MATHE 364

28.09. Trigonometrie: drei Dreiecke

Gegeben sind ein spitzwinkliges, ein stumpfwinkliges und ein rechtwinkliges Dreieck.

I $a = 5{,}5\,\text{cm}$, $b = 12\,\text{cm}$, $c = 15{,}5\,\text{cm}$

II $a = 9{,}3\,\text{cm}$, $b = 12{,}4\,\text{cm}$, $c = 15{,}5\,\text{cm}$

III $a = 12\,\text{cm}$, $b = 17{,}5\,\text{cm}$, $c = 15{,}5\,\text{cm}$

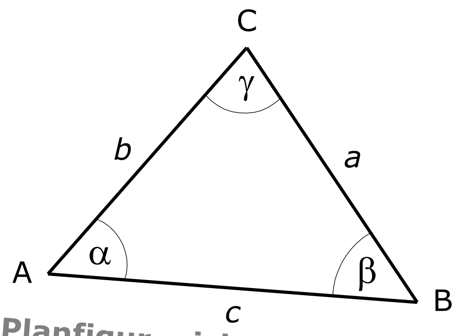
a) **Ergänze** den Lückentext:
In jedem Dreieck liegt der größte Winkel der ______________ Seite gegenüber.

b) **Weise rechnerisch nach**, dass eines der Dreiecke rechtwinklig ist.
Entscheide dann, welches das spitzwinklige und welches das stumpfwinklige Dreieck ist. **Ordne** den Dreieckstyp passend **zu**:

I ___________winklig **II** ___________winklig **III** ___________winklig

c) **Wahlaufgabe**: Wähle Dreieck **I** *oder* Dreieck **II** *oder* Dreieck **III**.

- **Konstruiere** das Dreieck.



Planfigur, nicht maßstäblich

- **Berechne** die Größe der drei Innenwinkel.
- **Berechne** den Flächeninhalt des Dreiecks.

MATHE 364

Lösungen 28.09. **Trigonometrie: drei Dreiecke**

Gegeben sind ein spitzwinkliges, ein stumpfwinkliges und ein rechtwinkliges Dreieck.

I $a = 5{,}5\text{ cm}$, $b = 12\text{ cm}$, $c = 15{,}5\text{ cm}$

II $a = 9{,}3\text{ cm}$, $b = 12{,}4\text{ cm}$, $c = 15{,}5\text{ cm}$

III $a = 12\text{ cm}$, $b = 17{,}5\text{ cm}$, $c = 15{,}5\text{ cm}$

a) **Ergänze** den Lückentext:

In jedem Dreieck liegt der größte Winkel der längsten Seite gegenüber.

b) **Weise rechnerisch nach**, dass eines der Dreiecke rechtwinklig ist.

Für den Vergleich von Quadrat und Quaratesumme wähle ich die längste Seite.

Δ **II** ist rechtwinklig: $15{,}5^2 = 240{,}25 \; = \; 9{,}3^2 + 12{,}4^2 = 86{,}49 + 153{,}76 = 240{,}25$

Δ **I** ist stumpfwinklig: $15{,}5^2 = 240{,}25 \; > \; 5{,}5^2 + 12^2 = 30{,}25 + 144 = 174{,}25$

Δ **III** ist spitzwinklig: $17{,}5^2 = 306{,}25 \; < \; 12^2 + 15{,}5^2 = 144 + 240{,}25 = 384{,}25$

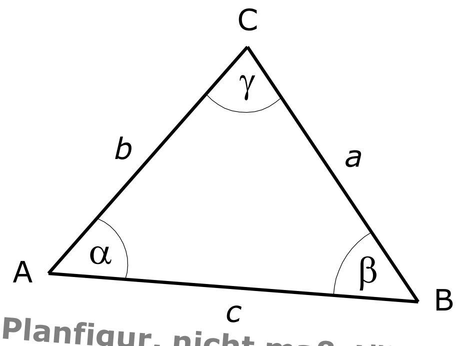
Entscheide dann, welches das spitzwinklige und welches das stumpfwinklige Dreieck ist. Für die Entscheidungen genügen zwei der drei Rechnungen. Es wäre auch möglich, für **c)** mit dem Kosinussatz den größten Winkel exakt zu berechnen.

Ordne den Dreieckstyp passend **zu**:

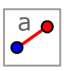
I stumpfwinklig **II** rechtwinklig **III** spitzwinklig

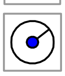
c) **Wahlaufgabe**: Wähle Dreieck **I** *oder* Dreieck **II** *oder* Dreieck **III**.

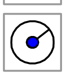
- **Konstruiere** das Dreieck. Alle Dreiecke können nach SSS konstruiert werden, Dreieck **II** außerdem noch nach SWS oder SSW, da ein Winkel bekannt ist oder mit Hilfe eines Thaleskreises über der Hypotenuse.

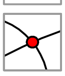


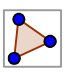
Planfigur, nicht maßstäblich

 Strecke $\overline{AB}$ der Länge $c = 15{,}5\text{ cm}$

 Kreis mit Mittelpunkt A und dem Radius b = ... cm

 Kreis mit Mittelpunkt B und dem Radius a = ... cm

 Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist C.

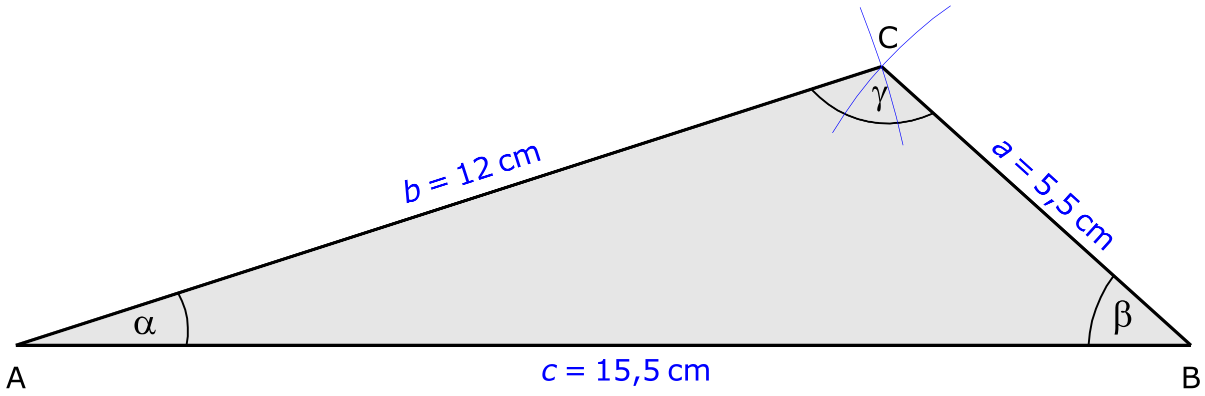
 Dreieck ABC

Konstruktionen und Berechnungen auf den nächsten Seiten

Lösungen 28.09. **Trigonometrie: drei Dreiecke**

I $a = 5{,}5\text{ cm}$, $b = 12\text{ cm}$, $c = 15{,}5\text{ cm}$

c) **Konstruiere** das Dreieck.



- **Berechne** die Größe der drei Innenwinkel.

$$\begin{aligned} & c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma) && \left|-a^2-b^2\right. \\ \Leftrightarrow\ & c^2 - a^2 - b^2 = -2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma) && \left|\cdot(-1)\right. \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 - c^2 = 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma) && \left|:(2\cdot a\cdot b)\right. \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} = \cos(\gamma) \end{aligned}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{5{,}5^2+12^2-15{,}5^2}{2\cdot 5{,}5\cdot 12} = \frac{30{,}25+144-240{,}25}{132} = \frac{-66}{132} = -\tfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \gamma = 120^\circ$$

$$\begin{aligned} & \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \\ \Leftrightarrow\ & \sin(\beta) = b\cdot\frac{\sin(\gamma)}{c} \end{aligned}$$

$$\sin(\beta) = b\cdot\frac{\sin(\gamma)}{c} = 12\cdot\frac{\sin(60^\circ)}{15{,}5} \approx 0{,}7742 \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 50{,}7320^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 9{,}2680^\circ$$

Beim zweiten Rechenschritt entspricht die Anwendung des Sinusssatzes dem Kongruenzsatz SsW. d. h. der 120°-Winkel liegt der längeren der beiden Seiten gegenüber. In diesem Fall ist die Lösung eindeutig, d. h. die Ergänzung von β auf 180° muss nicht betrachtet werden. Da dieses Dreieck stumpfwinklig ist, kann es auch keine zweite Lösung für β größer als 180° geben.

- **Berechne** den Flächeninhalt des Dreiecks.

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(\gamma) = \tfrac{1}{2}\cdot 5{,}5\cdot 12\cdot\sin(120^\circ) \approx 28{,}58$$

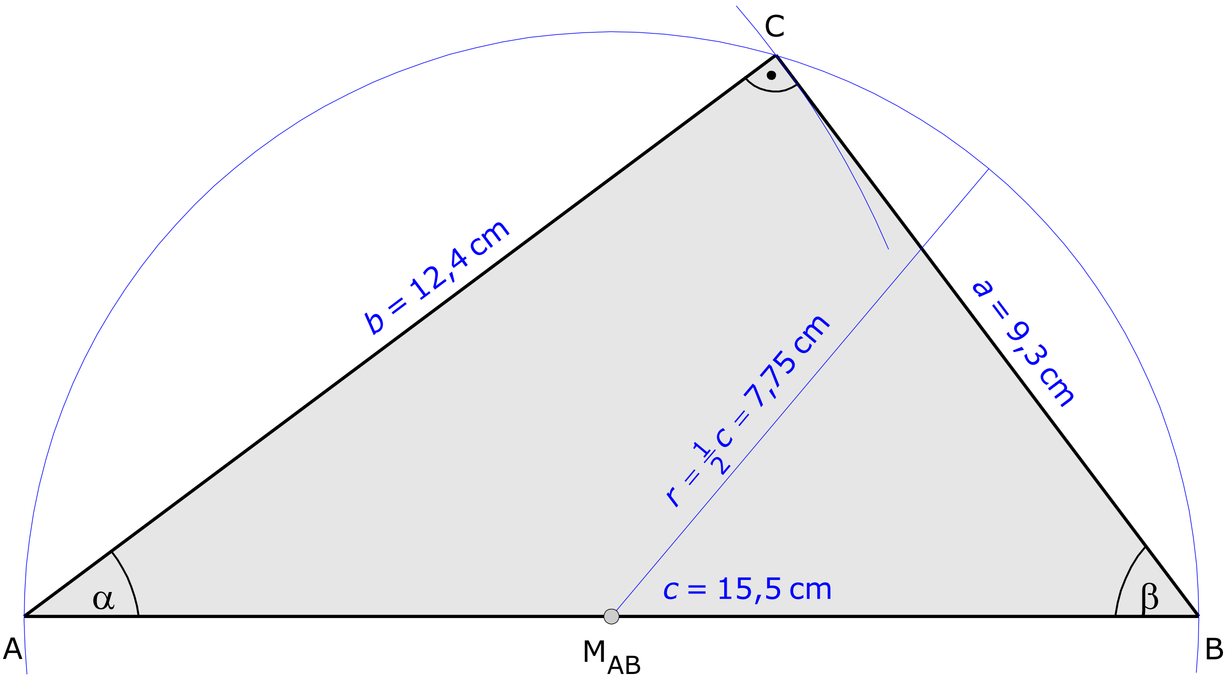
Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von ca. $28{,}6\text{ cm}^2$.

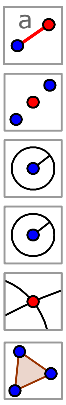
MATHE 364

Lösungen 28.09. Trigonometrie: drei Dreiecke

II $a = 9{,}3$ cm, $b = 12{,}4$ cm, $c = 15{,}5$ cm

c) **Konstruiere** das Dreieck. Alle Dreiecke können nach SSS konstruiert werden. Dreieck **II** kann außerdem noch nach SWS oder SSW konstruiert werden, da ein Winkel bekannt ist oder mit Hilfe eines Thaleskreises über der Hypotenuse.





- Strecke $\overline{AB}$ der Länge $c = 15{,}5$ cm
- Mittelpunkt M_{AB} der Strecke $\overline{AB}$
- Kreis mit Mittelpunkt M_{AB} und dem Radius $r = 7{,}75$ cm
- Kreis mit Mittelpunkt B und dem Radius $b = 12{,}4$ cm
- Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist C.
- Dreieck ABC

- **Berechne** die Größe der drei Innenwinkel. $\gamma = 90°$, siehe **a)**

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{9{,}3}{15{,}5} \approx 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}8699°$$

alternativ: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{12{,}4}{15{,}5}$ oder $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{9{,}3}{12{,}4}$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{12{,}4}{15{,}5} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 53{,}1301°$$

alternativ: $\cos(\beta) = \frac{a}{c} = \frac{9{,}3}{15{,}5}$ oder $\tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{12{,}4}{9{,}3}$

- **Berechne** den Flächeninhalt des Dreiecks. $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 9{,}3 \cdot 12{,}4 = 57{,}66$

Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von ca. 57,66 cm^2.

Lösungen 28.09. Trigonometrie: drei Dreiecke

III $a = 12\,\text{cm}$, $b = 17{,}5\,\text{cm}$, $c = 15{,}5\,\text{cm}$

c) Konstruiere das Dreieck.

- **Berechne** die Größe der drei Innenwinkel.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \quad \big| -a^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 - a^2 - c^2 = -2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \quad \big| \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \quad \big| : (2 \cdot a \cdot c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{12^2 + 15{,}5^2 - 17{,}5^2}{2 \cdot 12 \cdot 15{,}5}$$

$$= \frac{144 + 240{,}25 - 306{,}25}{372}$$

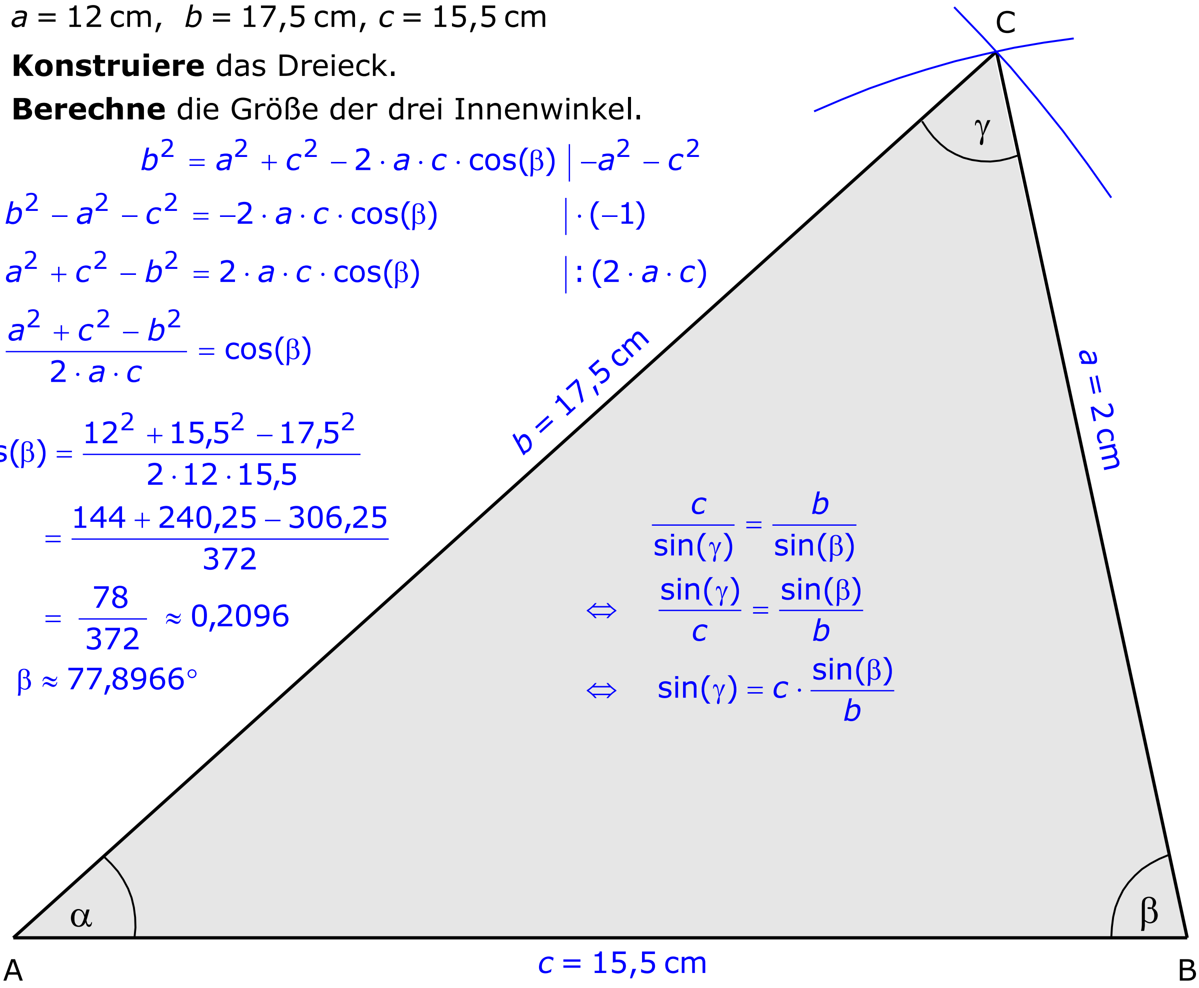
$$= \frac{78}{372} \approx 0{,}2096$$

$$\Rightarrow \quad \beta \approx 77{,}8966^\circ$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b}$$



$$\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{b} = 15{,}5 \cdot \frac{\sin(77{,}8965511292542^\circ)}{17{,}5} \approx 0{,}8660\ldots \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \approx 42{,}1034^\circ$$

Beim ersten Rechenschritt wird die Größe des Winkels berechnet, der längsten der drei Seiten gegenüber liegt. Dadurch entspricht beim zweiten Rechenschritt die Anwendung des Sinusssatzes dem Kongruenzsatz SsW. d. h. der 78°-Winkel liegt der längeren der beiden Seiten gegenüber. In diesem Fall ist die Lösung eindeutig, d. h. die Ergänzung von γ auf 180° muss nicht betrachtet werden.

- **Berechne** den Flächeninhalt des Dreiecks.

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \tfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 17{,}5 \cdot \sin(60^\circ) \approx 90{,}93$$

Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von ca. 90,9 cm².