

MATHE 364

09.01. Gleichungen mit ganz vielen Schwierigkeiten

Schwierigkeiten beim Lösen von Gleichungen


Beim Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen gibt es zwei Schwierigkeiten.

- Du musst erkennen, welche Äquivalenzumformung geeignet ist, um eine einfachere Gleichung zu erhalten.
- Du musst diese Äquivalenzumformung fehlerfrei ausführen.

Die Terme links und rechts des Gleichheitszeichens können weitere Schwierigkeiten enthalten:

- **I** Klammern, vor denen ein Faktor steht
- **II** Zwischen dem Faktor und der Klammer fehlt das Multiplikationszeichen.
- **III** Der Faktor kann eine negative Zahl sein.
- **IV** Klammern, vor denen nur ein Minuszeichen steht (*„Minuskammern“*) – hier wird nicht gut deutlich, dass der Faktor vor der Klammer -1 ist.
- **V** In der Klammer steht vor dem ersten Summanden kein weiteres Zeichen. Das ist ein *„unsichtbares Pluszeichen“*.
- **VI** In der Klammer stehen Minuszeichen.

Bevor du in dem Term zusammenfassen kannst, musst du die Klammern durch Ausmultiplizieren auflösen. Jede der genannten Schwierigkeiten kann zu einem Fehler führen. Deshalb solltest du die Gleichungen beim Üben zur Kontrolle

- schrittweise mit dem CAS von GeoGebra lösen *oder*
- im CAS von GeoGebra direkt mit dem Button  lösen *oder*
- mit der SOLVE-Funktion des Taschenrechners lösen.

a) Lies den Informationstext.

b) $x + (x + 1) + (x + 10) + (x + 9) + (x + 20) = 250$

$$11 - 3(12 - x) - 8 = 2(x - 3) + 15$$

$$3x - 100 = -2x + 110$$

$$17 - (3 - x) + 3 + x = -3(12 - x) + 11$$

$$2(5 - 5x) + \frac{1}{2}(4x + 50) + 12^2 = 2\frac{1}{2}(12 - 3x) + 7 \cdot 17 + 7 + \frac{1}{21}x$$

- Wähle mindestens *eine* der Gleichungen, die du gerne lösen möchtest. **Löse** diese Gleichung mit Äquivalenzumformungen und **überprüfe** die Lösung.
- Wähle *eine andere* Gleichung, die du nicht gerne lösen möchtest. Du musst sie nicht lösen, aber **ergänze** fehlende Zeichen und **beschrifte** schwierige Stellen in den Termen. Dafür kannst du die Nummern **I** bis **VI** verwenden.

a) Lies den Informationstext. ✓

b) Die erste Gleichung beschreibt, wie du das F-Pentomino auf das Hunderterfeld legen musst, damit die Summe der abgedeckten Zahlen 250 beträgt. Die „Plusklammern“ sind harmlos. Sie sollen lediglich verdeutlichen, dass $(x+1)$, $(x+10)$ usw. die Nachbarzahlen der Zahl x im Hunderterfeld darstellen.

$$\begin{aligned}
 &x + (x+1) + (x+10) + (x+9) + (x+20) = 250 && \text{Zusammenfassen} \\
 \Leftrightarrow &5 \cdot x + 40 = 250 && | -40 \\
 \Leftrightarrow &5 \cdot x = 210 && | :5 \\
 \Leftrightarrow &x = 42 \\
 &42 + 43 + 52 + 51 + 62 = 250
 \end{aligned}$$

41	42	43
51	52	53
61	62	63

Die zweite Gleichung hat keine inhaltliche Bedeutung.

Sie enthält die Schwierigkeiten **I**, **II**, **III** und **VI**.

$$\begin{aligned}
 &\text{III und I} && \text{I} \\
 &11 - 3(12 - x) - 8 = 2(x - 3) + 15 \\
 &\text{II} \uparrow \text{VI} \uparrow && \text{II} \uparrow \text{VI} \uparrow \\
 &11 - 3 \cdot (12 - x) - 8 = 2 \cdot (x - 3) + 15 && \text{Ausmultiplizieren} \\
 \Leftrightarrow &11 - 36 + 3 \cdot x - 8 = 2 \cdot x - 6 + 15 && \text{Zusammenfassen} \\
 \Leftrightarrow &-33 + 3 \cdot x = 2 \cdot x + 9 && | +33 \\
 \Leftrightarrow &3 \cdot x = 2 \cdot x + 42 && | -2 \cdot x \\
 \Leftrightarrow &x = 42
 \end{aligned}$$

In der dritten Gleichung fehlen lediglich Multiplikationszeichen, und es gibt eine negative Zahl sowie einen negativen Faktor vor der Variablen x .

$$\begin{aligned}
 &\text{II} \downarrow && \text{III und II} \\
 &3x - 100 = -2x + 110 \\
 &3 \cdot x - 100 = -2 \cdot x + 110 && | +2 \cdot x \\
 \Leftrightarrow &5 \cdot x - 100 = 110 && | +100 \\
 \Leftrightarrow &5 \cdot x = 210 && | :5 \\
 \Leftrightarrow &x = 42
 \end{aligned}$$

Die vierte Gleichung hat keine inhaltliche Bedeutung.

Sie enthält die Schwierigkeiten **I**, **II**, **III** und **VI**.

$$\begin{aligned}
 &\text{IV} \downarrow && \text{I, II, III} \\
 &17 - (3 - x) + 3 + x = -3(12 - x) + 11 \\
 &\text{VI} \uparrow && \text{VI} \uparrow \\
 &17 - (3 - x) + 3 + x = -3 \cdot (12 - x) + 11 && \text{Minusklammer auflösen, Ausmultiplizieren} \\
 \Leftrightarrow &17 - 3 + x + 3 + x = -36 + 3 \cdot x + 11 && \text{Zusammenfassen} \\
 \Leftrightarrow &17 + 2 \cdot x = -25 + 3 \cdot x && | +25 \\
 \Leftrightarrow &42 + 2 \cdot x = 3 \cdot x && | -2 \cdot x \\
 \Leftrightarrow &42 = x
 \end{aligned}$$

Lösungen 09.01. Gleichungen mit ganz vielen Schwierigkeiten

Die fünfte Gleichung hat keine inhaltliche Bedeutung.

Sie enthält nahezu alle Schwierigkeiten, die man in eine lineare Gleichung einbauen kann. Rechenfehler sind nahezu unvermeidbar. Deshalb erscheint es sinnvoll, solche Gleichungen, wenn überhaupt, mit der SOLVE-Funktion des Taschenrechners oder des CAS zu lösen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{I} \downarrow & & \text{I, II} & & \text{I, II} \downarrow & \text{VI} \downarrow & \text{I} \downarrow \\
 2(5 - 5x) + \frac{1}{2}(4x + 50) + 12^2 = 2\frac{1}{2}(12 - 3x) + 7 \cdot 17 + 7 + \frac{1}{21}x \\
 \text{VI} \uparrow & & \uparrow \text{Bruch} & \text{gemischte} & \uparrow \text{Zahl} & & \text{Bruch} \uparrow
 \end{array}$$

Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (5 - 5 \cdot x) + \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot x + 50) + 12^2 &= \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot (12 - 3 \cdot x) + 7 \cdot 17 + 7 + \frac{1}{21} \cdot x \\
 \Leftrightarrow 10 - 10 \cdot x + 2 \cdot x + 25 + 144 &= 30 - 7,5 \cdot x + 119 + 7 + \frac{1}{21} \cdot x \\
 \Leftrightarrow &-8 \cdot x + 179 = 156 + \frac{315}{42} \cdot x + \frac{2}{42} \cdot x && | -156 \\
 \Leftrightarrow &-8 \cdot x + 23 = \frac{317}{42} \cdot x && | +8 \cdot x \\
 \Leftrightarrow &23 = \frac{653}{42} \cdot x && | : \frac{653}{42} \\
 \Leftrightarrow &42 = x
 \end{aligned}$$