MATHE 364

07.12. Es gibt vier Arten von Gleichheitszeichen!

Information

An ↓ dieser Stelle ...	bedeutet das Gleichheitszeichen ↓
$8 \cdot 13 = 8 \cdot 10 + 8 \cdot 3$	*Die Terme (Rechenausdrücke) links und rechts <u>haben den gleichen Wert</u>.*
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	*Die Terme links und rechts <u>sind gleichwertig</u>. Beide Terme haben bei beliebigen Variablenwerten jeweils beide den gleichen Wert.*
$2x + 3 = 5x + 9$	*Ist es möglich, dass verschiedene Terme den gleichen Wert haben können? Welchen Wert muss dafür die Variable x haben? (Lösung der Gleichung)*
π = 3,1415926 ... 1 € = 1,95583 DM	Definition eines Wertes, z. B. Wert der Kreiszahl π oder Umrechnungskurs von € auf D-Mark.

a) **Lies** den Informationstext.

b) Im Kasten wird die Gleichung $5 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 10$ gelöst.

Werte links			Werte rechts
1. Zeile links: _____		$5 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 10 \quad \vert -3 \cdot x$	1. Zeile rechts: _____
2. Zeile links: _____	$\Leftrightarrow$	$2 \cdot x + 3 = 10 \quad \vert -3$	2. Zeile rechts: _____
3. Zeile links: _____	$\Leftrightarrow$	$2 \cdot x = 7 \quad \vert :2$	3. Zeile rechts: _____
4. Zeile links: 3,5	$\Leftrightarrow$	$x = 3{,}5$	4. Zeile rechts: _____

Setze die Lösung $x = 3{,}5$ in jeder Zeile in den linken und in den rechten Term **ein** und **gib** jeweils die Werte dieser Terme **an**.

Lege die Gleichung mit Streichhölzern und Streichholzschachteln.
Vollziehe Zeile für Zeile die Äquivalenzumformungen nach und **zeichne** die einzelnen Gleichungen.

c)

$$(3 \cdot x + 5 \cdot y) \cdot (3 \cdot x + 5 \cdot y) =$$
$$3 \cdot x \cdot (3 \cdot x + 5 \cdot y) + 5 \cdot y \cdot (3 \cdot x + 5 \cdot y) =$$
$$3 \cdot x \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot x \cdot 5 \cdot y + 5 \cdot y \cdot 3 \cdot x + 5 \cdot y \cdot 5 \cdot y = 9 \cdot x^2 + 30 \cdot x \cdot y + 25 \cdot y^2$$

Gib die Bedeutung dieser Rechnung **an**: ______________________________

Setze die Variablenwerte $x = 2{,}5$ und $y = -0{,}3$ **ein**.

Gib mindestens fünf einzelne Zwischenergebnisse **an**.

Gib die Werte der Terme in zwei verschiedenen Zeilen der Rechnung **an**.

Erkläre den Unterschied zwischen den Rechenzeilen in **b)** und denen in **c)**.

MATHE 364

Lösungen 07.12. Es gibt vier Arten von Gleichheitszeichen!

Information

- *Beim Rechnen bedeutet das Gleichheitszeichen, dass zwei verschiedene Terme den gleichen Wert haben.*
- *gleichwertige Terme: (verschiedene) Terme mit Variablen; zwei gleichwertige Terme haben bei jeder Variablenbelegung jeweils gleiche Werte*
- *Gleichung: Der linke und der rechte Term sind i. A. verschieden. Bei welchem Variablenwert x (Lösung) haben beide Terme dennoch den gleichen Wert?*
- *Wert definieren, z. B. $x = 2{,}5$ oder $\pi = 3{,}1415926\ ...$*

a) **Lies** den Informationstext. √

b)

1. Zeile links: 20,5	$5\cdot x+3=3\cdot x+10 \quad \vert -3\cdot x$	1. Zeile rechts: 20,5
2. Zeile links: 10	$\Leftrightarrow \quad 2\cdot x+3=10 \quad \vert -3$	2. Zeile rechts: 10
3. Zeile links: 7	$\Leftrightarrow \quad 2\cdot x=7 \quad \vert :2$	3. Zeile rechts: 7
4. Zeile links: 3,5	$\Leftrightarrow \quad x=3{,}5$	4. Zeile rechts: 3,5

Lösung $x=3{,}5$ **einsetzen**, Werte der Terme **angeben** siehe oben

Gleichung mit Streichhölzern und Schachteln legen und **zeichnen** siehe Seite 3

c)

$$(3\cdot x+5\cdot y)\cdot(3\cdot x+5\cdot y) =$$
$$3\cdot x\cdot(3\cdot x+5\cdot y) + 5\cdot y\cdot(3\cdot x+5\cdot y) =$$
$$3\cdot x\cdot 3\cdot x + 3\cdot x\cdot 5\cdot y + 5\cdot y\cdot 3\cdot x + 5\cdot y\cdot 5\cdot y = 9\cdot x^2+30\cdot x\cdot y+25\cdot y^2$$

Bedeutung der Rechnung **angeben**: Ausmultiplizieren, 1. binomische Formel

Variablenwerte $x=2{,}5$ und $y=-0{,}3$ **einsetzen**, Zwischenergebnisse sowie die Werte der Terme **angeben**

$$\overbrace{(\underbrace{3\cdot 2{,}5}_{7{,}5}+\underbrace{5\cdot(-0{,}3)}_{-1{,}5})\cdot\underbrace{(3\cdot 2{,}5+5\cdot(-0{,}3))}_{6}}^{6\cdot 6=36} =$$

$$\overbrace{\underbrace{3\cdot 2{,}5\cdot(3\cdot 2{,}5+5\cdot(-0{,}3))}_{7{,}5\cdot 6=45}+\underbrace{5\cdot(-0{,}3)\cdot(3\cdot 2{,}5+5\cdot(-0{,}3))}_{-1{,}5\cdot 6=-9}}^{45-9=36} =$$

$$\underbrace{3\cdot 2{,}5\cdot 3\cdot 2{,}5}_{7{,}5^2=56{,}25}+\underbrace{3\cdot 2{,}5\cdot 5\cdot(-0{,}3)}_{7{,}5\cdot(-1{,}5)=-9}+\underbrace{5\cdot(-0{,}3)\cdot 3\cdot 2{,}5}_{-1{,}5\cdot 7{,}5=-9}+\underbrace{5\cdot(-0{,}3)\cdot 5\cdot(-0{,}3)}_{(-1{,}5)^2=+2{,}25} =$$

$$\underbrace{9\cdot 2{,}5^2}_{9\cdot 6{,}25=56{,}25}+\underbrace{30\cdot 2{,}5\cdot(-0{,}3)}_{30\cdot(-0{,}75)=22{,}5}+\underbrace{(-0{,}3)^2}_{+0{,}09}$$

Erkläre den Unterschied zwischen den Rechenzeilen in **b)** und denen in **c)**.

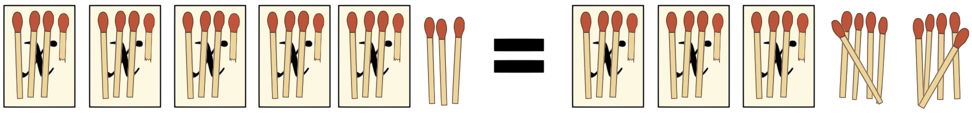
Bei Termumforumgen haben die Terme in jeder Zeile den gleichen Wert.

Bei Äquivalenzumformungen können sich die Werte der Terme links und rechts in jeder Zeile ändern. Aber alle Gleichungen haben die selbe Lösung.

Lösungen 07.12. Es gibt vier Arten von Gleichheitszeichen!

b)

$5 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 10$



$| -3 \cdot x$

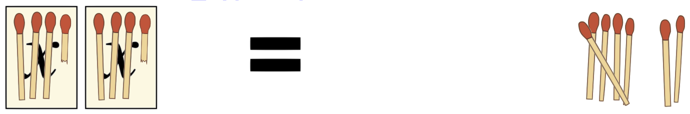
$2 \cdot x + 3 = 10$

$\Leftrightarrow$

$| -3$

$2 \cdot x = 7$

$\Leftrightarrow$



$| :2$

$x = 3{,}5$

$\Leftrightarrow$

In jeder Schachtel liegen drei ganze Streichhölzer und ein halbes.

Beim letzten Umformungsschritt wird links eine Schachtel weggenommen. Rechts muss die Anzahl von sieben Streichhölzern halbiert werden. Das ergibt drei ganze Streichhölzer und ein halbes.