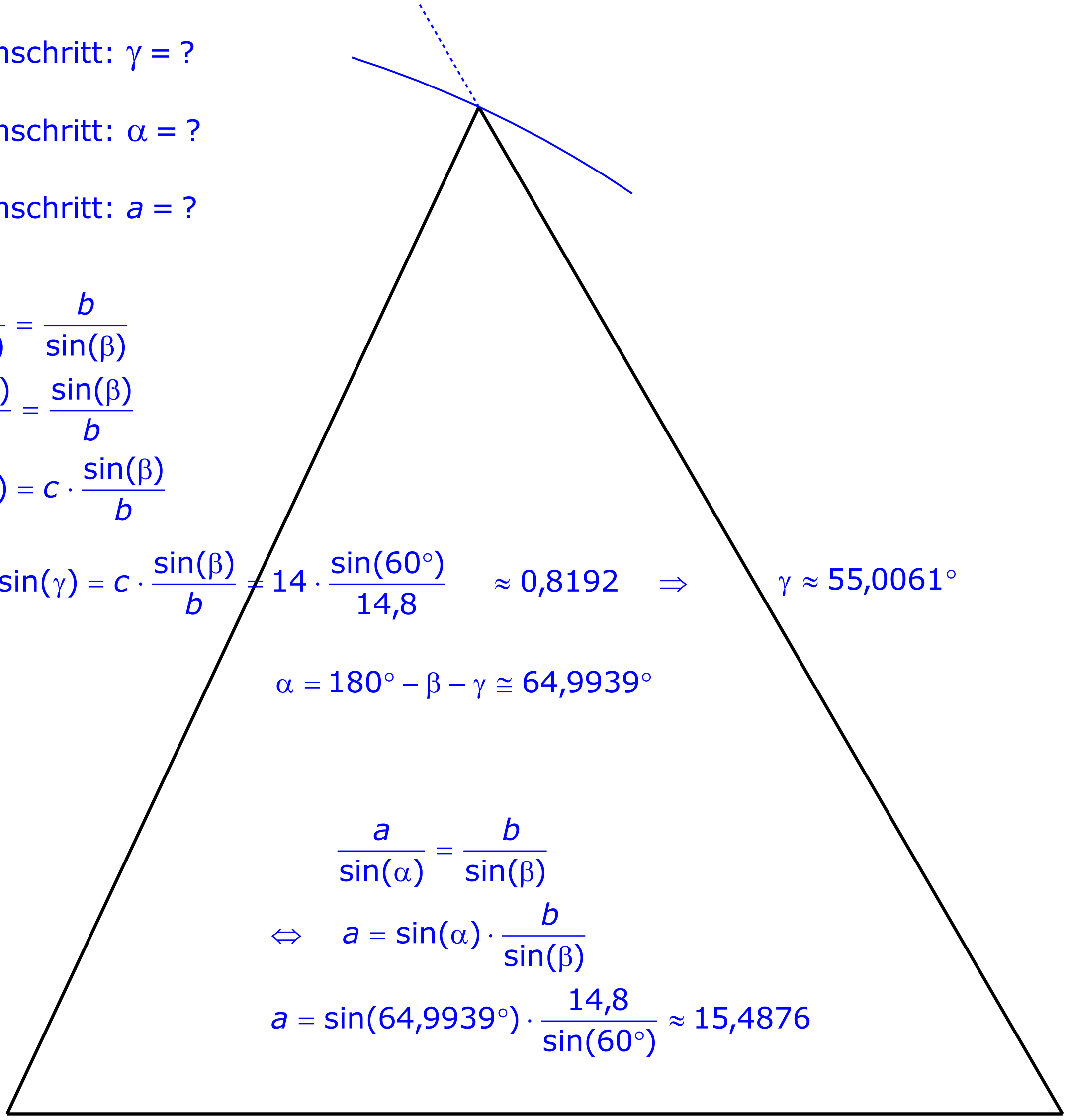
$$\beta = 180° - \alpha - \gamma \cong 42{,}1034°$$

- Bei einem der Rechenschritte besteht die Möglichkeit, dass zwei Lösungen existieren. **Gib** den zugehörigen Kongruenzsatz sowie den trigonometrischen Satz **an**, bei dem dieser Fall auftreten kann. **Überprüfe**, ob dieser Fall bei deiner Berechnung vorliegt. Im 2. Schritt wähle ich für den Sinussatz den Winkel, der der längsten Seite gegenüber liegt.

b) Die Dreiecke **I** bis **VI** sind durch jeweils drei Bestimmungsstücke gegeben.

IV $b = 14{,}8\text{ cm},\ c = 14\text{ cm},\ \beta = 60°$

- **Wähle** *eines* dieser Dreiecke. Dreieck **IV**
- **Ordne** die gewählten Bestimmungsstücke einer Planfigur **zu**. Planfigur SSW



1. Rechenschritt: $\gamma = ?$

2. Rechenschritt: $\alpha = ?$

3. Rechenschritt: $a = ?$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b} = 14 \cdot \frac{\sin(60°)}{14{,}8} \approx 0{,}8192 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 55{,}0061°$$

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma \cong 64{,}9939°$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \sin(\alpha) \cdot \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$a = \sin(64{,}9939°) \cdot \frac{14{,}8}{\sin(60°)} \approx 15{,}4876$$

- **Konstruiere** das Dreieck. 14 cm lange Strecke von A nach B, im Punkt B einen Winkel von 60° im Uhrzeigersinn antragen. Kreis um A mit Radius 14,8 cm. Der Schnittpunkt mit dem Schenkel des Winkels ist C.
- **Berechne** die drei fehlenden Maße des Dreiecks. **Gib** bei jedem Ansatz **an**, welchen Satz du verwendest. **Überprüfe** deine Ergebnisse an deiner Zeichnung. Ich muss mit dem Sinussatz beginnen und γ berechnen. Aus der Innenwinkelsumme erhalte ich α und über den Sinussatz die Seitenlänge *a*.
- Bei einem der Rechenschritte besteht die Möglichkeit, dass zwei Lösungen existieren. **Gib** den zugehörigen Kongruenzsatz sowie den trigonometrischen Satz **an**, bei dem dieser Fall auftreten kann. **Überprüfe**, ob dieser Fall bei deiner Berechnung vorliegt. Im ersten Schritt verwende ich den Sinussatz für den Winkel, der der längeren Seite gegenüber liegt. Es gibt nur eine Lösung.

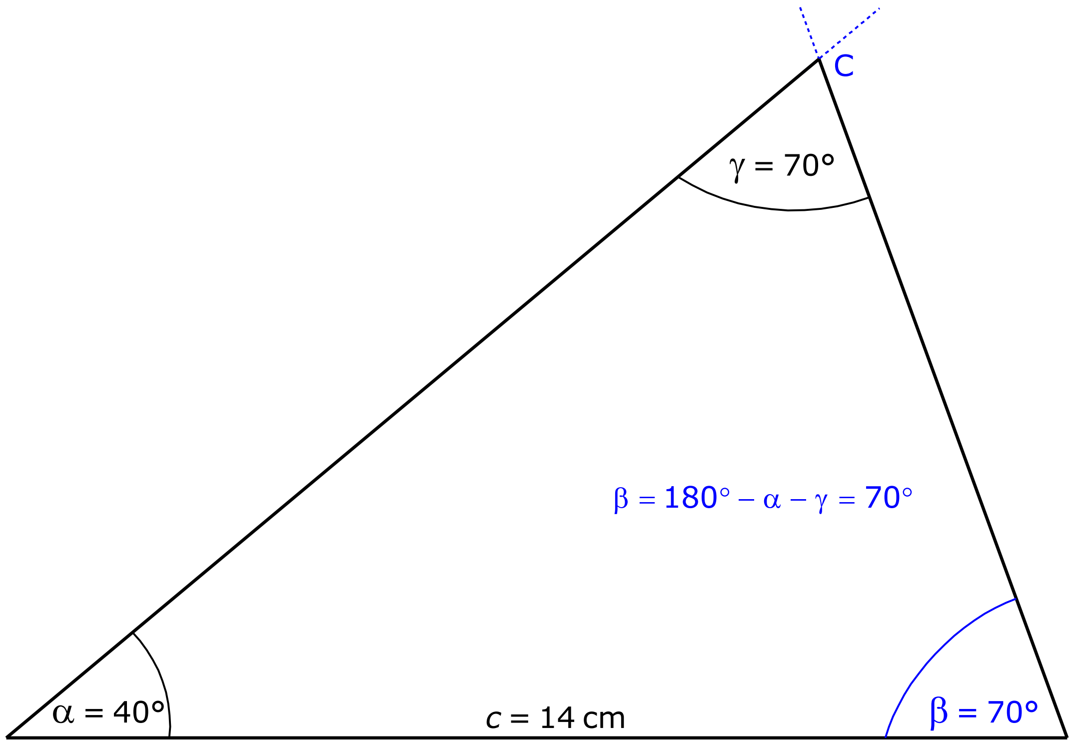
Lösungen 18.09. **trigonometrische Berechnungen**

b) Die Dreiecke **I** bis **VI** sind durch jeweils drei Bestimmungsstücke gegeben.

V $c = 14\,\text{cm}$, $\beta = 70°$, $\gamma = 70°$

- **Wähle** *eines* dieser Dreiecke. Dreieck **V**
- **Ordne** die gewählten Bestimmungsstücke einer Planfigur **zu**. Der Kongruenzsatz ist WSW. Nachdem die Größe des dritten Winkels berechnet wurde, kann entsprechend der Planfigur WSW konstruiert werden.

Dieses Dreieck ist kongruent zu Dreieck II.



- **Konstruiere** das Dreieck. Konstruktion siehe Dreieck II
- **Berechne** die drei fehlenden Maße des Dreiecks. **Gib** bei jedem Ansatz **an**, welchen Satz du verwendest. **Überprüfe** deine Ergebnisse an deiner Zeichnung.

  Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck α berechnen; weitere Rechnung siehe Dreieck II
- Bei einem der Rechenschritte besteht die Möglichkeit, dass zwei Lösungen existieren. **Gib** den zugehörigen Kongruenzsatz sowie den trigonometrischen Satz **an**, bei dem dieser Fall auftreten kann. **Überprüfe**, ob dieser Fall bei deiner Berechnung vorliegt. siehe Dreieck II

Lösungen 18.09. trigonometrische Berechnungen

b) Die Dreiecke **I** bis **VI** sind durch jeweils drei Bestimmungsstücke gegeben.

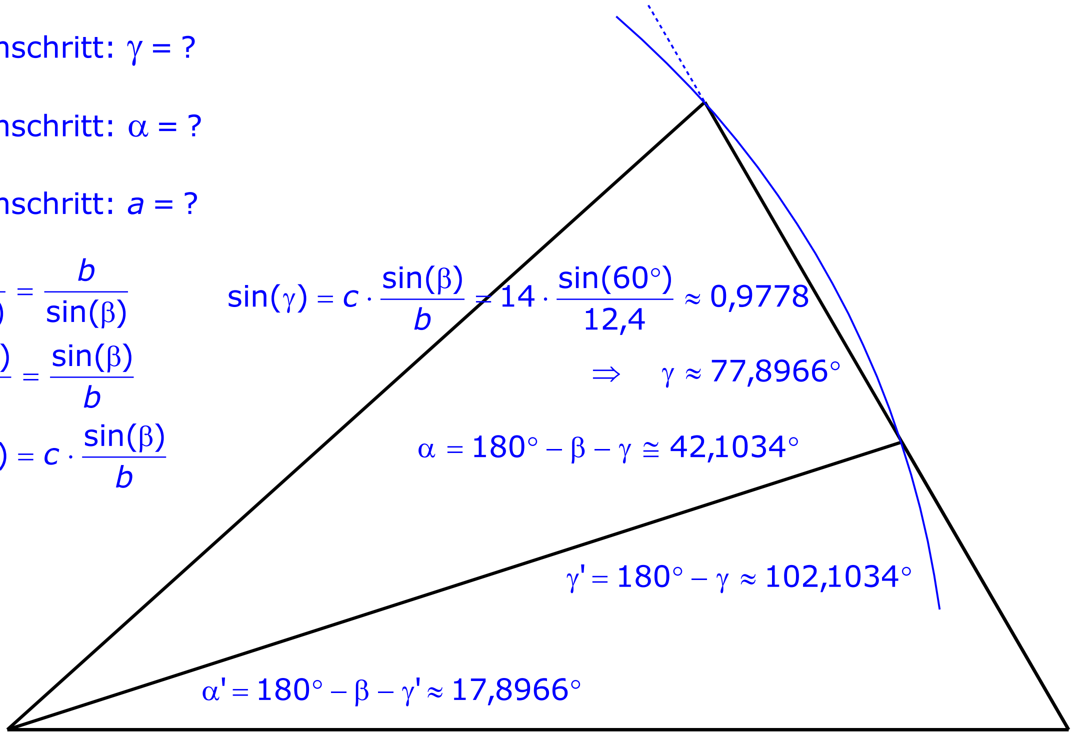
VI $b = 12{,}4\text{ cm},\ c = 14\text{ cm},\ \beta = 60°$

- **Wähle** *eines* dieser Dreiecke. Dreieck **VI**
- **Ordne** die gewählten Bestimmungsstücke einer Planfigur **zu**. Planfigur SSW

1. Rechenschritt: $\gamma = ?$

2. Rechenschritt: $\alpha = ?$

3. Rechenschritt: $a = ?$



$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b} = 14 \cdot \frac{\sin(60°)}{12{,}4} \approx 0{,}9778$$

$$\Rightarrow \quad \gamma \approx 77{,}8966°$$

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma \cong 42{,}1034°$$

$$\gamma' = 180° - \gamma \approx 102{,}1034°$$

$$\alpha' = 180° - \beta - \gamma' \approx 17{,}8966°$$

- **Konstruiere** das Dreieck. 14 cm lange Strecke von A nach B, im Punkt B einen Winkel von 60° imUhrzeigersinn antragen. Kreis um A mit Radius 12,4 cm. Der Schnittpunkt mit dem Schenkel des Winkels ist C.
- **Berechne** die drei fehlenden Maße des Dreiecks. **Gib** bei jedem Ansatz **an**, welchen Satz du verwendest. **Überprüfe** deine Ergebnisse an deiner Zeichnung.

  Ich muss mit dem Sinussatz beginnen und γ berechnen. Es gibt zwei Lösungen; die Winkel γ und γ' ergänzen sich zu 180°. Aus der Innenwinkelsumme erhalte ich α und über den Sinussatz die Seitenlänge *a* bzw. α und *a'*.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \qquad\qquad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \sin(\alpha) \cdot \frac{b}{\sin(\beta)} \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad a = \sin(\alpha) \cdot \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$a = \sin(42{,}1034°) \cdot \frac{12{,}4}{\sin(60°)} = 9{,}6 \qquad\qquad a = \sin(17{,}8966°) \cdot \frac{12{,}4}{\sin(60°)} = 4{,}4$$

- Bei einem der Rechenschritte besteht die Möglichkeit, dass zwei Lösungen existieren. **Gib** den zugehörigen Kongruenzsatz sowie den trigonometrischen Satz **an**, bei dem dieser Fall auftreten kann. **Überprüfe**, ob dieser Fall bei deiner Berechnung vorliegt. Da der Fall sSW vorliegt, d. h. der gegebene Winkel der kürzeren der beiden gegebenen Seiten gegenüber liegt, gibt es zwei Lösungen.