MATHE 364

16.09. Der Kosinussatz

a) Das Dreieck ABC hat folgende Maße:

$a = 4{,}1$ cm

$b = 5{,}8$ cm

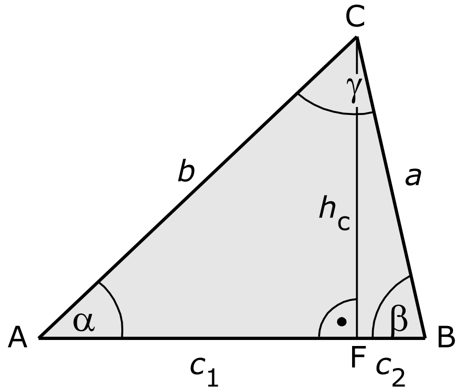
$c = 5{,}1$ cm

$\alpha \approx 43{,}6028189727036°$

$\beta \approx 77{,}3196165081802°$

$\gamma \approx 59{,}0775645191162°$

Berechne c_1, c_2 und h_c.



b) **Setze** die Maße aus **a) ein** und **vergleiche** $a^2 + b^2$ mit c^2.

Gib an, welches Ergebnis ein Vergleich von $a^2 + c^2$ mit b^2 ergibt.

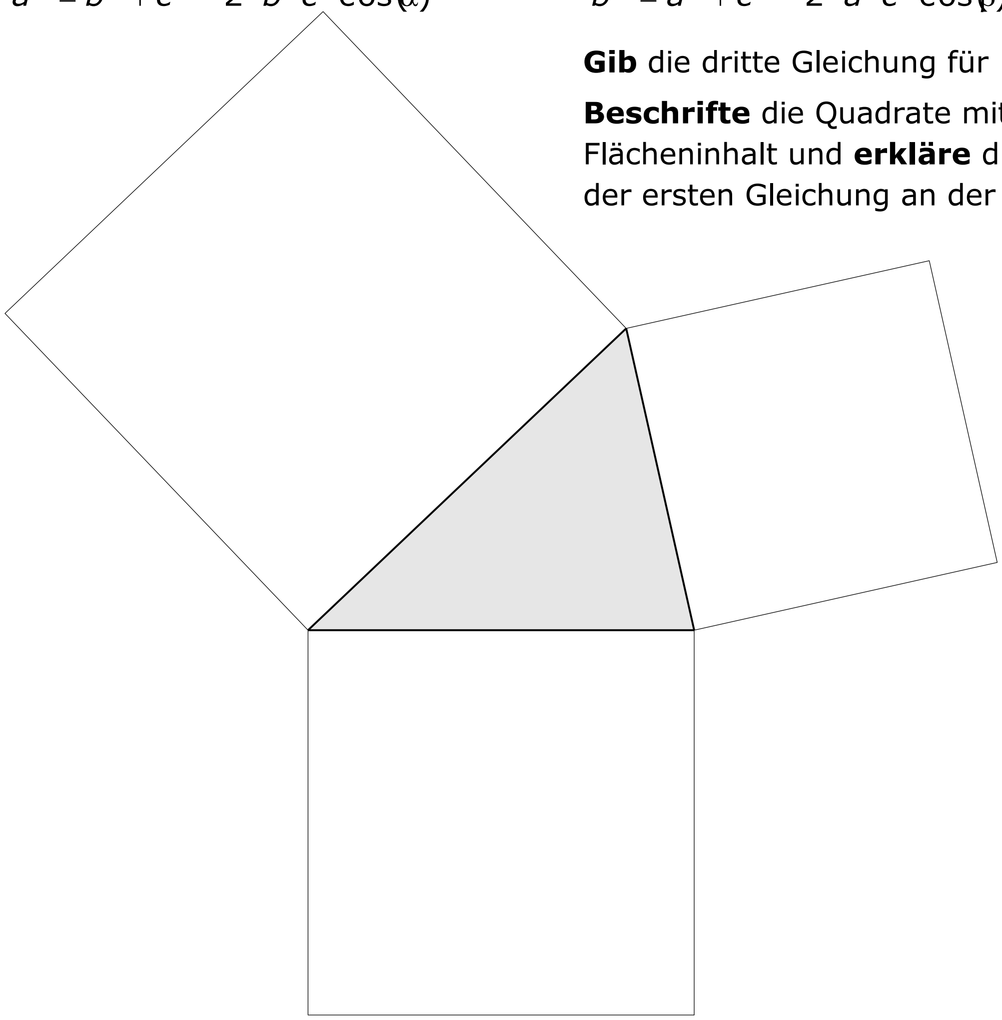
Gib an, wie man den Dreieckstyp aus dem zweiten Vergleich bestimmen kann.

c) **Setze** in eine der Gleichungen die Maße aus **a) ein**, **gib** alle Zwischenergebnisse **an** und **weise rechnerisch nach**, dass die Gleichung erfüllt ist.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$ $\qquad$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

Gib die dritte Gleichung für c^2 **an**.

Beschrifte die Quadrate mit ihrem Flächeninhalt und **erkläre** die Bedeutung der ersten Gleichung an der Abbildung.



Lösungen 16.09. Der Kosinussatz

a) Das Dreieck ABC hat folgende Maße:

$a = 4{,}1$ cm

$b = 5{,}8$ cm

$c = 5{,}1$ cm

$\alpha \approx 43{,}6028189727036°$

$\beta \approx 77{,}3196165081802°$

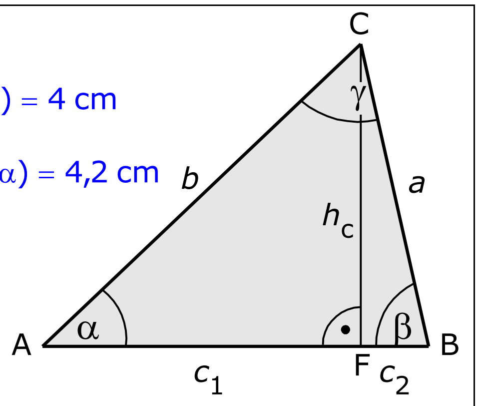
$\gamma \approx 59{,}0775645191162°$

$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin(\alpha) = 4$ cm

$\cos(\alpha) = \frac{c_1}{b} \Rightarrow c_1 = b \cdot \cos(\alpha) = 4{,}2$ cm

$c = c_1 + c_2 \Rightarrow$

$c_2 = c - c_1 = 0{,}9$ cm



Berechne c_1, c_2 und h_c. siehe Abbildung

b) **Setze** die Maße aus **a) ein** und **vergleiche** $a^2 + b^2$ mit c^2.

$a^2 + b^2 = 4{,}1^2 + 5{,}8^2 = 16{,}81 + 33{,}64 = 50{,}45 \quad < \quad c^2 = 5{,}1^2 = 26{,}01$

Gib an, welches Ergebnis ein Vergleich von $a^2 + c^2$ mit b^2 ergibt.

Auch hier ist die Quadratesumme größer als das einzelne Quadrat.

Gib an, wie man den Dreieckstyp aus dem zweiten Vergleich bestimmen kann.

Ich vergleiche das Quadrat der längsten Seite mit der Quadratesumme der beiden anderen Seitenlängen, hier also $a^2 + c^2$ mit b^2.

- Wenn die Quadratesumme und das Quadrat der längsten Seite gleich sind, also $a^2 + c^2 = b^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig.
- Wenn die Quadratesumme größer ist („überschüssig") als das Quadrat der längsten Seite, also $a^2 + c^2 > b^2$, dann ist das Dreieck spitzwinklig.
- Wenn die Quadratesumme kleiner ist („unterschüssig") als das Quadrat der längsten Seite, also $a^2 + c^2 < b^2$, dann ist das Dreieck stumpfwinklig.

Ob ein gleichseitiges bzw. ein gleichschenkliges Dreieck vorliegt, lässt sich ohne Rechnung direkt aus den drei Seitenlängen ablesen.

c) *siehe nächste Seite*

Lösungen 16.09. Der Kosinussatz

a) Das Dreieck ABC hat folgende Maße:

$a = 4{,}1$ cm

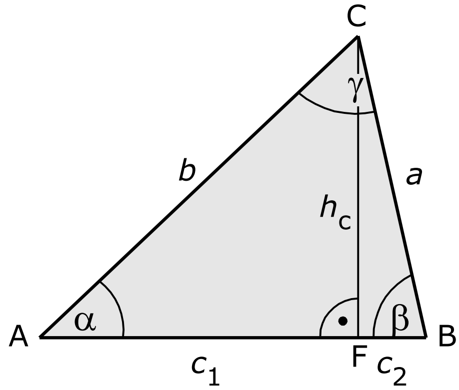
$b = 5{,}8$ cm

$c = 5{,}1$ cm

$\alpha \approx 43{,}6028189727036°$

$\beta \approx 77{,}3196165081802°$

$\gamma \approx 59{,}0775645191162°$



Berechne c_1, c_2 und h_c. siehe Abbildung

c) **Setze** in eine der Gleichungen die Maße aus **a) ein**, **gib** alle Zwischenergebnisse **an** und **weise rechnerisch nach**, dass die Gleichung erfüllt ist.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$4{,}1^2 = 5{,}8^2 + 5{,}1^2 - 2 \cdot 5{,}8 \cdot 5{,}1 \cdot \frac{4{,}2}{5{,}8}$

$16{,}81 = 33{,}64 + 26{,}01 - 42{,}84 = 16{,}81$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

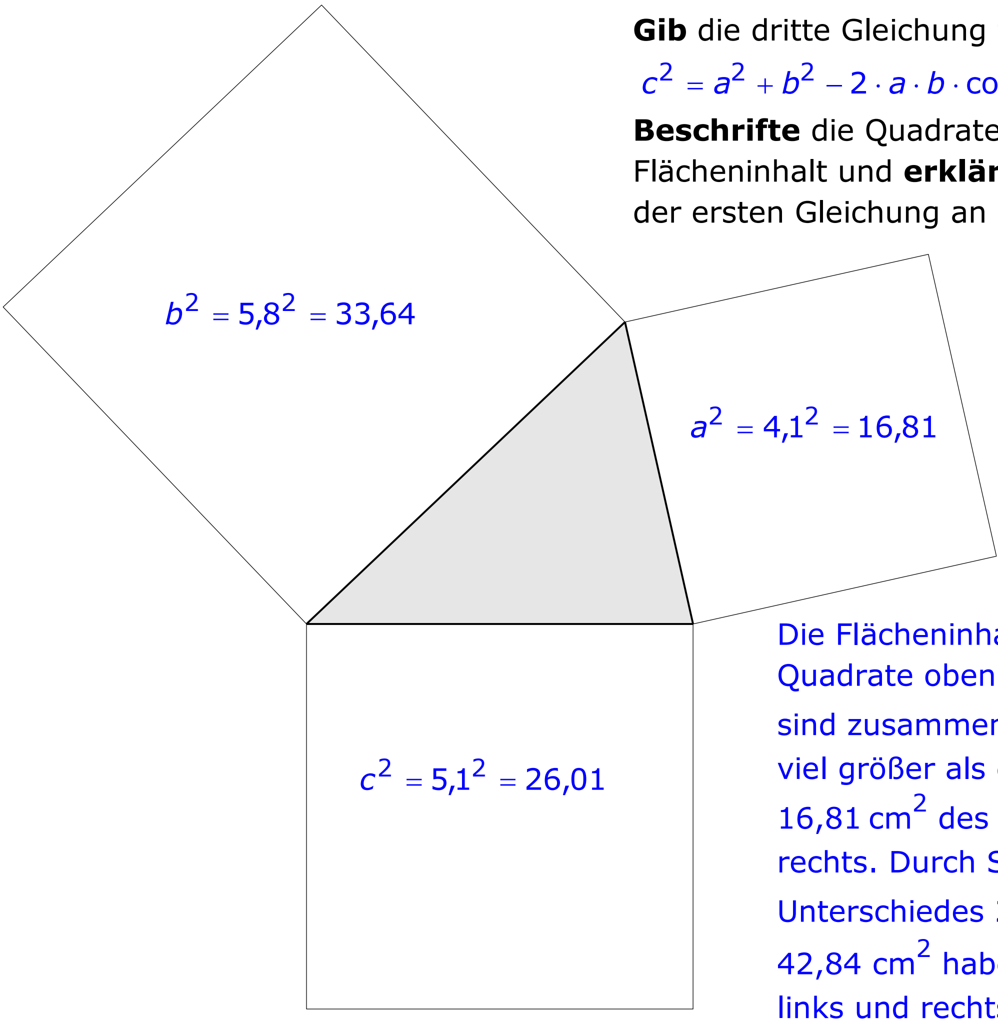
$5{,}8^2 = 4{,}1^2 + 5{,}1^2 - 2 \cdot 4{,}1 \cdot 5{,}1 \cdot \frac{0{,}9}{4{,}1}$

$33{,}64 = 16{,}81 + 26{,}01 - 9{,}18 = 33{,}64$

Gib die dritte Gleichung für c^2 **an**.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

Beschrifte die Quadrate mit ihrem Flächeninhalt und **erkläre** die Bedeutung der ersten Gleichung an der Abbildung.



Die Flächeninhalte der beiden Quadrate oben links und unten sind zusammen mit 59,65 cm² viel größer als der Flächeninhalt 16,81 cm² des Quadrats oben rechts. Durch Subtrahieren des Unterschiedes $2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$ = 42,84 cm² haben die Terme links und rechts den gleichen Wert.