

MATHE 364

18.12. Gleichungen nach Wahl

Wahlaufgaben: Wähle aus jeder Teilaufgabe von **a)** bis **c)** mindestens eine Gleichung und löse sie.

- Schreibe dabei die Lösungsschritte mit Äquivalenzumformungen auf.
- Die erste Gleichung darfst du mit Streichholzschachteln und Streichhölzern legen oder zeichnen. (Bei den anderen Gleichungen ist das nicht möglich.)
- Du darfst die Gleichungen schrittweise GeoGebra lösen.
- Du darfst die Gleichungen zur Kontrolle mit dem Taschenrechner lösen.

a) $4 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 8$ oder $2 \cdot x + 3 = 3 \cdot x - 4$ oder $4x + 1,5 = 3x + 4,5$

b) $2 \cdot x + 8 = 4 \cdot x + 1$ oder $4 \cdot x + 3 = 6 \cdot x + 1,5$ oder $5x + 3 = 4x + 3,8$

c) $2 \cdot x + 4 = 4 \cdot x + 6$ oder $4 \cdot x + 2 = 2 \cdot x - 2$ oder $4x + 2 = -2x - 10$

d) Wahlaufgabe: Bearbeite *eine* der fünf Aufgaben.

- **Begründe:** Nur die erste Gleichung $4 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 5$ kannst du mit Streichhölzern und Streichholzschachteln legen. Bei den anderen Gleichungen ist das nicht ohne Tricks möglich.

- Wenn du zusätzlich *halbe Streichhölzer* verwendest, kannst du weitere Gleichungen mit Streichhölzern und Streichholzschachteln legen.

Gib Beispiele für solche Gleichungen an.

- Wenn du zusätzlich „*Schuldscheine*“ verwendest um negative Anzahlen darzustellen, kannst du weitere Gleichungen mit Streichhölzern und Streichholzschachteln legen. **Gib** Beispiele für solche Gleichungen an.

- Nader sagt: „Bei der Gleichung $4 \cdot x + 5 = 3 \cdot x + 5$ sehe ich sofort, dass die Lösung 0 ist!“ **Erkläre**, woran Nader das erkennt.

- Kalle sagt: „Bei den ersten drei Gleichungen kann ich dir sofort die Lösung sagen. Auch bei $9 \cdot x + 2 = 8 \cdot x + 5$ kann ich die Lösung direkt ablesen. Das geht sogar bei $5x + 3 = 4x + 3,8$.“

Sina antwortet: „Toller Trick. Jetzt sehe ich auch bei $2 \cdot x + 8 = 4 \cdot x + 1$ und bei $4 \cdot x + 3 = 6 \cdot x + 1,5$ sofort die Lösung ohne Äquivalenzumformungen“.

Erkläre, was Kalle sich überlegt haben könnte.

Kannst du auch Sinas Überlegung herausfinden?

- a) Bei der ersten Gleichung sind die Lösung $x = 5$, die Anzahlen der Schachteln (4 und 3) sowie die Anzahlen der losen Streichhölzer (3 und 8) natürliche Zahlen.
- $$\begin{array}{lcl} 4 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 8 & | -3 \cdot x & \\ \Leftrightarrow 1 \cdot x + 3 = 8 & | -3 & \\ \Leftrightarrow x = 5 & & \end{array}$$

Unten links sind die Anzahlen 1,5 und 4,5 der losen Streichhölzer positive rationale Zahlen, rechts tritt die negative ganze Zahl -4 auf.

$$\begin{array}{lcl} 4x + 1,5 = 3x + 4,5 & | -3x & \\ \Leftrightarrow x + 1,5 = 4,5 & | -1,5 & \\ \Leftrightarrow x = 3 & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} 2 \cdot x + 3 = 3 \cdot x - 4 & | -2 \cdot x & \\ \Leftrightarrow 3 = 1 \cdot x - 4 & | +4 & \\ \Leftrightarrow 7 = x & & \end{array}$$

- b)
- $$\begin{array}{lcl} 2 \cdot x + 8 = 4 \cdot x + 1 & | -2 \cdot x & \\ \Leftrightarrow 8 = 2 \cdot x + 1 & | -1 & \\ \Leftrightarrow 7 = 2 \cdot x & | :2 & \\ \Leftrightarrow 3,5 = x & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} 4 \cdot x + 3 = 6 \cdot x + 1,5 & | -2 \cdot x & \\ \Leftrightarrow 3 = 2 \cdot x + 1,5 & | -1,5 & \\ \Leftrightarrow 1,5 = 2 \cdot x & | :2 & \\ \Leftrightarrow 0,75 = x & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 5x + 3 = 4x + 3,8 & | -4 \cdot x & \\ \Leftrightarrow x + 3 = 3,8 & | -3 & \\ \Leftrightarrow x = 0,8 & & \end{array}$$

Hier sind alle Lösungen (3,5; 0,75 und 0,8) positive rationale Zahlen, außerdem sind die Zahlen 1,5 und 3,8 positive rationale Zahlen.

- c)
- $$\begin{array}{lcl} 2 \cdot x + 4 = 4 \cdot x + 6 & | -2 \cdot x & \\ \Leftrightarrow 4 = 2 \cdot x + 6 & | -6 & \\ \Leftrightarrow -2 = 2 \cdot x & | :2 & \\ \Leftrightarrow -1 = x & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} 4 \cdot x + 2 = 2 \cdot x - 2 & | -2 \cdot x & \\ \Leftrightarrow 2 \cdot x + 2 = -2 & | -2 & \\ \Leftrightarrow 2 \cdot x = -4 & | :2 & \\ \Leftrightarrow x = -2 & & \end{array}$$

Hier sind alle Lösungen negative ganze Zahlen. Außerdem sind die Zahlen -2 und -10 (die "Anzahl der Streichhölzer") negative ganze Zahlen.

$$\begin{array}{lcl} 4x + 2 = -2x - 10 & | +2 \cdot x & \\ \Leftrightarrow 6x + 2 = -10 & | -2 & \\ \Leftrightarrow 6x = -12 & | :6 & \\ \Leftrightarrow x = -2 & & \end{array}$$

In $-2x$ ist der Vorfaktor ("Anzahl der Streichholzschachteln") eine negative ganze Zahl.

- d) Die erste Gleichung $4 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 5$ kannst du mit Streichhölzern und Streichholzschachteln legen. **Begründung:** Die Anzahlen der Schachteln (4 und 3), die Anzahlen der losen Streichhölzer (3 und 8) sowie die Lösung 5 (Anzahl der Streichhölzer in jeder Schachtel) sind natürliche Zahlen.

$$4 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 8$$

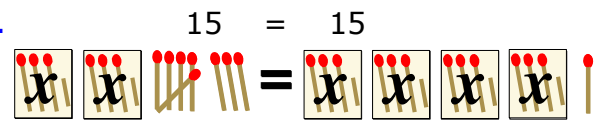
Bei allen anderen Gleichungen sind einzelne Anzahlen keine natürlichen Zahlen. Es sind positive rationale Zahlen oder negative ganze Zahlen.

d) zweite bis fünfte Wahlaufgabe:

- Mit Streichhölzern, Streichholzschachteln und zusätzlich mit halben Streichhölzern kannst du weitere Gleichungen legen; **Beispiele:**

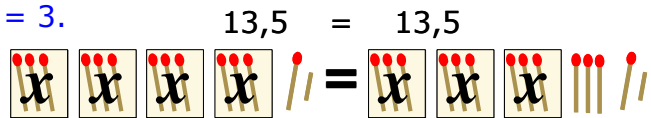
- $2 \cdot x + 8 = 4 \cdot x + 1$ hat die Lösung $x = 3,5$.

In jeder Schachtel liegen drei ganze Streichhölzer und ein halbes.



- $4x + 1,5 = 3x + 4,5$ hat die Lösung $x = 3$.

Zum Legen werden zwei einzelne halbe Streichhölzer benötigt.



- Mit zusätzlichen „Schuldscheinen“ für negative Anzahlen kannst du weitere Gleichungen mit Streichhölzern und Streichholzschachteln legen; **Beispiele:**

- $2 \cdot x + 3 = 3 \cdot x - 4$ hat die Lösung $x = 7$. Jede Schachtel enthält 7 Streichhölzer. Rechts liegt für -4 ein *Schuldschein* „Habe mir 4 Streichhölzer ausgeliehen“.

- $2 \cdot x + 4 = 4 \cdot x + 6$ hat die Lösung $x = -1$. In jeder Schachtel liegt für -1 ein *Schuldschein* „Habe mir ein Streichholz ausgeliehen“.

- $4 \cdot x + 2 = 2 \cdot x - 2$ hat die Lösung $x = -2$. In jeder Schachtel liegt für -2 ein *Schuldschein* „Habe mir 2 Streichhölzer ausgeliehen“. Rechts liegt für -2 ein *Schuldschein* „Habe mir 2 Streichhölzer ausgeliehen“.

- $4x + 2 = -2x - 10$ hat die Lösung $x = -2$. In jeder Schachtel liegt für -2 ein *Schuldschein* „Habe mir 2 Streichhölzer ausgeliehen“. Rechts liegt für -10 ein *Schuldschein* „Habe mir 10 Streichhölzer ausgeliehen“ und für $-2x$ ein *Schuldschein* „Habe mir 2 Streichholzschachteln ausgeliehen“.

- Nader erkennt bei der Gleichung $4 \cdot x + 5 = 3 \cdot x + 5$ sofort, dass die Lösung 0 ist.
- **Erklärung:** Links und rechts liegen gleich viele lose Streichhölzer, nämlich 5. Links liegt eine Schachtel mehr als rechts. Insgesamt können links und rechts nur dann gleich viele Streichhölzer liegen, wenn alle Schachteln leer sind.

- Kalle kann bei $4 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 8$ sofort ablesen, dass die Lösung 5 ist. Links liegt eine Schachtel mehr als rechts. Rechts liegen 8 lose Streichhölzer, das sind 5 mehr als links. Also müssen in jeder Schachtel 5 Streichhölzer liegen.

- Kalle kann bei $9 \cdot x + 2 = 8 \cdot x + 5$ sofort ablesen, dass die Lösung 3 ist. Links liegt eine Schachtel mehr als rechts. Rechts liegen 3 lose Streichhölzer mehr als links. Also müssen in jeder Schachtel 3 Streichhölzer liegen.

- Kalle kann bei $5x + 3 = 4x + 3,8$ sofort ablesen, dass die Lösung 0,8 ist. Links kommt x einmal mehr vor als rechts. Rechts ist die Zahl 3,8 um 0,8 größer als die Zahl 3 links. Um diesen Unterschied auszugleichen muss $x = 0,8$ sein.

- Sina sieht mit Kalles Trick, dass $2 \cdot x + 8 = 4 \cdot x + 1$ die Lösung $x = 3,5$ hat.

- Links ist die Zahl 8 um 7 größer als die Zahl 1 rechts. 7 entspricht dem Wert von $2 \cdot x$. Also muss $x = 0,8$ sein.

Sina sieht mit Kalles Trick, dass $4 \cdot x + 3 = 6 \cdot x + 1,5$ die Lösung $x = 0,75$ hat.

- Links ist die Zahl 3 um 1,5 größer als die Zahl 1,5 rechts. 1,5 entspricht dem Wert von $2 \cdot x$. Also muss $x = 0,75$ sein.