MATHE 364

18.01. Der Satz vom Nullprodukt

Information

Die Rechnungen $0 \cdot 42 = 0$ und $12{,}5 \cdot 0 = 0$ erfordern wohl keine Erklärung.

Der Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt nimmt den Wert 0 an, wenn einer der Faktoren den Wert 0 hat.

Wenn die beiden Faktoren Zahlen sind, erkennt man dieses Ergebnis sofort. Wie verhält es sich, wenn die Faktoren Variablen wie *a* oder *b* sind? Wann ist das Produkt $a \cdot b$ gleich 0? Dafür muss $a = 0$ oder $b = 0$ sein.

Wenn die Faktoren aber nicht einfache Zahlen oder Variablen wie *a* und *b* sind, sondern Terme wie $(x-5)$ oder $(x+3)$, dann muss man untersuchen, bei welchem Wert von *x* die Klammern den Wert 0 annehmen.

a) **Lies** den Informationstext.

b) **Löse** die Gleichung $x - 5 = 0$ durch eine Äquivalenzumformung.
- **Löse** die Gleichung $x + 3 = 0$ durch eine Äquivalenzumformung.
- **Gib an**, bei welchen Werten von *x* der Term $(x-5) \cdot (x+3)$ den Wert 0 hat.

c) **Ergänze** in jeder Zeile der Tabelle mindestens drei fehlende Werte.
- **Erkläre**, warum $(x-5)$ und $(x+3)$ nicht gleichzeitig den Wert 0 annehmen.

x	−6	−5	−4			−1	0	1	2	3	4	5	
$x-5$	−11	−10	−9		−7	−6		−4		−2	−1	0	1
$x+3$	−3	−2		0	1			4	5		7	8	
$(x-5)\cdot(x+3)$	33		9		−7	−12	−15		−15	−12			

d) **Gib an**, bei welchen Werten von *x* der Term $(x-3) \cdot (x-11)$ den Wert 0 hat.
- **Löse** die Gleichung $(x-5)\cdot(x+3) = (x-3)\cdot(x-11)$ hilfsmittelfrei.
- **Gib** im CAS von GeoGebra den linken Term $(x-5)\cdot(x+3)$ und den rechten Term $(x-3)\cdot(x-11)$ **ein**. Gehe in Zeile 3, klicke Zeile 1 an, gib = ein, klicke Zeile 2 an, so entsteht die Gleichung $(x-5)\cdot(x+3) = (x-3)\cdot(x-11)$.
- **Setze** in CAS-Zeile 1, 2 und 3 das Häkchen. **Betrachte** die Graphik-Ansicht.
- **Gib** die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Graphen **an**: S (__|__).
- **Erkläre** den Zusammenhang zwischen den Koordinaten *x* und *y* des Schnittpunktes und der Gleichung $(x-5)\cdot(x+3) = (x-3)\cdot(x-11)$.
- Du hast die Gleichungen $x-5=0$, $x+3=0$, $x-3=0$ und $x-11=0$ gelöst. **Gib an**, welche Punkte in der Graphik-Ansicht von GeoGebra zu diesen Lösungen gehören.

Lösungen 18.01. Der Satz vom Nullprodukt

Der Satz vom Nullprodukt
Ein Produkt nimmt den Wert 0 an, wenn einer der Faktoren den Wert 0 hat.

a) **Lies** den Informationstext. √

b) die Gleichungen $x-5=0$ und $x+3=0$ **lösen**

$$x-5=0 \quad |+5 \qquad\qquad x+3=0 \quad |-3$$
$$\Leftrightarrow x = 5 \qquad\qquad \Leftrightarrow x = -3$$

Gib an, bei welchen Werten von x der Term $(x-5)\cdot(x+3)$ den Wert 0 hat:

bei $x = 5$ und bei $x = -3$, denn das Produkt $(x - 5) \cdot (x + 3)$ nimmt den Wert 0 an, wenn einer der Faktoren den Wert 0 hat. Bei $x = 5$ wird die 1. Klammer 0, bei $x = -3$ wird die 2. Klammer 0.

c) **Ergänze** in jeder Zeile der Tabelle mindestens drei fehlende Werte. s.u.

x	−6	−5	−4	***−3***	***−2***	−1	0	1	2	***3***	4	5	***6***
$x-5$	−11	−10	−9	***−8***	−7	−6	***−5***	−4	***−3***	−2	−1	***0***	1
$x+3$	−3	−2	***−1***	0	1	***2***	***3***	4	5	***6***	7	8	***9***
$(x-5)\cdot(x+3)$	33	***20***	9	***0***	−7	−12	−15	***−16***	−15	−12	***−7***	***0***	***9***

- **Erkläre**, warum $(x-5)$ und $(x+3)$ nicht gleichzeitig den Wert 0 annehmen.

  Bei $x = 5$ hat die erste Klammer den Wert 0, aber die zweite Klammer hat den Wert 8, denn $-3 + 3 = 0$ und $5 + 3 = 8$. Dennoch ist $0 \cdot 8 = 0$.

  Bei $x = -3$ hat die erste Klammer den Wert -8, aber die zweite Klammer den Wert 0, denn $-3 - 5 = -8$ und $-3 + 3 = 0$. Dennoch ist $-8 \cdot 0 = 0$.

d) **Gib an**, bei welchen Werten von x der Term $(x-3)\cdot(x-11)$ den Wert 0 hat:

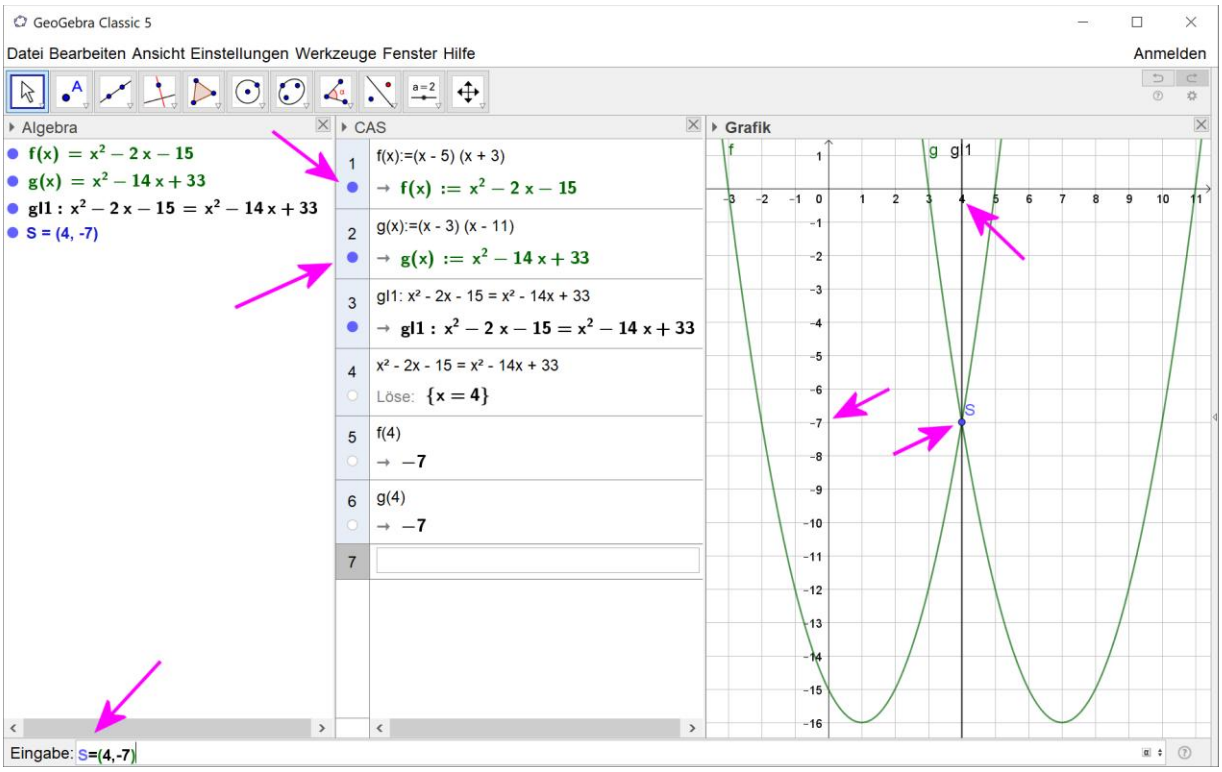
bei $x = 3$ und bei $x = 11$, denn $3 - 3 = 0$ und $11 - 11 = 0$.

- **Löse** die Gleichung $(x-5)\cdot(x+3)=(x-3)\cdot(x-11)$ hilfsmittelfrei.

$$\begin{aligned}
& (x-5)\cdot(x+3) = (x-3)\cdot(x-11) && |\text{Ausmultiplizieren}\\
\Leftrightarrow\ & x^2+(-5+3)\cdot x+(-5)\cdot 3 = x^2+(-11+(-3))\cdot x+(-3)\cdot(-11) && |\text{Zusammenfassen}\\
\Leftrightarrow\ & x^2-2\cdot x-15 = x^2-14\cdot x+33 && |-x^2\\
\Leftrightarrow\ & -2\cdot x-15 = -14\cdot x+33 && |+14\cdot x\\
\Leftrightarrow\ & 12\cdot x-15 = 33 && |+15\\
\Leftrightarrow\ & 12\cdot x = 48 && |:12\\
\Leftrightarrow\ & x = 4
\end{aligned}$$

Abbildungen zum Arbeiten mit GeoGebra auf der nächsten Seite

d) im CAS von GeoGebra Terme $(x-5)\cdot(x+3)$ und $(x-3)\cdot(x-11)$ **eingeben**, in Zeile 3 gehen, Zeile 1 anklicken, Gleichheitszeichen eingeben, Zeile 2 anklicken, Gleichung $(x-5)\cdot(x+3)=(x-3)\cdot(x-11)$ **erzeugen**, in Zeile 1, 2 und 3 das Häkchen setzen, Graphik-Ansicht **betrachten** siehe Abbildung



- **Gib** die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Graphen **an**: S (**4**|**−7**).
- **Erkläre** den Zusammenhang zwischen den Koordinaten x und y des Schnittpunktes und der Gleichung $(x-5)\cdot(x+3)=(x-3)\cdot(x-11)$.

  Die Gleichung hat die Lösung $x = 4$. Setzt man die Lösung = 4 in den linken sowie in den rechten Term ein, erhält man y:

  Term links: $(4-5)\cdot(4+3) = -1\cdot 7 = -7$

  Term rechts: $(4-3)\cdot(4-11) = 1\cdot(-7) = -7$

  Die Graphen der Funktionen f und g haben an der Stelle $x = 4$ beide den selben Funktionswert $y = -7$.

- Du hast die Gleichungen $x-5=0$, $x+3=0$, $x-3=0$ und $x-11=0$ gelöst. **Gib an**, welche Punkte in der Graphik-Ansicht von GeoGebra zu diesen Lösungen gehören.

  Zu den Lösungen $x = 5$, $x = -3$, $x = 3$ und $x = 11$
  gehören die Punkte (5 | 0), (−3 | 0), (3 | 0) und (11 | 0).
  Es sind die Schnittpunkte der Graphen f und g mit der x-Achse.

  Der linke Graph beschreibt, wie sich das Produkt $(x-5)\cdot(x+3)$ verhält.

  Der rechte Graph beschreibt, wie sich das Produkt $(x-3)\cdot(x-11)$ verhält.