

MATHE 364

11.12. Der Definitionsbereich einer Gleichung

Information

Eine Gleichung besteht aus zwei Termen und einem Gleichheitszeichen.

Beispiel 1:

$$4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 3$$

linker Term rechter Term

Im Allgemeinen sind die beiden Terme nicht gleichwertig. Deshalb hat das Gleichheitszeichen bei Gleichungen eine andere Bedeutung als beim Rechnen mit Zahlen oder bei Termumformungen. Es fragt, bei welchen Variablenwerten beide Terme den gleichen Wert haben. Das sind die Lösungen der Gleichung. Im Beispiel ist die Lösung $x = -2$.

Beispiel 1

$$4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 3$$

Lösung

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Probe

$$4 \cdot (-2) + 7 = 2 \cdot (-2) + 3$$

Im nächsten Beispiel sind die beiden Terme gleichwertig. Deshalb sind alle Zahlen aus dem Definitionsbereich Lösungen der Gleichung. Diese Gleichung ist *allgemeingültig*.

Beispiel 2:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Der *Definitionsbereich* einer Gleichung (*Definitionsmenge*, *Grundmenge*) ist die Menge der Zahlen, die man für die Variable einsetzen darf.

Im Beispiel 1 ist hierfür die Menge der ganzen Zahlen sinnvoll, da $-2 \in \mathbb{Z}$ ist (lies: „ -2 ist ein Element der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen.“).

a) Lies den Informationstext.

Im Beispiel 1 wird die Probe durchgeführt. Dazu wird die Lösung $x = -2$ in den linken und in den rechten Term eingesetzt. **Gib** die Werte dieser Terme **an**.

• $T_{\text{links}}(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ $T_{\text{rechts}}(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$

Setze im Beispiel 2 die Variablenwerte $x = -2$ sowie $x = 4$ **ein**.

• $T_{\text{links}}(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ $T_{\text{rechts}}(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$

• $T_{\text{links}}(4) = \underline{\hspace{2cm}}$ $T_{\text{rechts}}(4) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) Wähle mindestens zwei Definitionsbereiche und löse die zugehörige Gleichung.

\mathbb{N} natürliche Zahlen (positive ganze Zahlen) $4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 13$

\mathbb{N}_0 natürliche Zahlen einschließlich 0 $4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 7$

\mathbb{Z} ganze Zahlen $4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 1$

\mathbb{Q} rationale Zahlen $4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 8$

c) Begründe: Diese Gleichungen kannst du mit Streichhölzern und Schachteln legen. **Gib** den Inhalt der Schachteln bei den von dir gewählten Gleichungen **an**.

Information

Im Allgemeinen sind der linke Term und der rechte Term nicht gleichwertig. Bei Gleichungen fragt das Gleichheitszeichen, bei welchen Variablenwerten (den Lösungen) beide Terme den gleichen Wert haben.

Beispiel 1:

$$4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 3 \Leftrightarrow x = -2$$

$$4 \cdot (-2) + 7 = 2 \cdot (-2) + 3$$

Die Gleichung in Beispiel 2 (zwei gleichwertigen Terme) ist allgemeingültig. Alle Zahlen aus dem Definitionsbereich sind Lösungen dieser Gleichung.

Beispiel 2:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Der *Definitionsbereich* einer Gleichung (*Definitionsmenge*, *Grundmenge*) ist die Menge der Zahlen, die man für die Variable einsetzen darf.

a) Lies den Informationstext. ✓

in Bsp. 1 und 2 Lösungen einsetzen, Werte der Terme links u. rechts angeben

- $T_{\text{links}}(-2) = \underline{-1}$ $T_{\text{rechts}}(-2) = \underline{-1}$
- $T_{\text{li}}(-2) = \underline{(-2+3)^2 = 1^2 = 1}$ $T_{\text{re}}(-2) = \underline{(-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 9 = 4 - 12 + 9 = 1}$
- $T_{\text{li}}(4) = \underline{(4+3)^2 = 7^2 = 49}$ $T_{\text{re}}(4) = \underline{4^2 + 6 \cdot 4 + 9 = 16 - 24 + 9 = 49}$

b) Wähle mindestens zwei Definitionsbereiche und löse die zugehörige Gleichung.

IN natürliche Zahlen

$$4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 13 \quad | -2 \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x + 7 = 13 \quad | -7$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x = 6 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Inhalt der Schachteln:

jeweils drei Streichhölzer

IN₀ natürliche Zahlen mit 0

$$4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 7 \quad | -2 \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x + 7 = 7 \quad | -7$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x = 0 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Inhalt der Schachteln:

alle Schachteln sind leer

ℤ ganze Zahlen

$$4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 1 \quad | -2 \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x + 7 = 1 \quad | -7$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x = -6 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Inhalt der Schachteln: In jeder

Schachtel liegen Schuldscheine mit gleichlautendem Text: „Ich schulde dir drei Streichhölzer.“

ℚ rationale Zahlen

$$4 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 8 \quad | -2 \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x + 7 = 8 \quad | -7$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x = 1 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow x = 0,5$$

Inhalt der Schachteln:

jeweils ein halbes Streichholz

c) Begründe: Diese Gleichungen kannst du mit Streichhölzern und Schachteln legen. Die Anzahl der Schachteln sowie die Anzahl der Streichhölzer ist in allen vier Gleichungen eine positive ganze Zahl. Gib den Inhalt der Schachteln bei den von dir gewählten Gleichungen an. siehe Lösungen