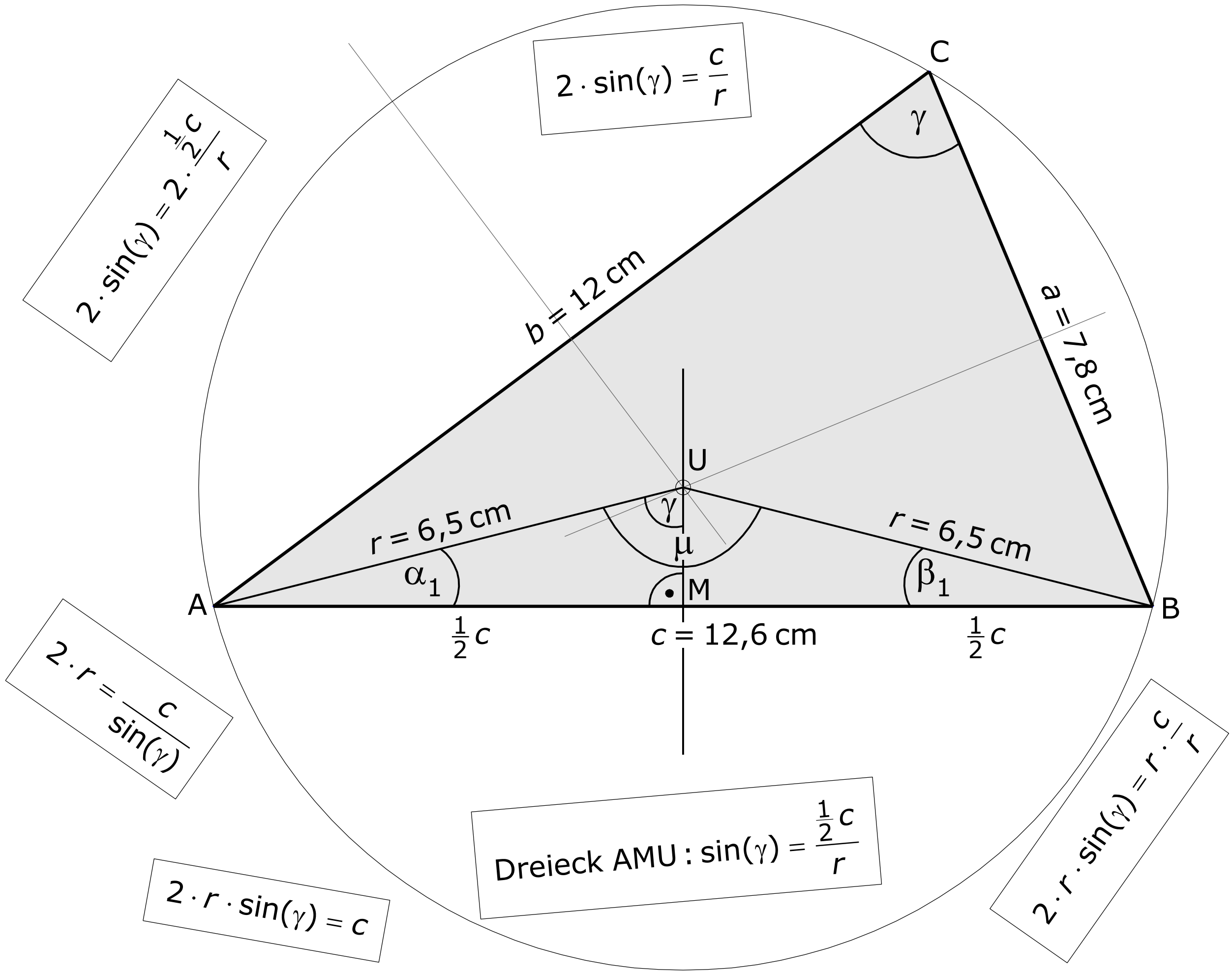
MATHE 364

20.09. Beweis des Umkreis-Sinussatzes



a) Im Dreieck AMU hat der Winkel ∢MAU die Größe α_1. **Bestimme** α_1 **rechnerisch**.
Bestimme α_1, μ und γ rechnerisch oder durch geometrische Überlegungen.

b) Die Abbildung zeigt eine Beweisfigur und ein Beweis-Puzzle.

Umkreis-Sinussatz: Wenn ein Dreieck die Seitenlängen *a*, *b*, *c* hat und die gegenüberliegenden Winkel die Größen α, β und γ haben, dann hat der Umkreis den Durchmesser $2 \cdot r = \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

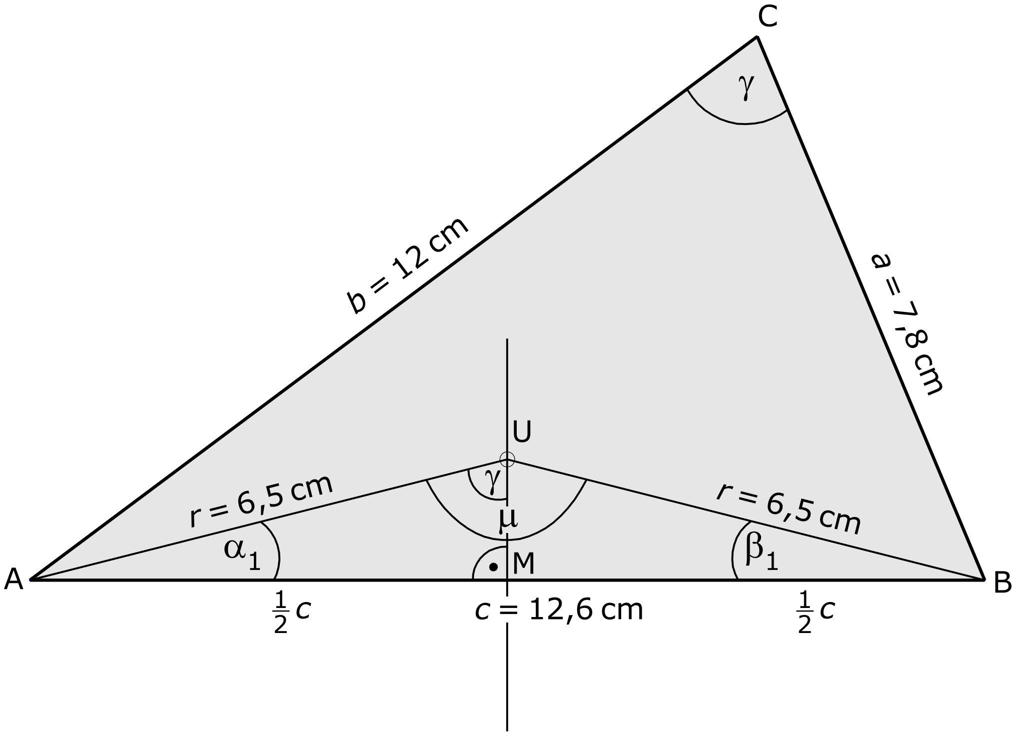
Ordne die Kärtchen des Beweis-Puzzles in einer sinnvollen Reihenfolge **an**.

c) Der Beweis hat noch eine Lücke.

Satz vom Mittelpunktswinkel: Der Mittelpunktswinkel ∢AUM über der Sehne $\overline{AB}$ ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel ∢ACM über der gleichen Sehne.

Markiere die beiden genannten Winkel sowie die Sehne in der Abbildung.
Gib an, was der Satz vom Mittelpunktswinkel für γ und μ bedeutet.
Ordne das Kärtchen und deine Aussage über γ und μ an der richtigen Stelle **ein**.

Lösungen 20.09. Beweis des Umkreis-Sinussatzes



a) Im Dreieck AMU hat der Winkel ∢MAU die Größe α_1. **Bestimme** α_1 **rechnerisch**. **Bestimme** α_1, μ und γ rechnerisch oder durch geometrische Überlegungen.

Kosinus im rechtwinkligen Dreieck AMU:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{\frac{1}{2}c}{r} = \frac{6{,}3}{6{,}5} \approx 0{,}9692... \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 14{,}2500...^\circ$$

μ erhält man aus der Winkelsumme im Dreieck ABU: $\mu = 180° - \alpha_1 - \beta_1$.

β_1 könnte genau wie α_1 berechnet werden, allerdings ist das Dreieck gleichschenklig, denn zwei Seiten haben die Länge r. Also ist $\mu = 180° - 2 \cdot \alpha_1$.

$\mu \approx 151{,}49993...°$

γ könnte über den Sinus im Dreieck AMU berechnet werden.

$$\sin(\gamma) = \frac{\frac{1}{2}c}{r} = \frac{6{,}3}{6{,}5} \approx 0{,}9692... \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 75{,}74996...^\circ$$

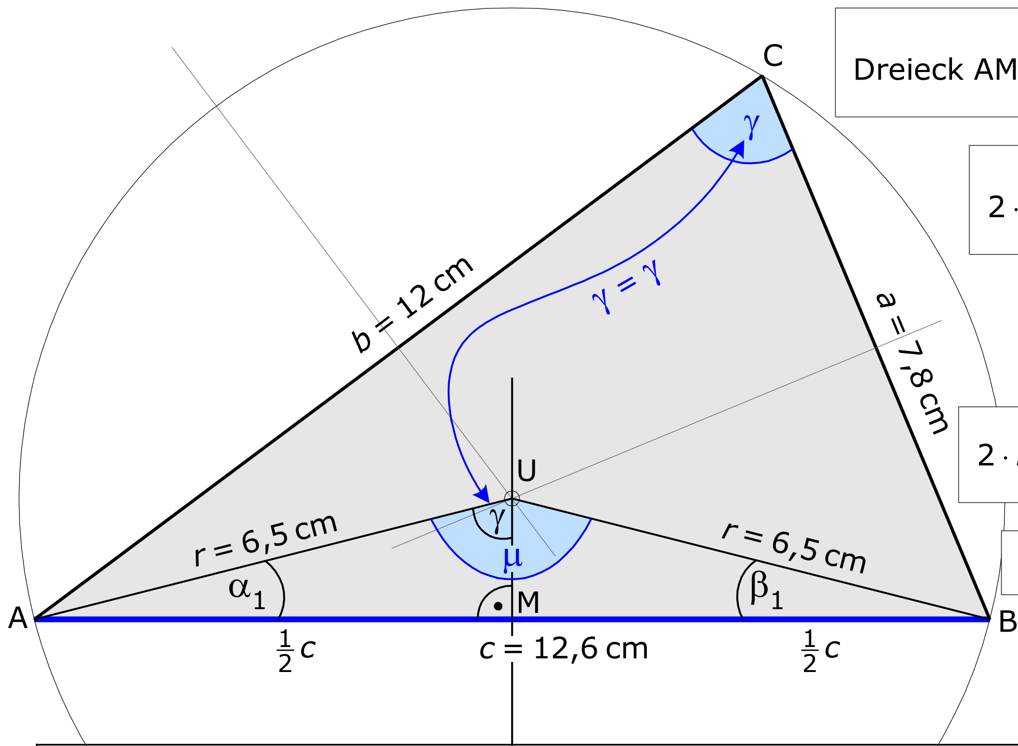
Alternative:

Im gleichschenkligen Dreieck ABU ist die Mittelsenkrechte zur Basis gleichzeitig auch Winkelhalbierende, also $\gamma = \mu : 2 \approx 75{,}7966...°$.

b) und **c)** *siehe nächste Seite*

MATHE 364

Lösungen 20.09. Beweis des Umkreis-Sinussatzes



Dreieck AMU: $\sin(\gamma) = \dfrac{\frac{1}{2}c}{r}$

$2 \cdot \sin(\gamma) = 2 \cdot \dfrac{\frac{1}{2}c}{r}$

$2 \cdot \sin(\gamma) = \dfrac{c}{r}$

$2 \cdot r \cdot \sin(\gamma) = r \cdot \dfrac{c}{r}$

$2 \cdot r \cdot \sin(\gamma) = c$

$2 \cdot r = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

Satz vom Mittelpunktswinkel: Der Mittelpunktswinkel ∢AUM über der Sehne $\overline{AB}$ ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel ∢ACM über der gleichen Sehne.

Da $\gamma = \gamma$, gilt $2 \cdot r = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$ im Dreieck AMU und im Dreieck ABC.

b) Die Abbildung zeigt eine Beweisfigur und ein Beweis-Puzzle.

Umkreis-Sinussatz: Wenn ein Dreieck die Seitenlängen a, b, c hat und die gegenüberliegenden Winkel die Größen α, β und γ haben, dann hat der Umkreis den Durchmesser $2 \cdot r = \dfrac{c}{\sin(\gamma)} = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.

Ordne die Kärtchen des Beweis-Puzzles in einer sinnvollen Reihenfolge **an**. s. o.

c) Der Beweis hat noch eine Lücke.

Satz vom Mittelpunktswinkel: Der Mittelpunktswinkel ∢AUM über der Sehne $\overline{AB}$ ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel ∢ACM über der gleichen Sehne.

Markiere die beiden genannten Winkel sowie die Sehne in der Abbildung.
siehe blau markierte Winkel sowie blau markierte Strecke (=Sehne) in der Abb.
Gib an, was der Satz vom Mittelpunktswinkel für γ und μ bedeutet.
Der Mittelpunktswinkel ∢AUM ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel ∢ACM, d. h. $\mu = 2 \cdot \gamma$. Die beiden mit γ bezeichneten Winkelgrößen bei U und bei C sind also gleich!
Ordne das Kärtchen und deine Aussage über γ und μ an der richtigen Stelle **ein**.
Die Aussagen „$\gamma = \gamma$" und $\mu = 2 \cdot \gamma$ können an jeder Stelle eingefügt werden.
Ohne diesen Hinweis wären γ aus dem Sinussatz im Dreieck ABC und γ aus dem Dreieck AMU verschiedene Winkel und die Rechnung wäre kein Beweis.