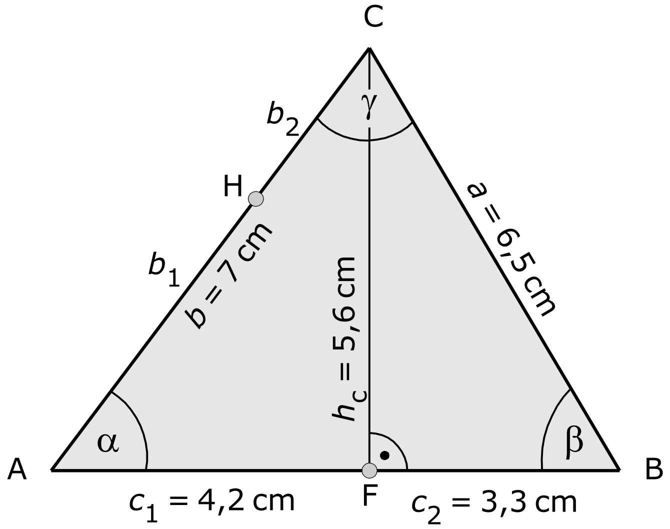
MATHE 364

09.09. Höhen und Projektionssatz

Die Abbildung zeigt das spitzwinklige Dreieck ABC. Es wird durch die eingezeichnete Höhe in die rechtwinkligen Teildreiecke AFC und FBC zerlegt.



a) **Wahlaufgabe**: Bearbeite *mindestens eine* der vier folgenden Aufgabenstellungen.

- **Gib** den Flächeninhalt des Dreiecks ABC **an**.
- **Gib** *mindestens zwei* der Terme für $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ oder $\cos(\beta)$ **an**.
- **Leite** *eine* der drei Gleichungen **her**:
  $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$, $h_c = a \cdot \sin(\beta)$ oder $c = c_1 + c_2 = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\beta)$.
- **Zeichne** die Strecke $\overline{HB}$ **ein**. Diese Strecke ist die Höhe zur Seite $\overline{AC}$.
  Bestimme die Länge $|HB| = h_b$ und **weise nach**, dass $\overline{HB}$ und $\overline{AC}$ senkrecht aufeinander stehen.

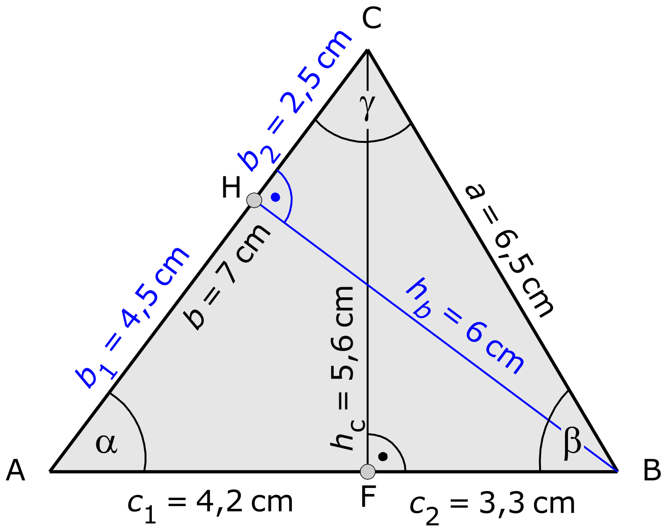
b) **Bestimme** die Winkelgrößen α, β und γ **rechnerisch**.

c) Vom Punkt H gehen die drei Strecken $\overline{HB}$, $\overline{HA}$ und $\overline{HC}$ aus. Die Strecke $\overline{HB}$ ist die Höhe zur Seite $\overline{AC}$, die anderen beiden Strecken führen vom Höhenfußpunkt H zum Anfangs- bzw. Endpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Die Längen dieser Strecken sind $|HA| = b_1$, $|HC| = b_2$ und $|HB| = h_b$.

Bestimme *mindestens zwei* der Längen h_b, b_1 und b_2 **rechnerisch**.

Lösungen 09.09. Höhen und Projektionssatz

Die Abbildung zeigt das spitzwinklige Dreieck ABC. Es wird durch die eingezeichnete Höhe in die rechtwinkligen Teildreiecke AFC und FBC zerlegt.



a) Wahlaufgabe: Bearbeite *mindestens eine* der vier folgenden Aufgabenstellungen.

- **Gib** den Flächeninhalt des Dreiecks ABC **an**. $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 5{,}6 = 21$
- **Gib** *mindestens zwei* der Terme für $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ oder $\cos(\beta)$ **an**.

$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} = \frac{5{,}6}{7}$ $\cos(\alpha) = \frac{c_1}{b} = \frac{4{,}2}{7}$ $\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} = \frac{5{,}6}{6{,}5}$ $\cos(\beta) = \frac{c_2}{a} = \frac{3{,}3}{6{,}5}$

- **Leite** *eine* der drei Gleichungen **her**:

$h_c = b \cdot \sin(\alpha)$, $h_c = a \cdot \sin(\beta)$ oder $c = c_1 + c_2 = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\beta)$.

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \quad \Big| \cdot b$$
$$\Leftrightarrow \quad b \cdot \sin(\alpha) = h_c$$

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \quad \Big| \cdot a$$
$$\Leftrightarrow \quad a \cdot \sin(\beta) = h_c$$

$$\cos(\alpha) = \frac{c_1}{b} \quad \Big| \cdot b$$
$$\Leftrightarrow \quad b \cdot \cos(\alpha) = c_1$$

$$\cos(\beta) = \frac{c_2}{a} \quad \Big| \cdot a$$
$$\Leftrightarrow \quad a \cdot \cos(\beta) = c_2$$

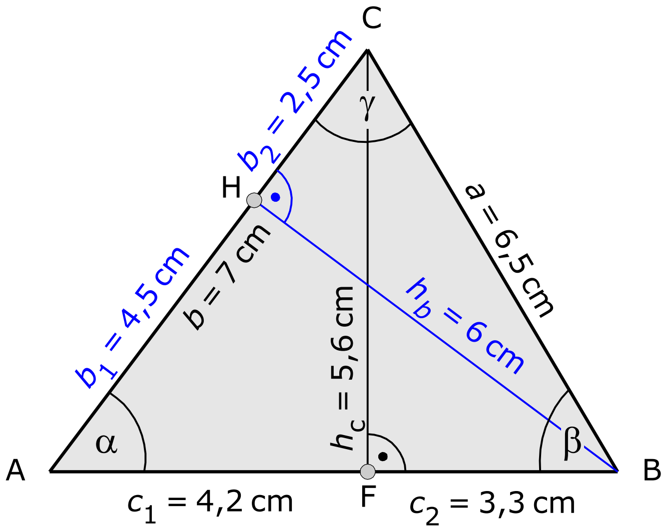
$$c = c_1 + c_2 = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\beta)$$

- **Zeichne** die Strecke $\overline{HB}$ **ein**. Diese Strecke ist die Höhe zur Seite $\overline{AC}$.
  siehe Abbildung

  Bestimme die Länge $|HB| = h_b$ und **weise nach**, dass $\overline{HB}$ und $\overline{AC}$ senkrecht aufeinander stehen. Werte siehe Abbildung; Lösungswege: Längen- und Winkelmessung (ungenau) oder Rechnung, siehe Teilaufgabe **c)**.

b) und **c)** *siehe nächste Seite*

Die Abbildung zeigt das spitzwinklige Dreieck ABC. Es wird durch die eingezeichnete Höhe in die rechtwinkligen Teildreiecke AFC und FBC zerlegt.



b) **Bestimme** die Winkelgrößen α, β und γ **rechnerisch**.

$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} = \frac{5{,}6}{7} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53{,}13°$ $\quad \sin(\beta) = \frac{h_c}{a} = \frac{5{,}6}{6{,}5} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 59{,}49°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 67{,}38°$

c) Vom Punkt H gehen die drei Strecken $\overline{HB}$, $\overline{HA}$ und $\overline{HC}$ aus. Die Strecke $\overline{HB}$ ist die Höhe zur Seite $\overline{AC}$, die anderen beiden Strecken führen vom Höhenfußpunkt H zum Anfangs- bzw. Endpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Die Längen dieser Strecken sind $|HA| = b_1$, $|HC| = b_2$ und $|HB| = h_b$.

Bestimme *mindestens zwei* der Längen h_b, b_1 und b_2 **rechnerisch**.

$$\sin(\alpha) = \frac{h_b}{c} \quad \Big| \cdot c$$
$$\Leftrightarrow \quad b \cdot \sin(\alpha) = h_b$$
$$h_b = c \cdot \sin(\alpha) = 7{,}5 \cdot \sin(53{,}13°) = 6$$

$$\cos(\gamma) = \frac{b_2}{a} \quad \Big| \cdot a$$
$$\Leftrightarrow \quad a \cdot \cos(\gamma) = b_2$$
$$b_2 = a \cdot \cos(\gamma) = 6{,}5 \cdot \cos(67{,}38°) = 2{,}5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b_1}{c} \quad \Big| \cdot c$$
$$\Leftrightarrow \quad c \cdot \cos(\alpha) = b_1$$
$$b_1 = c \cdot \cos(\alpha) = 7{,}5 \cdot \cos(53{,}13°) = 4{,}5$$