MATHE 364

17.09. Kosinussatz, Sinussatz und die Kongruenzsätze

A B

a) **Konstruiere** ein Dreieck aus $a = 7\,\text{cm}$, $b = 15\,\text{cm}$, $c = 13\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$.

b) Aus Kongruenzsätzen SSS, SWS, WSW, SsW folgt, aus welchen Bestimmungsstücken ein Dreieck konstruiert werden kann. Dieses Dreieck ist dann zu jedem anderen Dreieck mit den gleichen Seitenlängen und Winkeln kongruent.

Gib an, welche Bestimmungsstücke du für deine Konstruktion ausgewählt hast und zu welchem Kongruenzsatz diese Auswahl von Bestimmungsstücken gehört.

Markiere diejenigen Kongruenzsätze, die bei den oben gegebenen Maßen angewendet werden können.

c) **Berechne** α oder β mit dem Sinussatz. **Gib** die Formulierung des Kosinussatzes **an**, mit der die gleiche Winkelgröße berechnet werden kann.

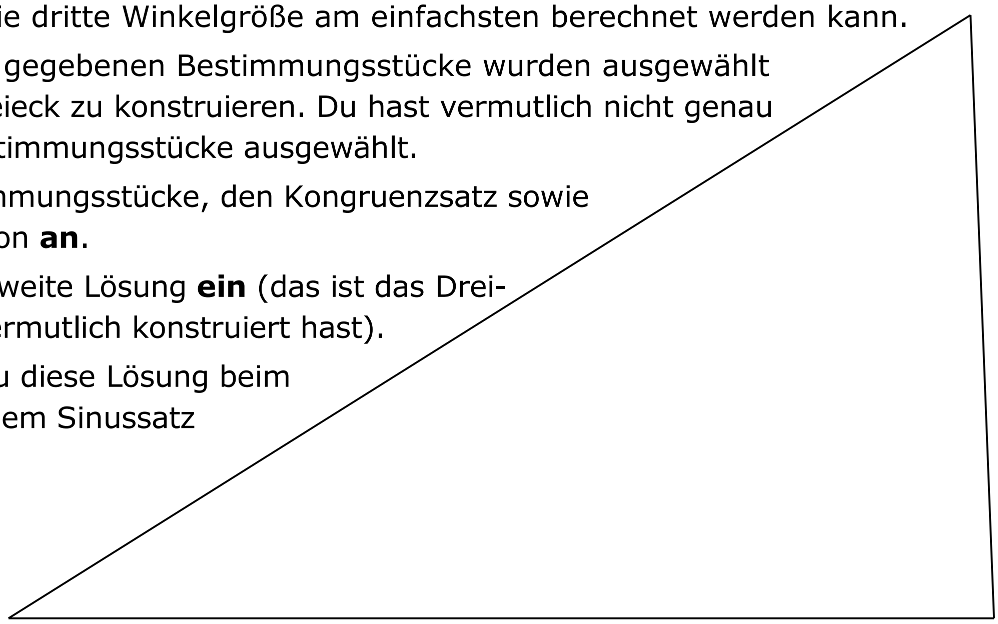
Gib an, wie die dritte Winkelgröße am einfachsten berechnet werden kann.

d) Drei der oben gegebenen Bestimmungsstücke wurden ausgewählt um dieses Dreieck zu konstruieren. Du hast vermutlich nicht genau diese drei Bestimmungsstücke ausgewählt.

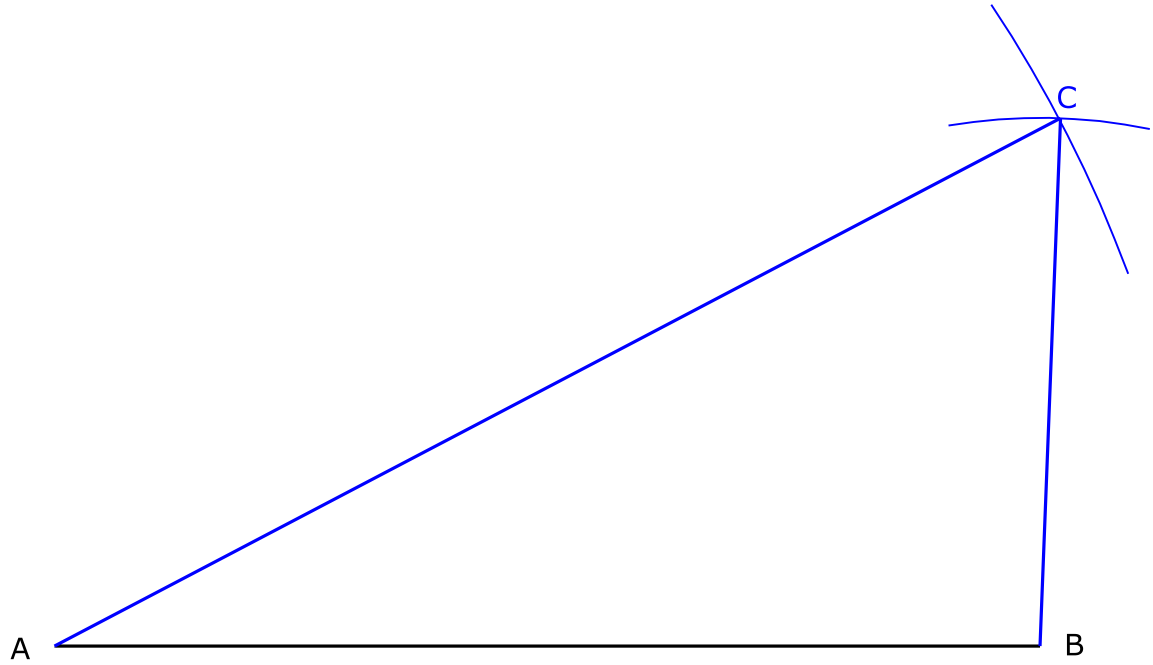
Gib die Bestimmungsstücke, den Kongruenzsatz sowie die Konstruktion **an**.

Zeichne die zweite Lösung **ein** (das ist das Dreieck, das du vermutlich konstruiert hast).

Gib an, wie du diese Lösung beim Rechnen mit dem Sinussatz finden kannst.



Lösungen 17.09. **Kosinussatz, Sinussatz und die Kongruenzsätze**



a) **Konstruiere** ein Dreieck aus $a = 7$ cm, $b = 15$ cm, $c = 13$ cm und $\gamma = 60°$. s. o.

b) Aus Kongruenzsätzen SSS, SWS, WSW, SsW folgt, aus welchen Bestimmungsstücken ein Dreieck konstruiert werden kann. Dieses Dreieck ist dann zu jedem anderen Dreieck mit den gleichen Seitenlängen und Winkeln kongruent.

Gib an, welche Bestimmungsstücke du für deine Konstruktion ausgewählt hast und zu welchem Kongruenzsatz diese Auswahl von Bestimmungsstücken gehört.

individuelle Lösungen, möglich sind a, b, c (SSS) oder a, b, γ (SWS) oder a, c, γ (SsW) oder b, c, γ (sSW, zwei Lösungen, siehe **d)**)

Markiere diejenigen Kongruenzsätze, die bei den oben gegebenen Maßen angewendet werden können. siehe gelbe Markierung. WSW ist nicht möglich, da nur ein Winkel bekannt ist.

c) **Berechne** α oder β mit dem Sinussatz. **Gib** die Formulierung des Kosinussatzes **an**, mit der die gleiche Winkelgröße berechnet werden kann. z. B. für α

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{7 \cdot \sin(60°)}{13} = \frac{7}{26} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}4663 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 27{,}795772496028°$$

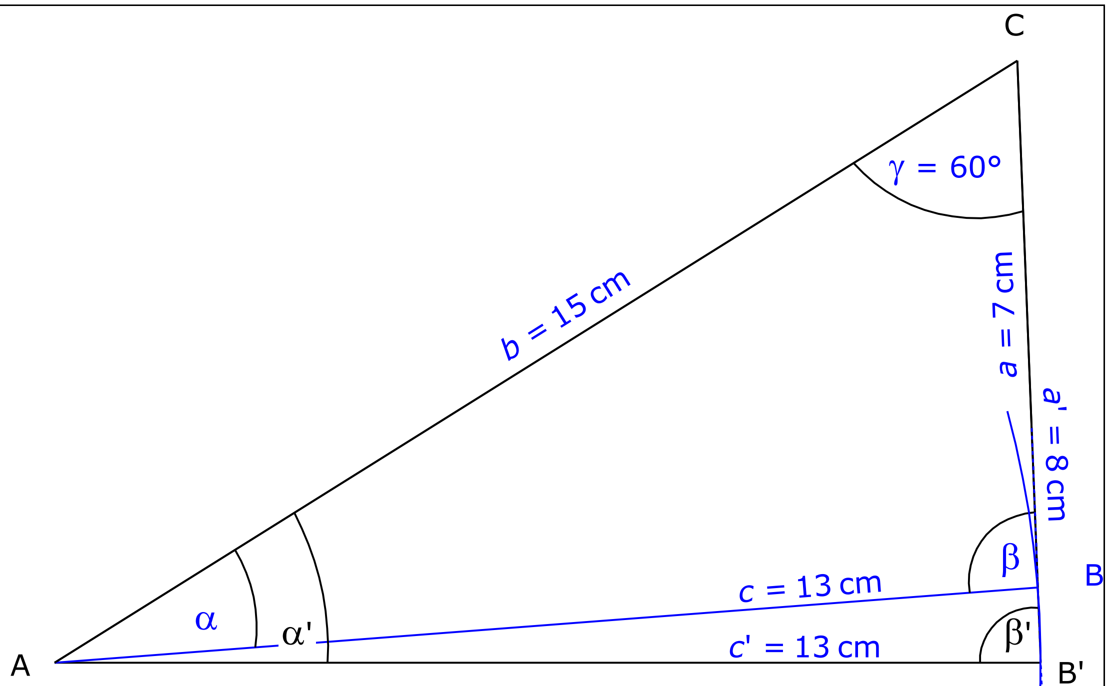
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

Hinweis: *Es ist schwieriger, den Kosinussatz nach α aufzulösen als den Sinussatz. Falls die drei Seitenlängen bekannt sind und kein Winkel, bleibt jedoch nur der Ansatz mit dem Kosinussatz.*

Gib an, wie die dritte Winkelgröße am einfachsten berechnet werden kann.

Aus der Winkelsumme im Dreieck: $\beta = 180° - \gamma - \alpha$

Lösungen 17.09. Kosinussatz, Sinussatz und die Kongruenzsätze

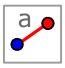


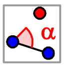
Drei der oben gegebenen Bestimmungsstücke wurden ausgewählt um dieses Dreieck zu konstruieren.

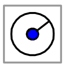
d) **Gib** die Bestimmungsstücke **an** b, c, γ

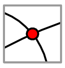
… den Kongruenzsatz sSW Diese Bezeichnung bedeutet, dass der gegebene Winkel der kürzeren Seite gegenüber liegt. Deshalb hat der Kreisbogen um den Punkt A mit 13 cm Radius zwei Schnittpunkte mit dem zweiten Schenkel des Winkel γ.

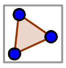
… die Konstruktion

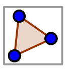
 Zeichne eine Strecke der Länge $b = 15$ cm, nenne die Endpunkte A und C.

 Trage im Punkt C einen Winkel der Größe $\gamma = 60°$ gegen den Uhrzeigersinn an.

 Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt A und dem Radius $c = 13$ cm.

 Die Schnittpunkte des Kreises mit dem zweiten Schenkel des Winkels sind B′ und B.

 Zeichne das Dreieck ABC.

 Zeichne das Dreieck AB′C.

Zeichne die zweite Lösung **ein** siehe Abbildung

Gib an, wie du diese Lösung beim Rechnen mit dem Sinussatz finden kannst.

Die beiden Winkel β und β′ ergänzen sich zu 180°.

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{15 \cdot \sin(60°)}{13} = \frac{15}{26} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}9993 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 27{,}795772496028°$$

$$\beta' = 180° - \beta \approx 87{,}795772496028°$$