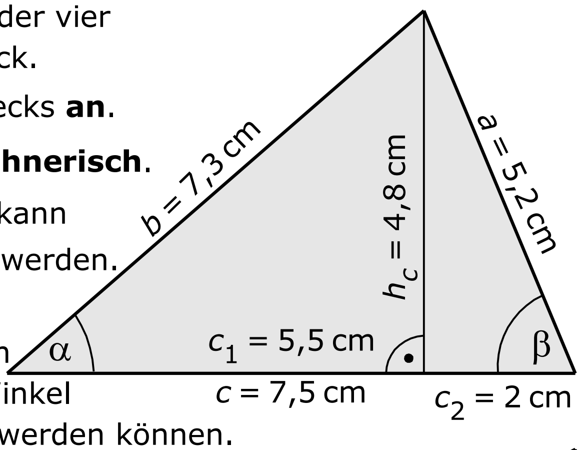
MATHE 364

14.09. Sinussatz und Projektionssatz für stumpfe Winkel

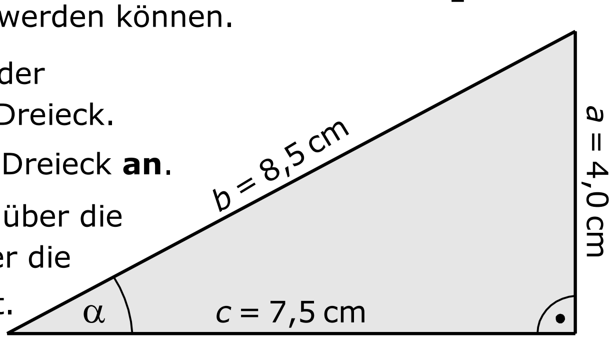
a) **Wahlaufgabe**: Bearbeite *eine* der vier Teilaufgaben zum oberen Dreieck.

- **Gib** den Flächeninhalt des Dreiecks **an**.
- **Bestimme** den Wert von α **rechnerisch**.
- **Begründe**: Mit dem Sinussatz kann der Wert von α nicht bestimmt werden.
- **Gib** die Bestimmungsstücke (Kongruenzsätze) **an**, bei denen die unbekannten Längen und Winkel mit dem Sinussatz rechnerisch werden können.



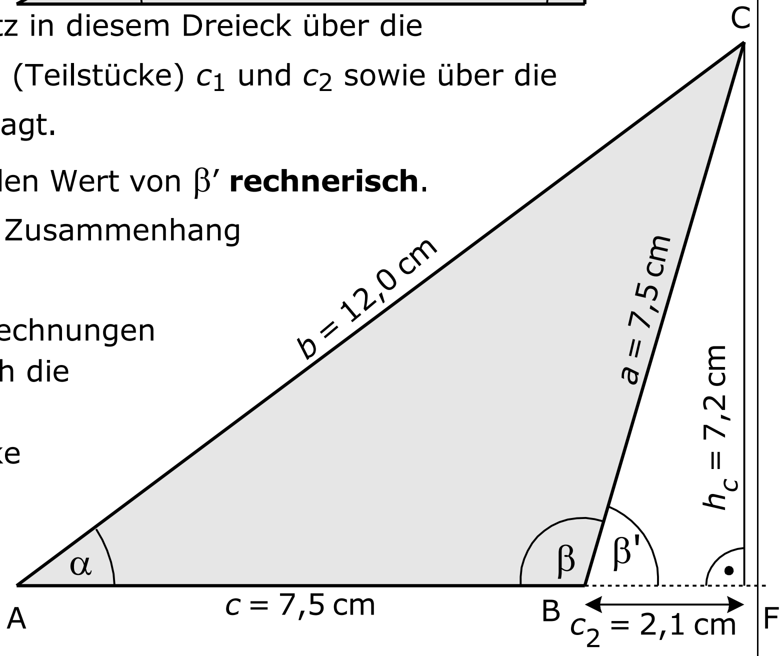
b) **Wahlaufgabe**: Bearbeite *eine* der drei Teilaufgaben zum zweiten Dreieck.

- **Gib** den Wert von h_c in diesem Dreieck **an**.
- **Gib an**, was der Sinussatz hier über die Seitenlängen a und b sowie über die Sinuswerte von α und β aussagt.
- **Gib an**, was der Projektionssatz in diesem Dreieck über die Seitenlänge c, die Projektionen (Teilstücke) c_1 und c_2 sowie über die Kosinuswerte von α und β aussagt.



c) **Bestimme** im dritten Dreieck den Wert von β' **rechnerisch**.
Gib den Wert von β sowie den Zusammenhang zwischen β und β' **an**.

d) **Ergänze** *in einer* der beiden Rechnungen die Lücken und **gib an**, wie sich die Rechnungen für spitzwinklige und für stumpfwinklige Dreiecke unterscheiden.



- Auszug aus dem Beweis des Sinussatzes

  Δ AFC: $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$

  Δ BFC: $h_c = a \cdot \sin(\beta')$

  $h_c = a \cdot \sin(\_\_\_\_\_) = a \cdot \sin(\beta)$

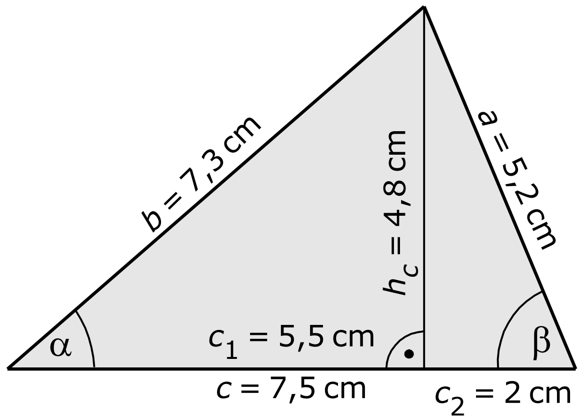
- Auszug aus dem Beweis des Projektionssatzes

  Δ AFC: $c_1 = b \cdot \cos(\alpha)$

  Δ BFC: $c_2 = a \cdot \cos(\beta') = a \cdot \cos(\_\_\_\_\_) = \_\_\_ a \cdot \cos(\beta)$ $\quad c = c_1 + c_2 = c_1 \_\_\_\_\_\_\_$

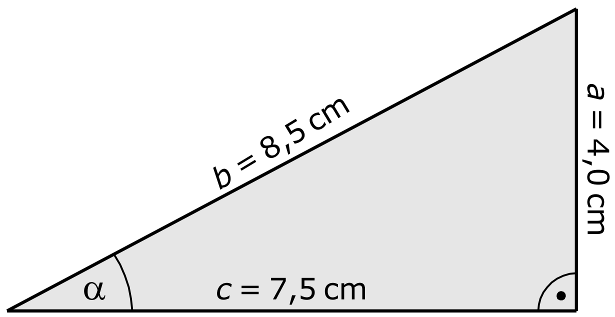
Lösungen 14.09. Sinussatz und Projektionssatz für stumpfe Winkel

a)



- **Gib** den Flächeninhalt des Dreiecks **an**. $A = 18\text{ cm}^2$ $A = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 4{,}8 = 18$
- **Bestimme** den Wert von α **rechnerisch**. $\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} = \frac{4{,}8}{7{,}3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 41{,}1121°$
- **Begründe**: Mit dem Sinussatz kann der Wert von α nicht bestimmt werden.
  $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Die Seitenlängen a, b und c sind bekannt. Um die Gleichung nach $\sin(\alpha)$ auflösen zu können, muss aber ein zweiter Sinuswert bekannt sein, also $\sin(\alpha)$ oder $\sin(\alpha)$.
- **Gib** die Bestimmungsstücke (Kongruenzsätze) **an**, bei denen die unbekannten Längen und Winkel mit dem Sinussatz rechnerisch werden können.
  z. B. α, c und γ (WSW) bzw. α, c und γ (WWS) oder b, c und β (SSW)

b)



- **Gib** den Wert von h_c in diesem Dreieck **an**. $h_c = a = 4$ cm
- **Gib an**, was der Sinussatz hier über die Seitenlängen a und b sowie über die Sinuswerte von α und β aussagt. $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{b}{\sin(90°)} = \frac{b}{1} = b$ Da $\sin(90°) = 1$, ist diese Gleichung äquivalent zur Definition $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$ des „normalen" Sinus im rechtwinkligen Dreieck.
- **Gib an**, was der Projektionssatz in diesem Dreieck über die Seitenlänge c, die Projektionen (Teilstücke) c_1 und c_2 sowie über die Kosinuswerte von α und β aussagt. $c = c_1 + c_2 = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\beta) = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(90°) = b \cdot \cos(\alpha) + 0$

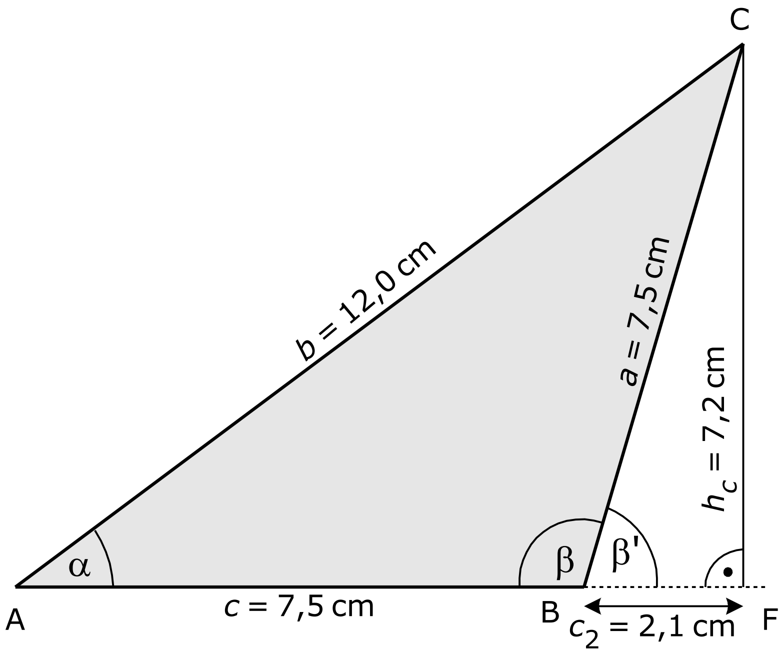
  Da $\cos(90°) = 0$, ist diese Gleichung äquivalent zur Definition $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$ des „normalen" Sinus im rechtwinkligen Dreieck.

c) **Bestimme** im dritten Dreieck den Wert von β' **rechnerisch**.

Dreieck BFC: $\sin(\beta') = \frac{h_c}{a} = \frac{7{,}2}{7{,}5} = 0{,}96 \quad \Rightarrow \quad \beta' \approx 73{,}7398°$

Gib den Wert von β sowie den Zusammenhang zwischen β und β' **an**.

$\beta + \beta' = 180°$ bzw. $\beta' = 180° - \beta$



d) **Ergänze** *in einer* der beiden Rechnungen die Lücken und **gib an**, wie sich die Rechnungen für spitzwinklige und für stumpfwinklige Dreiecke unterscheiden.

- Auszug aus dem Beweis des Sinussatzes

Δ AFC: $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$

Δ BFC: $h_c = a \cdot \sin(\beta')$

$h_c = a \cdot \sin(\underline{180° - \beta'}) = a \cdot \sin(\beta)$

Da β und β' sich zu 180° ergänzen, sind ihre Sinuswerte gleich groß.

- Auszug aus dem Beweis des Projektionssatzes

Δ AFC: $c_1 = b \cdot \cos(\alpha) = 8{,}6\ \text{cm}$

Δ BFC: $c_2 = a \cdot \cos(\beta') = a \cdot \cos(\underline{180° - \beta'}) = \underline{-1} \cdot a \cdot \cos(\beta) = -2{,}1\ \text{cm}$

$c = c_1 + c_2 = c_1 \underline{+ (-1) \cdot a \cdot \cos(\beta)}$

Die Gleichung $c = c_1 + c_2$ gilt weiterhin. Da β und β' sich zu 180° ergänzen, sind ihre Kosinuswerte Zahl und Gegenzahl. Der Term für c_1 ergibt 9,6 cm. Addiert man den Term für c_2, also −2,1 cm, ergibt sich die Seitenlänge c = 7,5 cm.