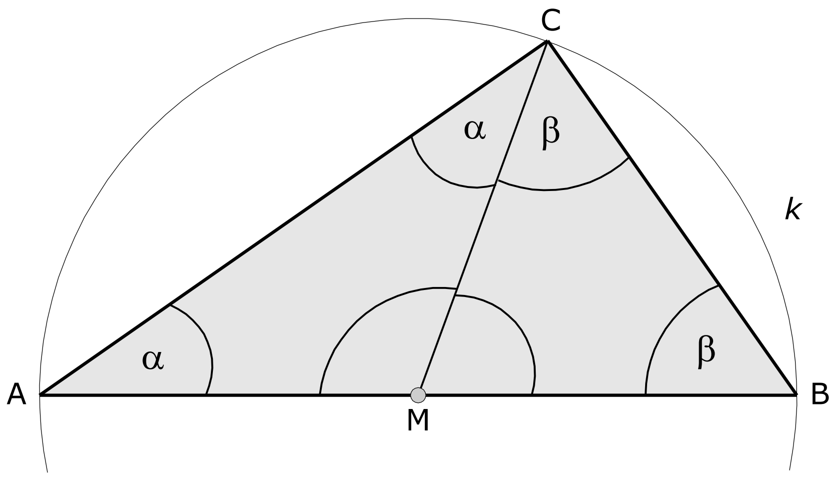
MATHE 364

24.11. Beweise für den Satz von Thales

Wahlaufgabe: Bearbeite entweder das Beweispuzzle **a)** auf dieser Seite
oder den Beweis **b)** auf den nächsten Seite.

a) Beweispuzzle: **Ordne** die Kärtchen in einer sinnvollen Reihenfolge **an**.
Beschrifte die Kärtchen dann mit den Nummern **1)**, **2)**, ...



__) Voraussetzung: Der Punkt C liegt auf der Kreislinie von *k*.

__) Unter diesen Voraussetzungen ist das Dreieck ABC stets rechtwinklig.

__) Aus $2\cdot\alpha + 2\cdot\beta = 180°$ folgt $\alpha + \beta = 90°$.

__) Der Punkt M ist Mittelpunkt des Kreises *k* und der Strecke $\overline{AB}$.

__) Basiswinkelsatz: Die Winkel $\measuredangle$ MAC und $\measuredangle$ ACM sind gleich groß.

__) Die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ sind Radien des Kreises *k*.

__) Deshalb sind die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ gleich lang.

__) Basiswinkelsatz: Die Winkel $\measuredangle$ CBM und $\measuredangle$ MCB sind gleich groß.

__) Deshalb sind die Dreiecke AMC und MBC gleichschenklig.

__) Winkelsumme im Dreieck ABC: $\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180°$

__) Also ist $\measuredangle$ ACB immer ein rechter Winkel.

__) Voraussetzung: Die Strecke $\overline{AB}$ ist der Durchmesser des Kreises *k*.

MATHE 364

24.11. Beweise für den Satz von Thales

Wahlaufgabe: Bearbeite entweder **b)** *oder* **a)** auf der ersten Seite.

Satz des Thales: Du stichst den Zirkel im Mittelpunkt einer Strecke ein. Du öffnest den Zirkel bis zum Anfangspunkt. Auf diese Weise *„nimmst du die halbe Länge der Strecke in den Zirkel*". Du zeichnest einen Kreis. Dabei ist die Strecke ist der Durchmesser dieses Kreises.

Du zeichnest auf der Kreislinie an einer beliebigen Stelle einen dritten Punkt (es darf nicht der Anfangspunkt oder der Endpunkt des Durchmessers sein).

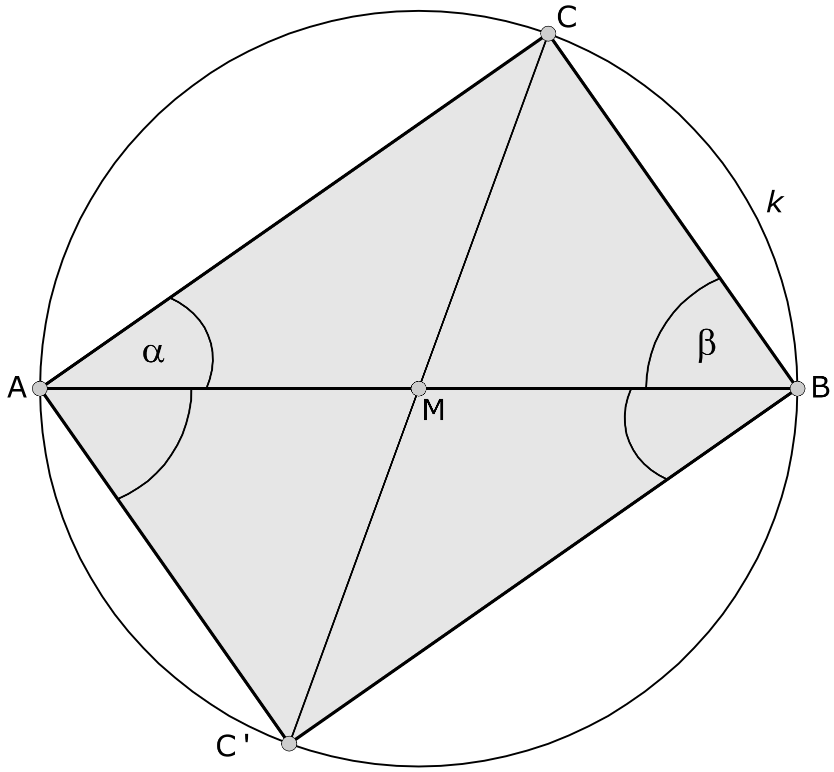
Wenn du diese drei Punkte verbindest (den Anfangspunkt der Strecke, den Endpunkt und den dritten Punkt auf der Kreislinie), dann erhältst du immer ein rechtwinkliges Dreieck.

Der Umfangswinkel über einem Durchmesser ist immer ein rechter Winkel.

Umkehrung: Du hast ein rechtwinkliges Dreieck. Du stichst in der Mitte der längsten Seite den Zirkel ein, nimmst die Entfernung bis zum Anfangspunkt der Seite in den Zirkel und zeichnest einen Kreis mit diesem Radius. Dann liegt der dritte Eckpunkt des Dreiecks immer genau auf der Kreislinie.

b) **Beweisidee**: Die Zeichnung aus **a)** wird ergänzt. Der Punkt C wird durch eine Punktspiegelung am Punkt M abgebildet. Man kann auch sagen, dass die Strecke $\overline{MC}$ um 180° gedreht wird; das Drehzentrum ist dabei der Punkt M.

- **Begründe**, dass das Viereck BCAC′ stets ein Rechteck sein muss.

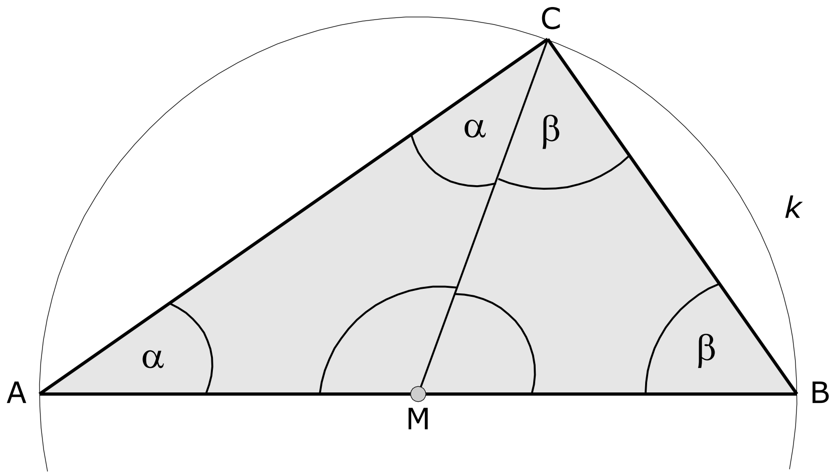


MATHE 364

Lösungen 2b.11. **Beweise für den Satz von Thales**

Wahlaufgabe a)

a) Beweispuzzle: **Ordne** die Kärtchen in einer sinnvollen Reihenfolge **an**.
Beschrifte die Kärtchen dann mit den Nummern **1)**, **2)**, ...



Satz des Thales

1) Voraussetzung: Die Strecke $\overline{AB}$ ist der Durchmesser des Kreises *k*.

2) Voraussetzung: Der Punkt C liegt auf der Kreislinie von *k*.

3) Unter diesen Voraussetzungen ist das Dreieck ABC stets rechtwinklig.

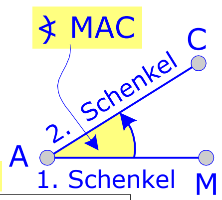
Beweis:

4) Der Punkt M ist Mittelpunkt des Kreises *k* und der Strecke $\overline{AB}$.

5) Die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ sind Radien des Kreises *k*.

6) Deshalb sind die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ gleich lang.

7) Deshalb sind die Dreiecke AMC und MBC gleichschenklig.



"M Punkt auf dem 1. Schenkel, A Scheitelpunkt, C Punkt auf dem 2. Schenkel"

8) Basiswinkelsatz: Die Winkel ∢ MAC und ∢ ACM sind gleich groß.

9) Basiswinkelsatz: Die Winkel ∢ CBM und ∢ MCB sind gleich groß.

10) Winkelsumme im Dreieck ABC: $\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180°$

11) Aus $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 180°$ folgt $\alpha + \beta = 90°$.

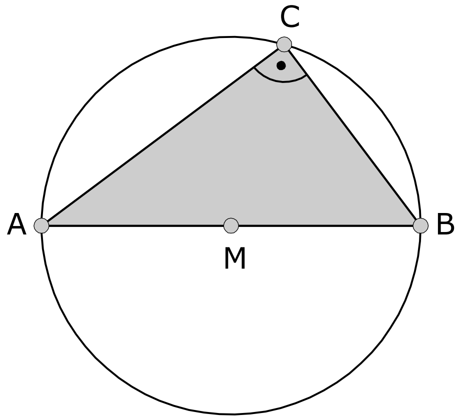
12) Also ist ∢ ACB immer ein rechter Winkel.

8) und **9)** darfst du vertauschen.

Lösungen 2b.11. Beweise für den Satz von Thales

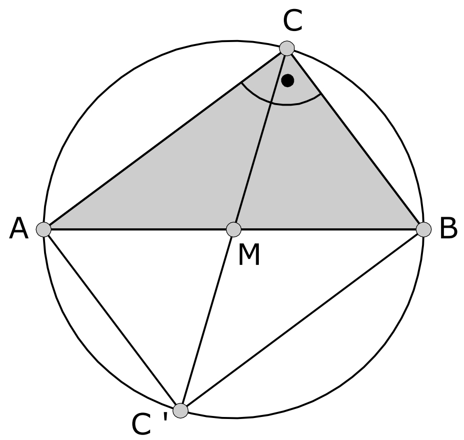
Wahlaufgabe b)

Satz des Thales: **Wenn** ein Punkt C auf der Kreislinie eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ liegt,
dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel $\sphericalangle$ ACB.



Häufig wird für diese Aussage eine kürzere Formulierung gewählt:
Der Umfangswinkel über einem Durchmesser ist immer ein rechter Winkel.

Voraussetzungen: Die Strecke $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser des Kreises *k*.
Der Punkt M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
Der Punkt M ist Mittelpunkt des Kreises *k*.
Der Punkt C liegt auf der Kreislinie von *k*.



Beweis: Der Punkt C wird durch eine Punktspiegelung am Punkt M abgebildet. Man kann auch sagen, dass die Strecke $\overline{MC}$ um 180° gedreht wird; das Drehzentrum ist dabei der Punkt M. Der Bildpunkt des Punktes C ist C ′.
Durch die Punktspiegelung (Drehung um 180°) sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{C'B}$ parallel.
Aus dem gleichen Grund sind auch die Strecken $\overline{CB}$ und $\overline{AC'}$ parallel.
Also ist das Viereck BCAC ′ ein Parallelogramm.

Im Viereck BCAC ′ sind die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{C'C}$ die Diagonalen.
Die Diagonalen sind gleich lang, denn sie sind Durchmesser des Kreises *k*.
Der Punkt M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Durch die Punktspiegelung (Drehung um 180°) sind die Strecken $\overline{C'M}$ und $\overline{MC}$ gleich lang.
Also ist M auch Mittelpunkt der Diagonalen $\overline{C'C}$. Demzufolge ist der Punkt M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen und teilt die Diagonalen in der Mitte.
Ein Parallelogramm mit zwei gleich langen Diagonalen muss ein Rechteck sein.
Also ist $\sphericalangle$ ACB ein rechter Winkel.