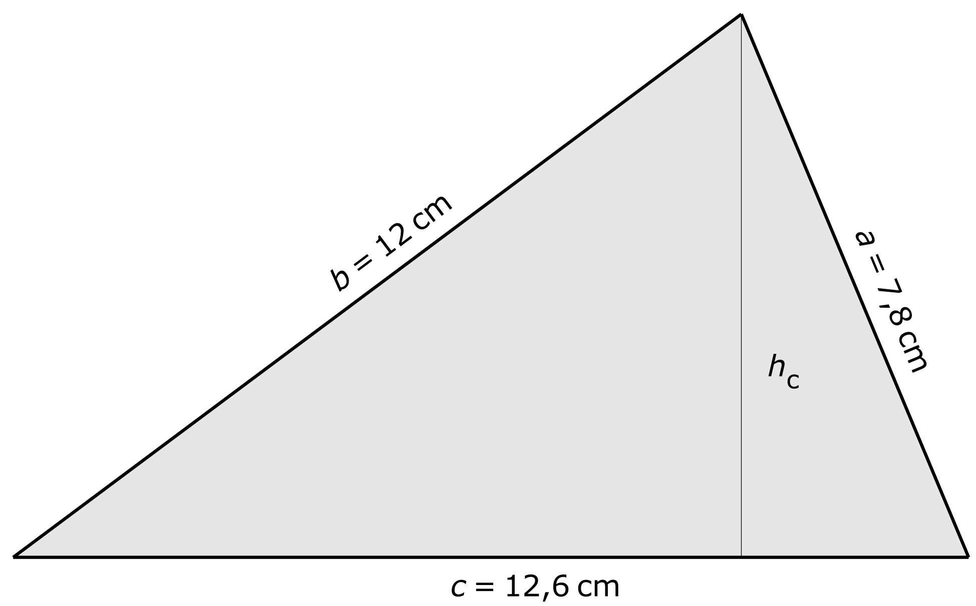
MATHE 364

## 19.09. Umkreis-Sinussatz und Flächen-Sinussatz




**a)** **Bestimme** die Länge $h_c$ durch Messen.
**Berechne** mit Hilfe dieser Länge den Flächeninhalt des Dreiecks.

**b)** **Berechne** die Winkelgrößen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$.

**c)** **Konstruiere** den Umkreis des Dreiecks.

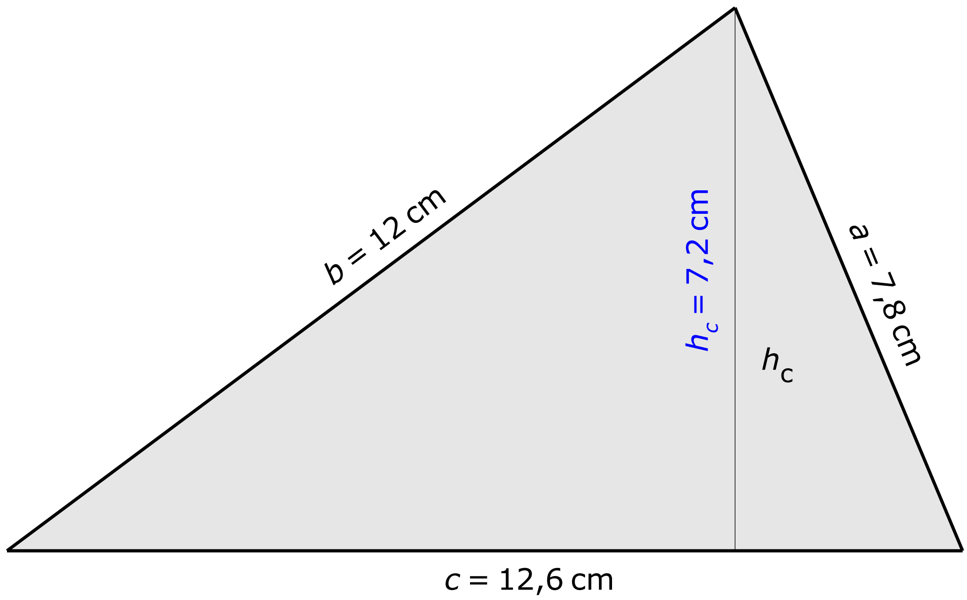
**d)** Der Sinussatz lautet bekanntlich $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Laut dieser Gleichung haben alle drei Quotienten den gleichen Wert, der eine Bedeutung für das Dreieck hat: Es ist der Durchmesser des Umkreises.

Aus dem Sinussatz lässt sich der Flächen-Sinussatz herleiten:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$.

**Berechne** den Umkreisdurchmesser sowie den Flächeninhalt des Dreiecks. **Überprüfe** mit diesen Werten dein Rechenergebnis aus **a)** und deine Zeichnung aus **b)**.

## Lösungen 19.09. Umkreis-Sinussatz und Flächen-Sinussatz




**a)** **Bestimme** die Länge $h_c$ durch Messen. $h_c = 7{,}2$ cm

**Berechne** mit Hilfe dieser Länge den Flächeninhalt des Dreiecks.

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 12{,}6 \text{ cm} \cdot 7{,}2 \text{ cm} = 45{,}36 \text{ cm}^2$

**b)** **Berechne** die Winkelgrößen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \left| -a^2 - b^2 \right.$$

$$\Leftrightarrow c^2 - a^2 - b^2 = -2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \left| \cdot (-1) \right.$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \left| : (2 \cdot a \cdot b) \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \cos(\gamma)$$

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{7{,}8^2 + 12^2 - 12{,}6^2}{2 \cdot 7{,}8 \cdot 12} = \frac{60{,}84 + 144 - 158{,}76}{187{,}2} = 0{,}2461\ldots \quad \Rightarrow \quad \gamma = 75{,}7500°$$

$$\sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} = 12 \cdot \frac{\sin(75{,}7500°)}{12{,}6} \approx 0{,}9231 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 67{,}3801°$$

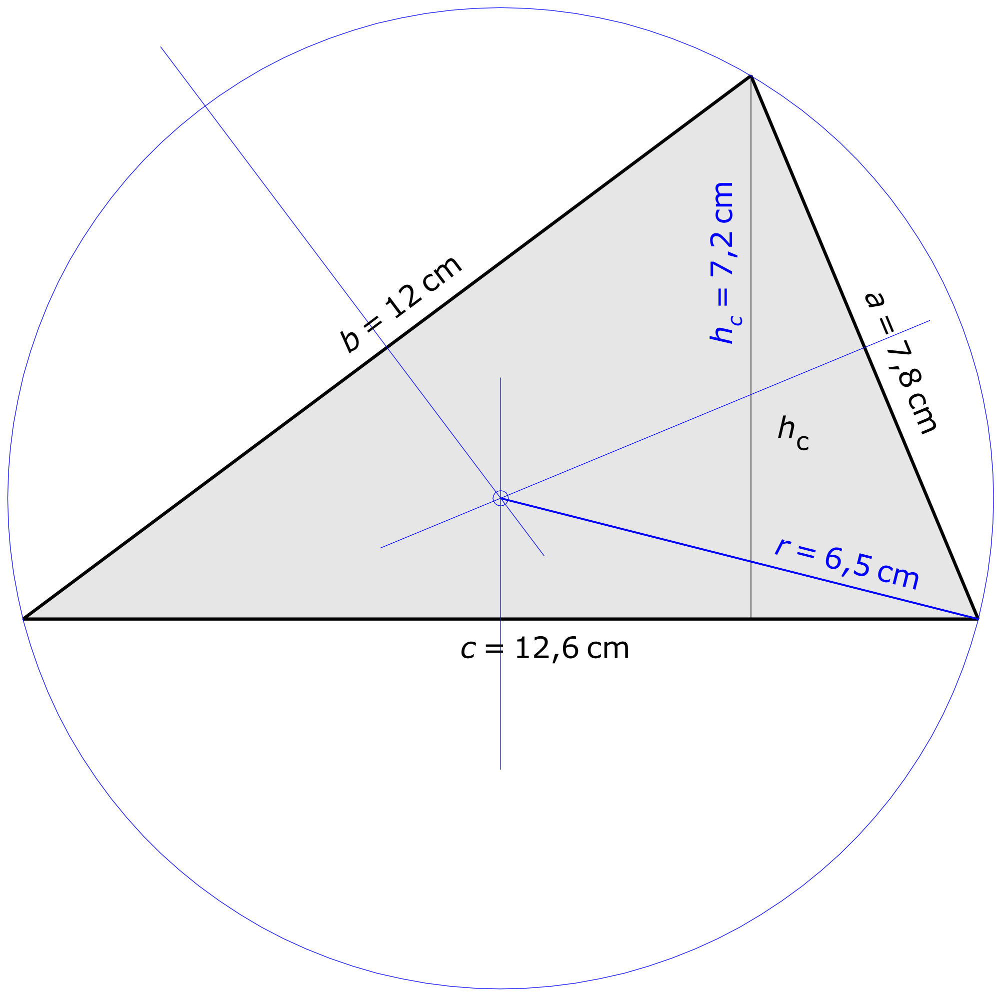
$$\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 36{,}8699°$$

**Alternative**: Mit Hilfe der Höhe über den „normalen" Sinus im rechtwinkligen Dreieck $\alpha$ und $\beta$ berechnen. Das ist bei diesem Dreieck gut möglich, weil die Länge $h_c$ einen ganzzahligen Wert hat, der auf Millimeter genau gemessen werden kann.

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} = \frac{7{,}2}{12} = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}8699°$$

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} = \frac{7{,}2}{7{,}8} \approx 0{,}9231 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 67{,}3801° \qquad \gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 75{,}7500°$$

# Lösungen 19.09. Umkreis-Sinussatz und Flächen-Sinussatz




**c) Konstruiere** den Umkreis des Dreiecks. siehe Abbildung: Mittelsenkrechte zu jeder der drei Seiten konstruieren; der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises; Kreis mit diesem Mittelpunkt, der durch einen der drei Eckpunkte geht.

**d)** Der Sinussatz lautet bekanntlich $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Laut dieser Gleichung haben alle drei Quotienten den gleichen Wert, der eine Bedeutung für das Dreieck hat: Es ist der Durchmesser des Umkreises.

Aus dem Sinussatz lässt sich der Flächen-Sinussatz herleiten:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$.

**Berechne** den Umkreisdurchmesser sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{7{,}8}{\sin(36{,}689\ldots^\circ)} = \frac{12}{\sin(67{,}380\ldots^\circ)} = \frac{12{,}6}{\sin(75{,}749\ldots^\circ)} = 13$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7{,}8 \cdot 12 \cdot \sin(75{,}749\ldots^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 7{,}8 \cdot 12{,}6 \cdot \sin(67{,}380\ldots^\circ) =$$
$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12{,}6 \cdot \sin(36{,}689\ldots^\circ) = 45{,}36$$

**Überprüfe** mit diesen Werten dein Rechenergebnis und deine Zeichnung. √