MATHE 364

03.12. Eine unglaubliche Gleichung!

Mathematikus zeigt auf seiner Zaubertafel eine verdächtige Rechnung:

$$0{,}3^2+0{,}7=0{,}7^2+0{,}3\,.$$

Viele lachen, als Vito ruft *„Stimmt, ergibt beides 1*“. Mathematikus aber sagt: *„Jemanden auszulachen gehört sich nicht.*
Übrigens hat Vito uns gerade einen guten Tipp gegeben.
Aber bitte erkläre doch für uns alle, was die kleine hochgestellte 2 bedeutet.“

a) **Erkläre** die Bedeutung der kleinen hochgestellten Zwei in $0{,}3^2$.

Weise nach, dass die Rechnung auf der Zaubertafel richtig ist.
Berechne dazu den Wert des linken Terms und den Wert des rechten Terms:

$0{,}3^2+0{,}7=$

$0{,}7^2+0{,}3=$

b) Eine andere Rechnung für die Zaubertafel ist $\left(\frac{4}{10}\right)^2+\frac{6}{10}=\left(\frac{6}{10}\right)^2+\frac{4}{10}$.

Weise nach, dass auch diese Rechnung richtig ist.

Gib weitere Beispiele **an** und **weise nach**, dass die Rechnung richtig ist.

c) Die beiden Zahlen sollen *a* und *b* heißen. Die Zahl *a* ist beliebig, aber die beiden Zahlen *a* und *b* müssen zusammen eine Bedingung erfüllen (*berücksichtige den Tipp von Vito*!). **Weise nach**, dass dann die Rechnung stimmt.

MATHE 364

Lösungen 03.12. Eine unglaubliche Gleichung!

Mathematikus zeigt auf seiner Zaubertafel eine verdächtige Rechnung:

$$0{,}3^2 + 0{,}7 = 0{,}7^2 + 0{,}3.$$

Viele lachen, als Vito ruft „*Stimmt, ergibt beides 1*“. Mathematikus aber sagt:
„Jemanden auszulachen gehört sich nicht.
Übrigens hat Vito uns gerade einen guten Tipp gegeben.
Aber bitte erkläre doch für uns alle, was die kleine hochgestellte 2 bedeutet.“

a) **Erkläre** die Bedeutung der kleinen hochgestellten Zwei in $0{,}3^2$.

$0{,}3^2$ ist eine Abkürzung für $0{,}3 \cdot 0{,}3$. Dabei heißt $0{,}3^2$ *Potenz*, die Zahl 0,3 ist die *Basis* (oder *Grundzahl*), die kleine 2 heißt *Exponent* (oder *Hochzahl*).
Die Hochzahl gibt an, wie oft die Grundzahl mit sich selbst multipliziert wird.

Weise nach, dass die Rechnung auf der Zaubertafel richtig ist.
Berechne dazu den Wert des linken Terms und den Wert des rechten Terms:

$0{,}3^2 + 0{,}7 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 = 0{,}09 + 0{,}7 = 0{,}79$

$0{,}7^2 + 0{,}3 = 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}49 + 0{,}3 = 0{,}79$

b) **Nachweis** für $\left(\frac{4}{10}\right)^2 + \frac{6}{10} = \left(\frac{6}{10}\right)^2 + \frac{4}{10}$

$$\left(\frac{4}{10}\right)^2 + \frac{6}{10} = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{6}{10} = \frac{16}{100} + \frac{6}{10} = \frac{76}{100}$$

$$\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = \frac{36}{100} + \frac{4}{10} = \frac{76}{100}$$

eigene Beispiele: individuelle Lösungen

$0{,}2^2 + 0{,}8 = 0{,}8^2 + 0{,}2 = 0{,}84$

$1{,}2^2 + (-0{,}2) = (-0{,}2)^2 + 1{,}2 = 1{,}24$

Wichtig ist dabei, dass die Summe der beiden Zahlen 1 sein muss, Vitos Tipp!

c) **Beweis**: a und b sind zwei Zahlen, die die Bedingung $a + b = 1$ erfüllen.

Unter dieser Bedingung ist $b = 1 - a$.

Linker Term: $a^2 + b = a^2 + (1 - a) = a^2 + 1 - a$

Durch Anwenden der zweiten binomischen Formel weise ich nach, dass auch der rechte Term $a^2 + 1 - a$ ergibt.

Rechter Term: $b^2 + a = (1 - a)^2 + a = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot a + a^2 + a$
$= a^2 - 2a + 1 + a = a^2 + 1 - a$

Unter der Bedingung $a + b = 1$ sind der linke Term $a^2 + b$ und der rechte Term $b^2 + a$ gleichwertig.