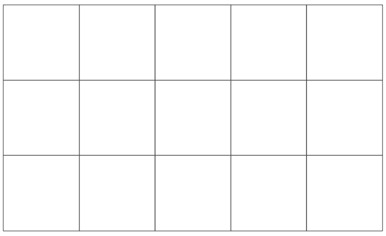
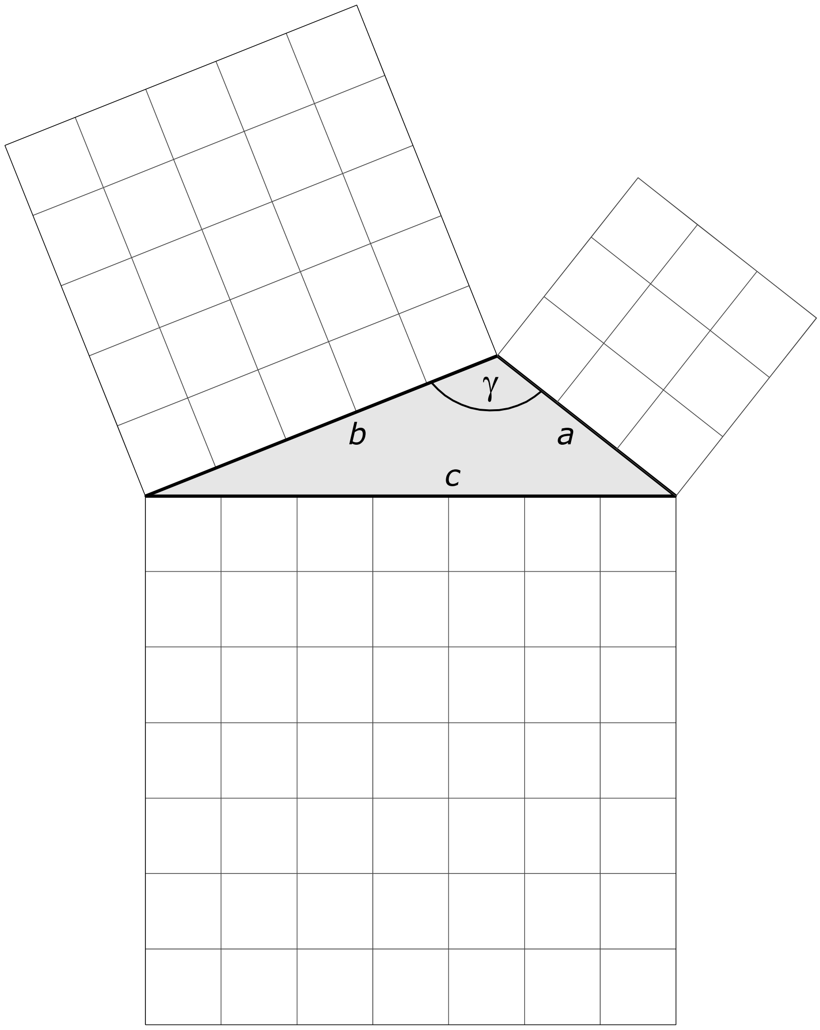
MATHE 364

21.09. Kästchen zählen





a) Ergänze: Diese Abbildung illustriert nicht den Satz des Pythagoras, sondern den ______________________ .

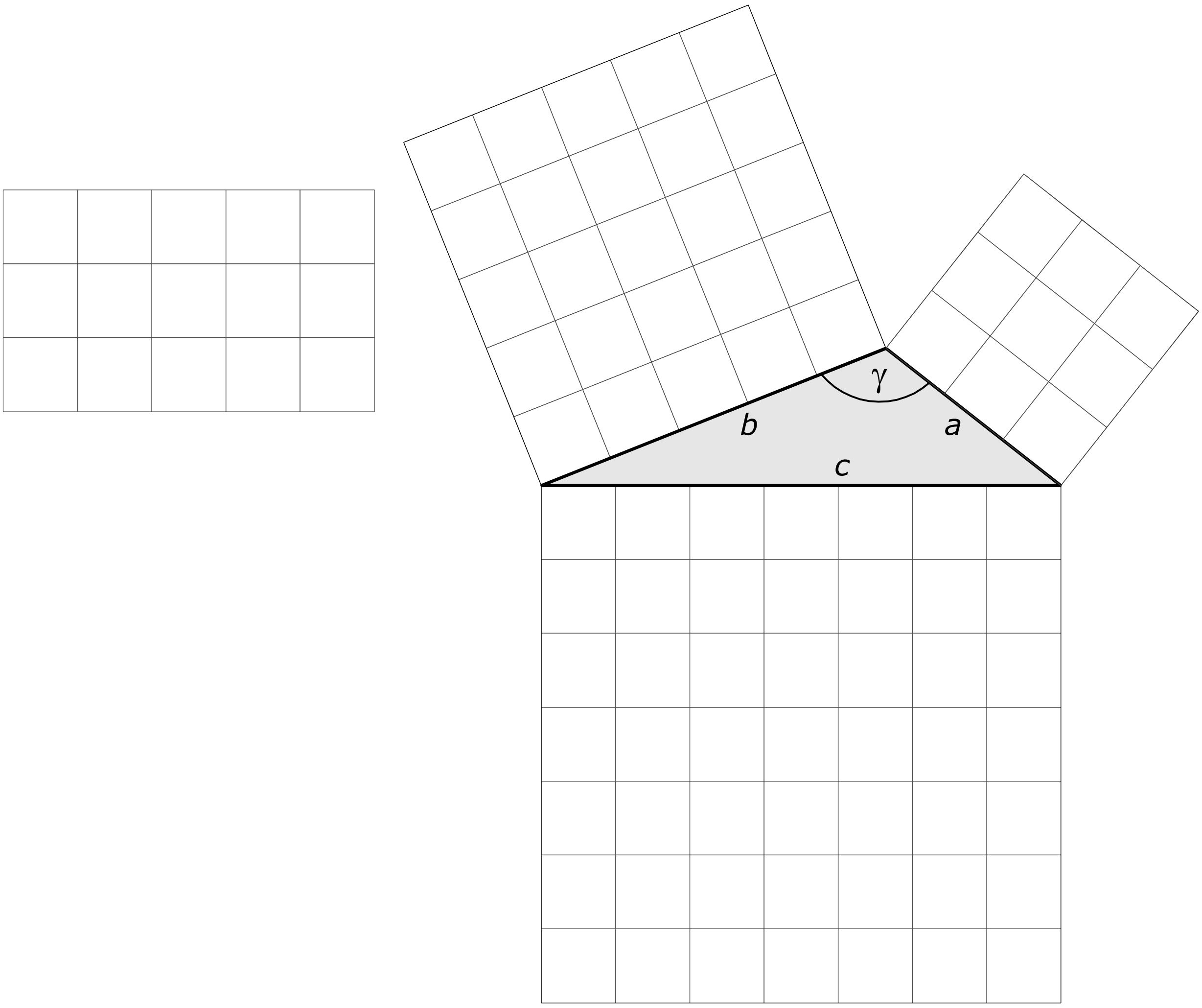
a^2 hat den Wert ___, b^2 den Wert ___ und c^2 den Wert ___. Da $a^2 + b^2 > c^2$ ist, kann das Dreieck nicht rechtwinklig sein, sondern es ist __________winklig.

Aus der Differenz von $a^2 + b^2$ und c^2 kann man aus der Abbildung direkt ablesen, dass $-2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$ den ganzzahligen Wert ____ hat.

b) Bestimme γ **rechnerisch** und **überprüfe** dein Ergebnis durch Nachmessen.

c) Gib auch die Differenzen von $b^2 + c^2$ und a^2 sowie von $a^2 + c^2$ und b^2 **an**.
Bestimme α und β rechnerisch auf dem Lösungsweg, der dir bei diesem Dreieck am einfachsten erscheint.

Lösungen 21.09. **Kästchen zählen**



a) Ergänze: Diese Abbildung illustriert nicht den Satz des Pythagoras, sondern den <u>Kosinussatz</u> .

a^2 hat den Wert <u>9</u>, b^2 den Wert <u>25</u> und c^2 den Wert <u>49</u>. Da $a^2 + b^2 > c^2$ ist, kann das Dreieck nicht rechtwinklig sein, sondern es ist <u>stumpf</u>winklig.
Aus der Differenz von $a^2 + b^2$ und c^2 kann man aus der Abbildung direkt ablesen, dass $-2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$ den ganzzahligen Wert <u>+ 15</u> hat.

b) Bestimme γ **rechnerisch** und **überprüfe** dein Ergebnis durch Nachmessen. √

Aus $-2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = -2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(\gamma) = +15$ folgt $\cos(\gamma) = -\frac{1}{2}$ und $\gamma = 120°$.

Alternative: formale Rechnung

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \left| -a^2 - b^2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 - a^2 - b^2 = -2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \left| \cdot (-1) \right.$$

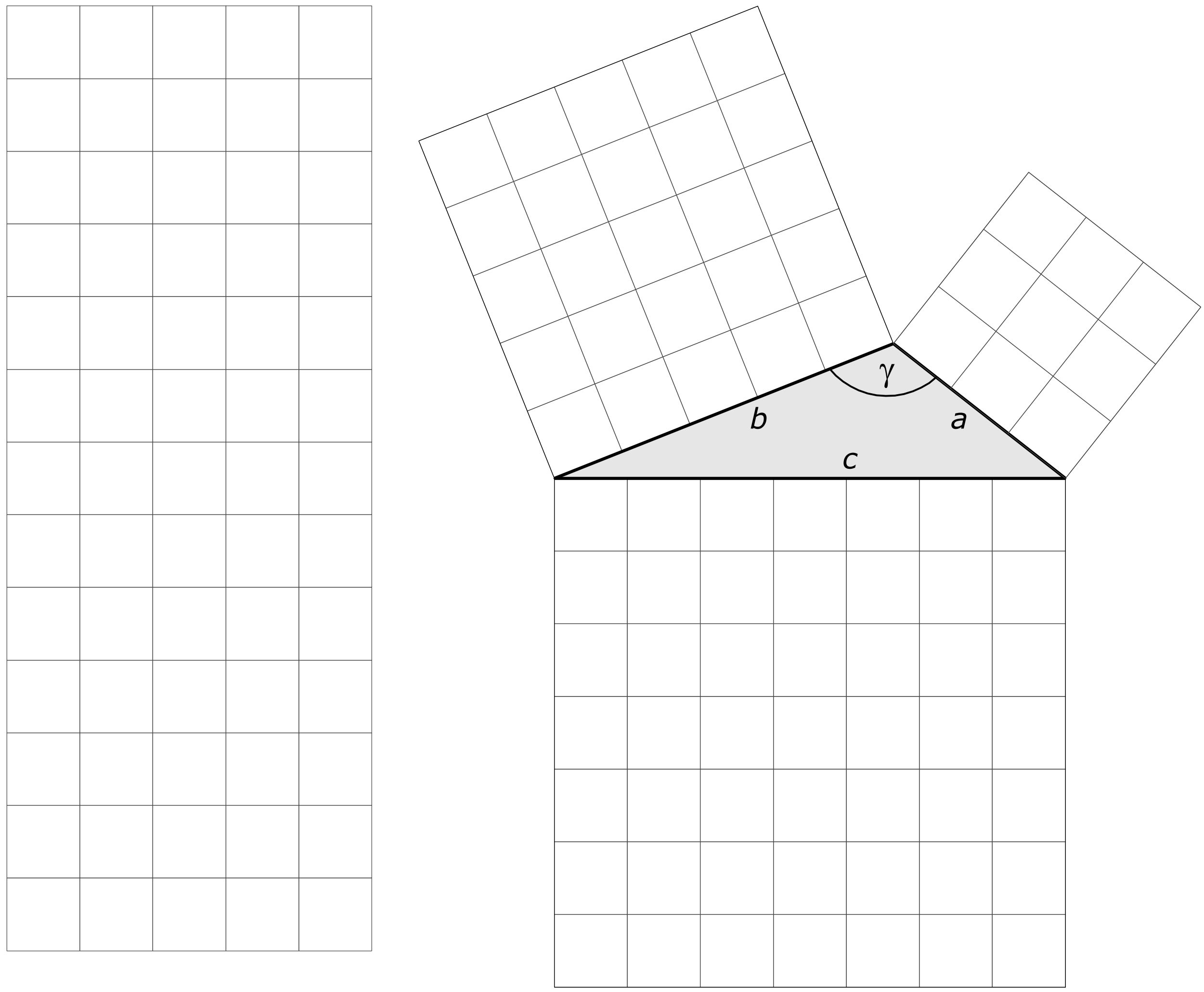
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \left| : (2 \cdot a \cdot b) \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{9 + 25 - 49}{30} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 120°$$

c) *siehe nächste Seite*

Lösungen 21.09. Kästchen zählen



c) Gib auch die Differenzen von $b^2 + c^2$ und a^2 sowie von $a^2 + b^2$ und a^2 **an**.

$b^2 + c^2 = 25 + 49 = 74$ und $a^2 = 9$, Differenz -65

$a^2 + c^2 = 9 + 49 = 58$ und $b^2 = 25$, Differenz -33

Bestimme α und β rechnerisch auf dem Lösungsweg, der dir bei diesem Dreieck am einfachsten erscheint. Analog zu Teilaufgabe **b)**

$-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) = -2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\alpha) = -65 \;\Rightarrow\; \cos(\alpha) = \frac{65}{70} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 21{,}7868°.$

$-2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) = -2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos(\beta) = -33 \;\Rightarrow\; \cos(\beta) = \frac{33}{42} \;\Rightarrow\; \beta \approx 38{,}2132°.$

üblicher Rechenweg:
für β formale Rechnung mit dem Sinussatz, da Kosinussatz zu viel Aufwand

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \qquad \sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} =$$

$$\Leftrightarrow \sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} \qquad 5 \cdot \frac{\sin(120°)}{7} \approx 0{,}6186 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 38{,}2132°$$

α aus der Winkelsumme $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 21{,}7868°$