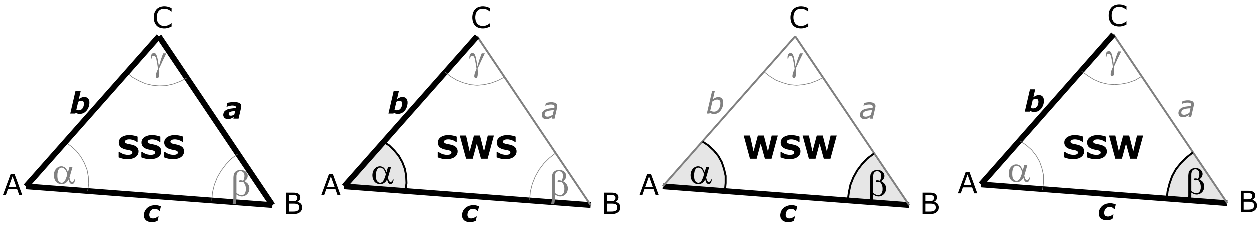
MATHE 364

13.09. trigonometrische Berechnungen mit dem Sinussatz

Die Abbildung zeigt die vier Fälle, in denen ein Dreieck aus drei Bestimmungsstücken konstruiert werden kann.



a) **Konstruiere** ein Dreieck aus $b = 13$ cm, $c = 15$ cm und $\beta = 60°$. **Gib an**, zu welchem der vier Kongruenzsätze diese drei Bestimmungsstücke gehören. Verwende für die Zeichnung die vorhandene Strecke $\overline{AB}$.

A $\qquad c = 15$ cm $\qquad$ B

b) **Berechne** aus den drei gegebenen Bestimmungsstücken die fehlenden Längen und Winkel des Dreiecks. **Überprüfe** deine Rechenergebnisse durch Nachmessen an der Zeichnung.

c) In Aufgabe **b)** kann mit dem Sinussatz aus b, β und c deshalb die Winkelgröße γ berechnet werden, weil die Länge c der Seite $\overline{AB}$ bekannt ist und der Winkel dieser Seite gegenüberliegt.

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b}$$

Bei WSW sind zwei Winkel bekannt sowie die Länge der Seite, an der die Winkel anliegen, z. B. $\alpha = 30°$, $c = 10$ cm und $\beta = 60°$. Mit dem Sinussatz könnten die beiden anderen Seitenlängen berechnet werden, wenn die Größe γ des gegenüberliegenden Winkels bekannt wäre.

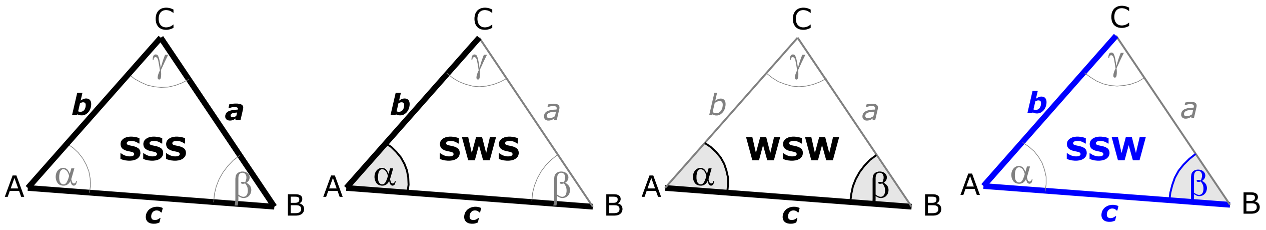
$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$
$$\Leftrightarrow \quad a = \sin(\alpha) \cdot \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Berechne γ, a und b aus $\alpha = 30°$, $c = 10$ cm und $\beta = 60°$.

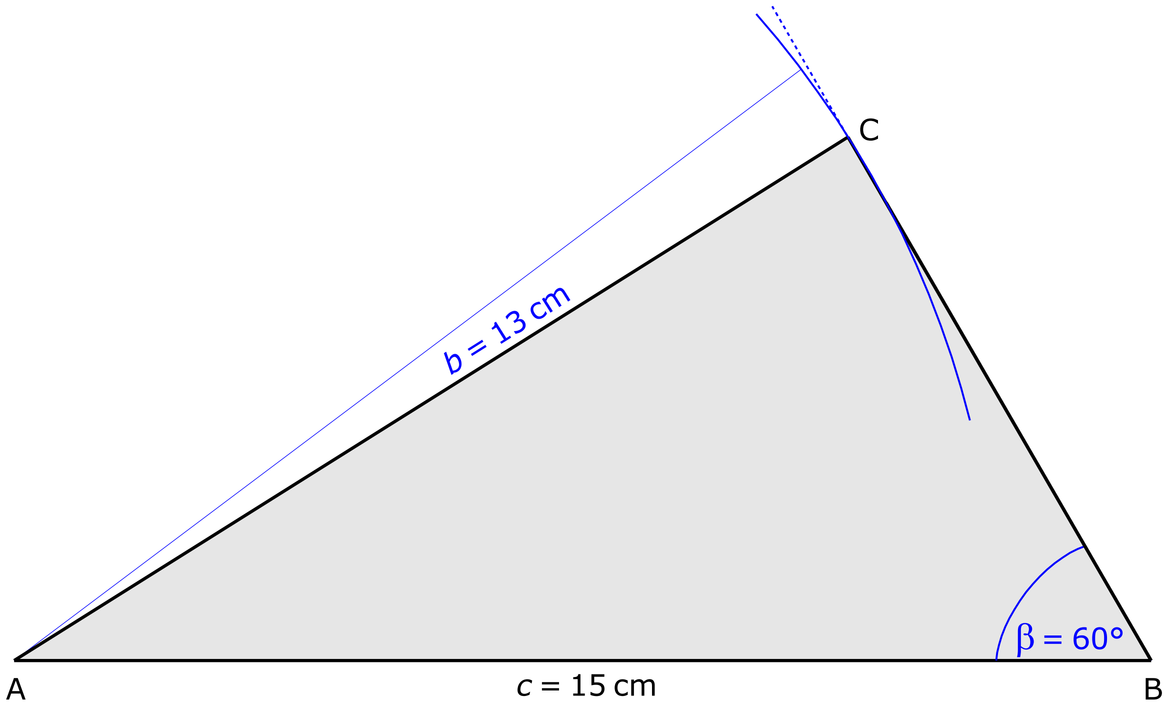
MATHE 364

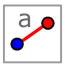
Lösungen 13.09. trigonometrische Berechnungen mit dem Sinussatz

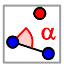
Die Abbildung zeigt die vier Fälle, in denen ein Dreieck aus drei Bestimmungsstücken konstruiert werden kann.

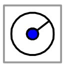


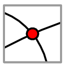
a) Konstruiere ein Dreieck aus $b = 13$ cm, $c = 15$ cm und $\beta = 60°$. **Gib an**, zu welchem der vier Kongruenzsätze diese drei Bestimmungsstücke gehören. SSW
Verwende für die Zeichnung die vorhandene Strecke $\overline{AB}$.

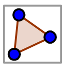



Strecke AB der Länge $c = 15$ cm


Trage im Punkt B einen Winkel der Größe 60° im Uhrzeigersinn an.


Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $b = 13$ cm


Der Schnittpunkt des Kreises mit dem Schenkel des Winkels, der in B angetragen wurde, ist C.

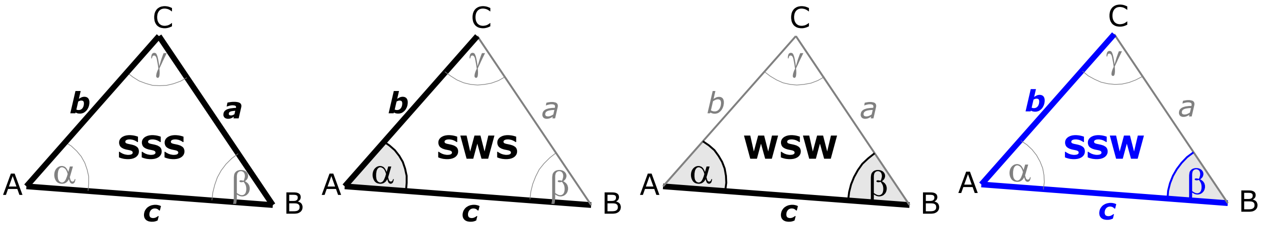

Dreieck ABC

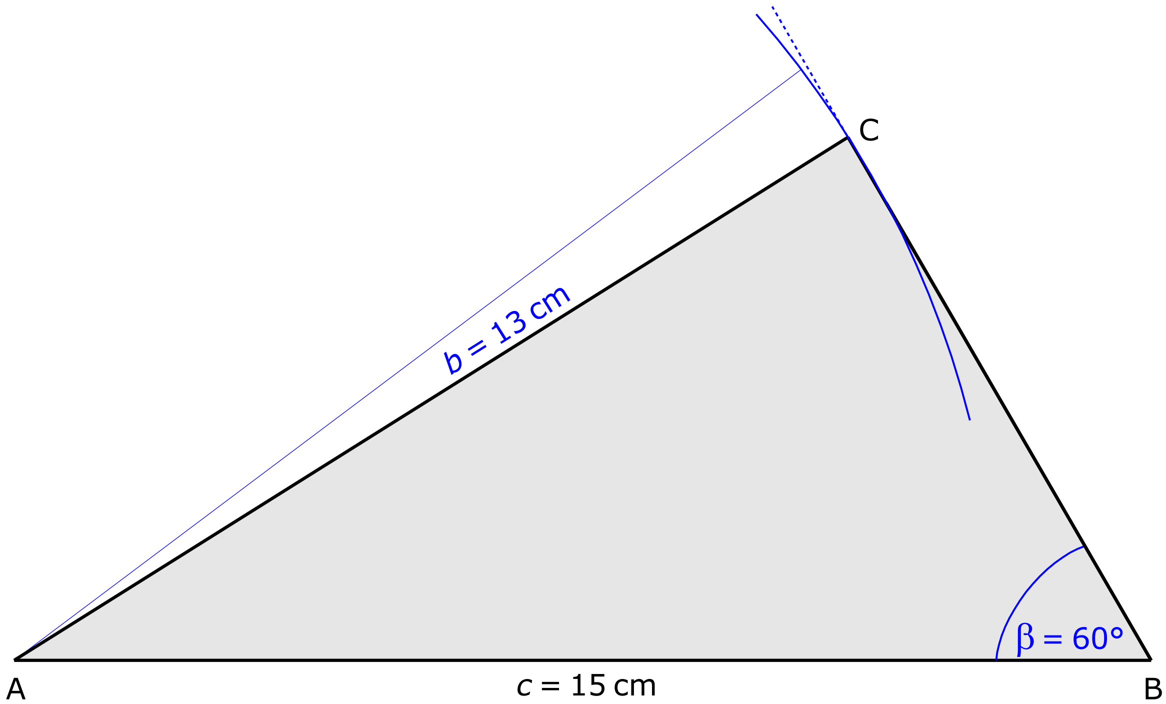
b) *siehe nächste Seite*

MATHE 364

Lösungen 13.09. **trigonometrische Berechnungen mit dem Sinussatz**

Die Abbildung zeigt die vier Fälle, in denen ein Dreieck aus drei Bestimmungsstücken konstruiert werden kann.





b) **Berechne** aus den drei gegebenen Bestimmungsstücken die fehlenden Längen und Winkel des Dreiecks. **Überprüfe** deine Rechenergebnisse durch Nachmessen an der Zeichnung. √

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\gamma) = 15 \cdot \frac{\sin(60^\circ)}{13} \approx 0{,}99926\ldots \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 87{,}7958^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta \approx 32{,}2042^\circ$$

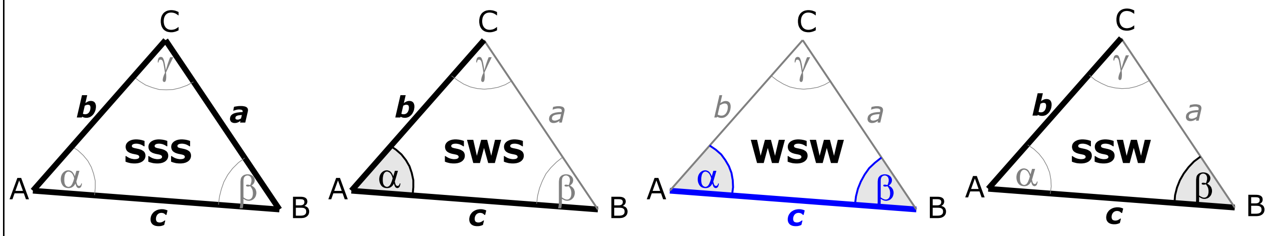
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \sin(\alpha) \cdot \frac{b}{\sin(\beta)} \qquad a = \sin(32{,}2042^\circ) \cdot \frac{13}{\sin(60^\circ)} = 8$$

c) *siehe nächste Seite*

Lösungen 13.09. trigonometrische Berechnungen mit dem Sinussatz

Die Abbildung zeigt die vier Fälle, in denen ein Dreieck aus drei Bestimmungsstücken konstruiert werden kann.



c) In Aufgabe **b)** kann mit dem Sinussatz aus b, β und c deshalb die Winkelgröße γ berechnet werden, weil die Länge c der Seite $\overline{AB}$ bekannt ist und der Winkel dieser Seite gegenüberliegt.

Bei WSW sind zwei Winkel bekannt sowie die Länge der Seite, an der die Winkel anliegen, z. B. $\alpha = 30°$, $c = 10$ cm und $\beta = 60°$. Mit dem Sinussatz könnten die beiden anderen Seitenlängen berechnet werden, wenn die Größe γ des gegenüberliegenden Winkels bekannt wäre.

Berechne γ, a und b aus $\alpha = 30°$, $c = 10$ cm und $\beta = 60°$.

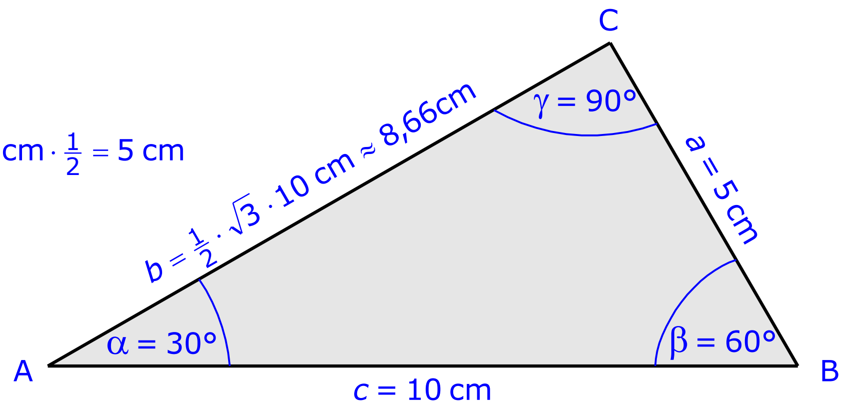
Winkelsumme im Dreieck: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 30° - 60° = 90°$

Lösungsweg 1: *Das Dreieck ist rechtwinklig. Es kann der „normale" Sinus bzw. Kosinus im rechtwinkligen Dreieck verwendet werden.*

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = c \cdot \sin(\alpha)$$

$$a = 10\text{ cm} \cdot \sin(30°) = 10\text{ cm} \cdot \tfrac{1}{2} = 5\text{ cm}$$



$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b = 10\text{ cm} \cdot \cos(30°) = 10\text{ cm} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 8{,}66\text{ cm}$$

Lösungsweg 2: *Auch in einem rechtwinkligen Dreieck gilt der Sinussatz. Die Rechnung ist nur etwas umständlicher als mit dem „normalen" Sinus, aber lehrreich: Man lernt, dass in diesem Sonderfall Sinus von 90° gleich 1 ist.*

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \qquad\qquad \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \sin(\beta) \cdot \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad a = \sin(\alpha) \cdot \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$b = \sin(60°) \cdot \frac{10\text{ cm}}{\sin(90°)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{10\text{ cm}}{1} \approx 8{,}66\text{ cm} \qquad a = \sin(30°) \cdot \frac{10\text{ cm}}{\sin(90°)} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{10\text{ cm}}{1} = 5\text{ cm}$$