MATHE 364

28.12. äquivalente Gleichungen

I $3\cdot x+10=5\cdot x+2$

II $3\cdot x+5=5\cdot x-3$

III $3\cdot x+5=-2\cdot x+25$

IV $3\cdot x-2=-2\cdot x+18$

V $3\cdot x-2=2{,}5\cdot x$

VI $3\cdot x-2=-2{,}5\cdot x+20$

a) Wähle die Gleichung aus, die du am einfachsten findest.
Wähle eine Gleichung aus, die du als schwieriger empfindest.
Gib an, was die diese beiden Gleichungen gemeinsam haben.
Nenne Unterschiede zwischen diesen beiden Gleichungen.

b) **Löse** die einfachere Gleichung.
Führe die Probe durch:
Setze dazu deine Lösung in den linken Term sowie in den rechten Term **ein**.
Gib an, woran du erkennen kannst, dass ‚*die Probe aufgeht*'.
Gib an, woran du erkennen kannst, dass ‚*die Probe nicht aufgeht*'

c) Gleichung **I** und Gleichung **II** sind *äquivalent*.
Erkläre diesen Begriff: Wann sind zwei Gleichungen *äquivalent*?

d) **Wahlaufgabe**:

- Weise nach, dass Gleichung **I** und Gleichung **II** *äquivalent* sind.
  Forme dazu die erste Gleichung **um**:
  Gib geeignete Äquivalenzumformungen **an**, so dass aus der ersten Gleichung die andere Gleichung entsteht.
- Die Gleichungen **II** und **III** haben beide die Lösung $x = 4$.
  Begründe: Dann muss auch die Gleichung $5\cdot x-3=-2\cdot x+25$ die Lösung 4 haben.
- Die Gleichungen **V** und **VI** haben beide die Lösung $x = 4$.
  Begründe, dass die folgende Rechnung sinnvoll ist:

$$\begin{array}{l} 3\cdot x-2=\ \ 2{,}5\cdot x \\ \underline{3\cdot x-2=-2{,}5\cdot x+20} \\ \underline{\underline{6\cdot x-4=\quad 0\cdot x+20}} \end{array}$$

Lösungen 28.12. äquivalente Gleichungen

Unabhängig von indiviuellen Bewertungen wird vermutlich die erste Gleichung **I** $3 \cdot x + 10 = 5 \cdot x + 2$ als die einfachste von allen angesehen.

Bei dieser Gleichung ist nämlich im linken Term *und* im rechten Term

- der Vorfaktor von *x* eine natürliche Zahl ($3 \cdot x$ sowie $5 \cdot x$)
- die reine Zahl (ohne *x*) eine natürliche Zahl.

a) Gemeinsamkeiten:

- Der linke Term beginnt bei allen Gleichungen mit $3 \cdot x$.
- Alle Gleichungen haben die Lösung $x = 4$ (Das ist aber nicht direkt sichtbar).

Unterschiede zu $\mathbf{3 \cdot x + 10 = 5 \cdot x + 2}$ bzw. **Schwierigkeiten:**

Gleichung	Term links	Term rechts
$3 \cdot x + 5 = 5 \cdot x - 3$	5 statt 10 kein Problem	reine Zahl −3 negativ
$3 \cdot x + 5 = -2 \cdot x + 25$	5 statt 10 kein Problem	−2 negativer Vorfaktor von *x*
$3 \cdot x - 2 = -2 \cdot x + 18$	reine Zahl −2 negativ	−2 negativer Vorfaktor von *x*
$3 \cdot x - 2 = 2{,}5 \cdot x$	reine Zahl −2 negativ	2,5 rationaler Vorfaktor von *x*
$3 \cdot x - 2 = -2{,}5 \cdot x + 20$	reine Zahl −2 negativ	−2,5 negativer Vorfaktor von *x*

b)

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot x + 10 = 5 \cdot x + 2 && \mid -2 \\
\Leftrightarrow\ & 3 \cdot x + 8 = 5 \cdot x && \mid -3 \cdot x \\
\Leftrightarrow\ & 8 = 2 \cdot x && \mid :2 \\
\Leftrightarrow\ & 4 = x &&
\end{aligned}
$$

Probe:

$$T_{\text{links}}(4) = 3 \cdot 4 + 10 = 12 + 10 = 22$$
$$T_{\text{rechts}}(4) = 5 \cdot 4 + 2 = 20 + 2 = 22$$

Wenn die (korrekte) Lösung eingesetzt wird, dann haben der linke Term und der rechte Term beide den gleichen Wert.

Wenn nicht die Lösung einsetzt wird, sondern eine andere Zahl, dann haben der linke Term und der rechte Term verschiedene Werte.

c) Erklärung: *Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn beide Gleichungen dieselbe Lösung haben.*

d)

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot x + 10 = 5 \cdot x + 2 && \mid -5 \\
\Leftrightarrow\ & 3 \cdot x + 5 = 5 \cdot x - 3 &&
\end{aligned}
$$

- Wenn die Gleichungen **II** und **III** beide die Lösung $x = 4$ haben, dann haben der linke Term $3 \cdot x + 5$ und die beiden rechten Terme $5 \cdot x - 3$ bzw. $-2 \cdot x + 25$ beim Einsetzen der Lösung $x = 4$ alle drei den gleichen Wert 17. Also hat auch die Gleichung $5 \cdot x - 3 = -2 \cdot x + 25$ die Lösung 4; denn die Probe ergibt $17 = 17$.
- Wenn die Gleichungen **V** und **VI** beide die Lösung $x = 4$ haben, dann haben der linke Term $3 \cdot x - 2$ und die beiden rechten Terme $2{,}5 \cdot x$ bzw. $-2{,}5 \cdot x + 20$ beim Einsetzen der Lösung $x = 4$ alle drei den gleichen Wert 10. Addiert man die beiden linken Terme sowie die beiden rechten Terme, ergibt das die Gleichung $6 \cdot x - 4 = 20$. Sie hat die Lösung 4, denn die Probe ergibt $20 = 20$.

Lösungen 28.12. äquivalente Gleichungen

Lösungen der Gleichungen **II** bis **VI**

II

$$\begin{aligned} & 3\cdot x+5=5\cdot x-3 && \mid -3\cdot x \\ \Leftrightarrow\ & 5=2\cdot x-3 && \mid +3 \\ \Leftrightarrow\ & 8=2\cdot x && \mid :2 \\ \Leftrightarrow\ & 4=x \end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned} & 3\cdot x+5=-2\cdot x+25 && \mid +2\cdot x \\ \Leftrightarrow\ & 5\cdot x+5=25 && \mid -5 \\ \Leftrightarrow\ & 5\cdot x=20 && \mid :5 \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \end{aligned}$$

IV

$$\begin{aligned} & 3\cdot x-2=-2\cdot x+18 && \mid +2\cdot x \\ \Leftrightarrow\ & 5\cdot x-2=18 && \mid +2 \\ \Leftrightarrow\ & 5\cdot x=20 && \mid :5 \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \end{aligned}$$

V

$$\begin{aligned} & 3\cdot x-2=2{,}5\cdot x && \mid -2{,}5\cdot x \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}5\cdot x-2=0 && \mid +2 \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}5\cdot x=2 && \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \end{aligned}$$

VI

$$\begin{aligned} & 3\cdot x-2=-2{,}5\cdot x+20 && \mid +2{,}5\cdot x \\ \Leftrightarrow\ & 5{,}5\cdot x-2=20 && \mid +2 \\ \Leftrightarrow\ & 5{,}5\cdot x=22 && \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow\ & 11\cdot x=44 && \mid :4 \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \end{aligned}$$

Lösung der Gleichung $5\cdot x-3=-2\cdot x+25$

$$\begin{aligned} & 5\cdot x-3=-2\cdot x+25 && \mid +2\cdot x \\ \Leftrightarrow\ & 7\cdot x-3=25 && \mid +3 \\ \Leftrightarrow\ & 7\cdot x=28 && \mid :7 \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \end{aligned}$$

Lösung der Gleichung $6\cdot x-4=0\cdot x+20$

$$\begin{aligned} & 6\cdot x-4=0\cdot x+20 && \mid +4 \\ \Leftrightarrow\ & 6\cdot x=24 && \mid :6 \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \end{aligned}$$