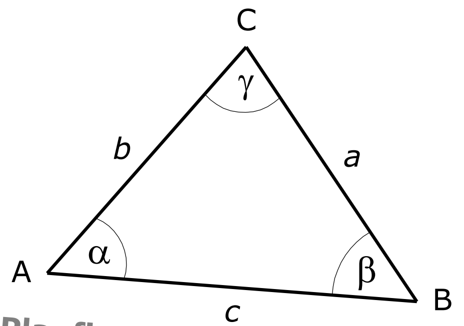
MATHE 364

29.09. Gleichungen für trigonometrische Berechnungen aufstellen

Der Kosinussatz ist die komplizierteste Gleichung, die bei trigonometrischen Berechnungen auftreten kann. Beim Sinussatz solltest du die Verhältnisgleichung so aufstellen, dass die gesuchte Größe im Zähler („oben") steht. Beim Bestimmen von Winkelgrößen mit dem Sinussatz musst du darauf achten, ob die spitzwinklige oder die stumpfwinklige Lösung richtig ist. Dieses Problem kannst du vermeiden, wenn du geschickt wählst, in welcher Reihenfolge du die gesuchten Größen bestimmst.



Planfigur, nicht maßstäblich

a) Ein Dreieck ist durch $a = 3{,}7\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 3{,}3\,\text{cm}$ bestimmt.

Gib den Kongruenzsatz **an**: ____. **Stelle** mit dem Kosinussatz eine Gleichung **auf** und **bestimme** damit $\cos(\alpha)$ sowie anschließend α **rechnerisch**.

b) α ist bekannt. Im zweiten Rechenschritt soll einer der beiden anderen Winkel bestimmt werden.

Kreuze an: ☐ β als zweites ☐ γ als zweites ☐ Reihenfolge egal

c) **Gib an**, warum für den zweiten Rechenschritt der Sinussatz günstig ist.

Kreuze an, welche der beiden Formulierungen für den Ansatz günstiger ist.

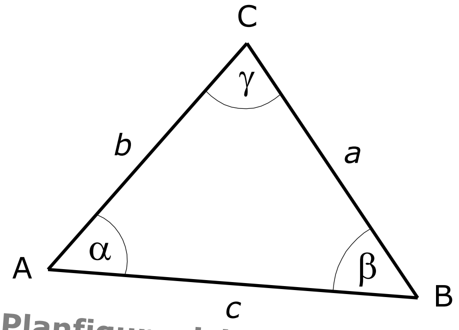
☐ $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ ☐ $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

Bestimme die Größe des zweiten Winkels **rechnerisch**. Welche Bestimmungsstücke verwendest du in dieser Rechnung? **Gib** den Kongruenzsatz **an**: ____.

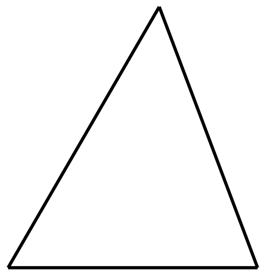
d) Im letzten Rechenschritt soll die Größe des dritten Winkels bestimmt werden. **Gib an**, welches dafür der günstigste Ansatz ist.

Bestimme die Größe des dritten Winkels **rechnerisch**.

Lösungen 29.09. **Gleichungen für trigonometrische Berechnungen aufstellen**



Planfigur, nicht maßstäblich



exakte Zeichnung

a) Ein Dreieck ist durch $a = 3{,}7$ cm, $b = 4$ cm und $c = 3{,}3$ cm bestimmt.

Gib den Kongruenzsatz **an**: SSS. **Stelle** mit dem Kosinussatz eine Gleichung **auf** und **bestimme** damit $\cos(\alpha)$ sowie anschließend α **rechnerisch**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad \Big| -b^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 - c^2 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - a^2 = 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad \Big| : (2 \cdot b \cdot c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{4^2 + 3{,}3^2 - 3{,}7^2}{2 \cdot 4 \cdot 3{,}3} = \frac{16 + 10{,}89 - 13{,}69}{26{,}4} = \frac{13{,}2}{26{,}4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60°$$

b) α ist bekannt. Jetzt soll einer der beiden anderen Winkel bestimmt werden.

Kreuze an: ☐ β als zweites ☒ γ als zweites ☐ Reihenfolge egal

c) **Gib an**, warum für den zweiten Rechenschritt der Sinussatz günstig ist. Der Sinussatz bedeutet weniger Rechenaufwand. Es kann aber zwei Lösungen geben.

Kreuze an, welche der beiden Formulierungen für den Ansatz günstiger ist.

☐ $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ ☒ $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

$$\frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

Bestimme die Größe des zweiten Winkels **rechnerisch**.

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b} = 3{,}3 \cdot \frac{\sin(60°)}{3{,}7} \approx 0{,}7724\ldots \quad \Rightarrow \quad \gamma = 50{,}5699\ldots°$$

Welche Bestimmungsstücke verwendest du in dieser Rechnung? a, α und c.

Gib den Kongruenzsatz **an**: SsW. Der gegebene Winkel α liegt der längeren der beiden Seiten gegenüber: $a > c$. Es wäre besser gewesen, im ersten Rechenschritt β zu bestimmen um das mögliche Problem sSW ganz zu vermeiden.

d) Im letzten Rechenschritt soll die Größe des dritten Winkels bestimmt werden. **Gib an**, welches dafür der günstigste Ansatz ist. Innenwinkelsumme im Dreieck

Bestimme die Größe des dritten Winkels **rechnerisch**.

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 69{,}4300\ldots°$$