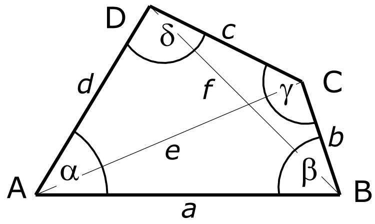
MATHE 364

16.12. Flächeninhalt, Umfang und Diagonalenlänge von Vierecken

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.



Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.

a) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 6$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $c = 6$ cm, $d = 2{,}5$ cm ist wegen der gleich langen Diagonalen ($e = f$) ein Rechteck.

b) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 11{,}7$ cm, $b = 7{,}5$ cm, $c = 11{,}7$ cm, $d = 7{,}5$ cm ist wegen der verschieden langen Diagonalen ($e \neq f$) ist kein Rechteck.

c) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 10$ cm, $b = 8{,}2$ cm, $c = 10$ cm, $d = 8{,}2$ cm hat eine Diagonale der Länge $e = 17{,}8$ cm.

d) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 14{,}3$ cm, $b = 2{,}4$ cm, $c = 14{,}3$ cm, $d = 2{,}4$ cm hat gleich lange Diagonalen ($e = f$).

e) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 14{,}5$ cm, $b = 14{,}5$ cm, $c = 3$ cm, $d = 3$ cm hat zwei verschieden lange Diagonalen, die sich im rechten Winkel schneiden. Der Diagonalenschnittpunkt liegt in der Mitte der 4,8 cm langen Diagonalen, aber nicht in der Mitte der anderen Diagonalen.

f) Bei dem Drachen mit den Diagonalenlängen $e = 6{,}4$ cm und $f = 15$ cm ist eine der Seitenlängen $a = 4$ cm.

g) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 5$ cm, $b = 5$ cm, $c = 5$ cm, $d = 5$ cm ist trotz der vier gleich langen Seiten kein Quadrat, denn die andere Diagonale ist kürzer als die Diagonale mit der Länge $e = 8$ cm.

h) Bei dem Drachen mit den Diagonalenlängen $e = 9{,}6$ cm und $f = 2{,}8$ cm liegt der Diagonalenschnittpunkt in der Mitte der beiden Diagonalen.

i) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 10$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 6{,}8$ cm, $d = 6{,}5$ cm hat gleich lange Diagonalen und kann nur ein ________________________ sein.

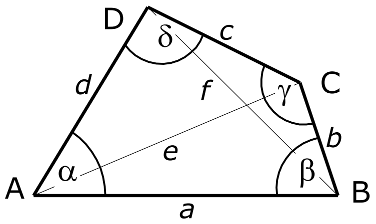
j) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 10{,}5$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6{,}6$ cm, $d = 4{,}1$ cm und $e = 8{,}5$ cm ist ein Trapez mit verschieden langen Diagonalen.

k) Ein Viereck hat die Seitenlängen $a = 10{,}4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 12{,}6$ cm, $d = 6$ cm sowie eine Diagonale der Länge $e = 10{,}2$ cm.

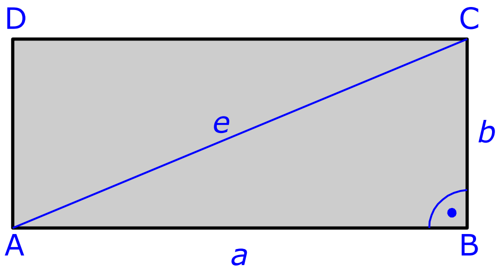
Lösungen 16.12. **Flächeninhalt, Umfang und Diagonalenlänge von Vierecken**

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



a) Das Viereck mit den Seitenlängen a = 6 cm, b = 2,5 cm, c = 6 cm, d = 2,5 cm ist wegen der gleich langen Diagonalen (e = f) ein Rechteck.



Viereckstyp Rechteck (in der Aufgabenstellung angegeben)

Flächeninhalt

$$A = a \cdot b$$
$$= 6\,\text{cm} \cdot 2{,}5\,\text{cm}$$
$$= 15\,\text{cm}^2$$

Umfang

$$u = 2 \cdot (a + b)$$
$$= 2 \cdot (6\,\text{cm} + 2{,}5\,\text{cm})$$
$$= 17\,\text{cm}$$

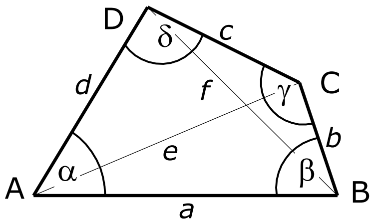
Diagonalenlänge

$$e^2 = a^2 + b^2$$
$$e^2 = 6^2 + 2{,}5^2$$
$$e = \sqrt{36 + 6{,}25}$$
$$e = \sqrt{42{,}25}$$
$$e = 6{,}5$$

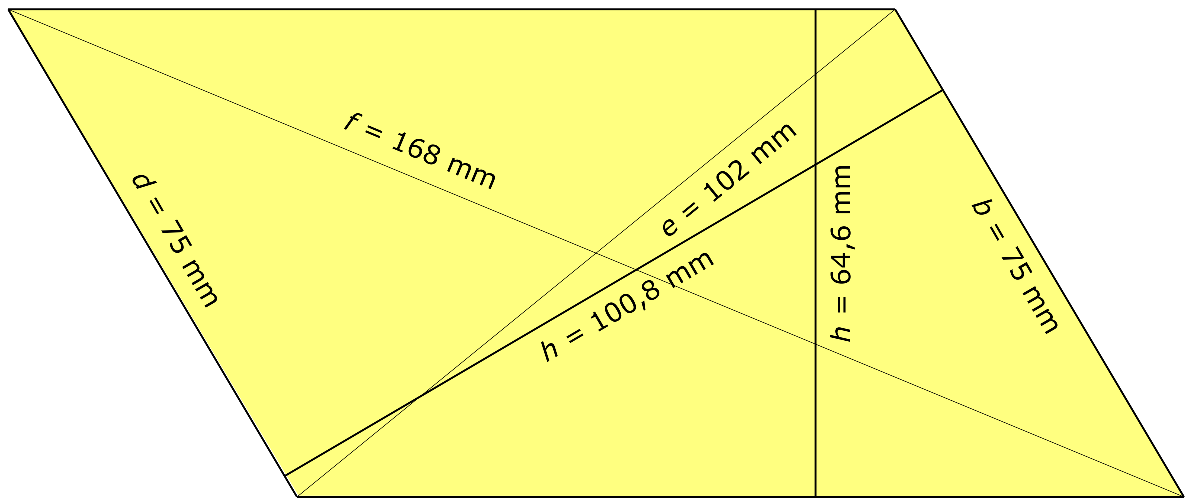
Wegen e = f ist auch f = 6,5 cm.

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



b) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 11{,}7\,\text{cm}$, $b = 7{,}5\,\text{cm}$, $c = 11{,}7\,\text{cm}$, $d = 7{,}5\,\text{cm}$ ist wegen der verschieden langen Diagonalen ($e \neq f$) ist kein Rechteck.



Viereckstyp: Parallelogramm, da gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Da die Diagonalen laut Aufgabenstellung verschieden lang sind, handelt es sich um *ein Parallelogramm, das kein Rechteck ist*.

Flächeninhalt:

$$A = a \cdot h_a \approx 11{,}7\,\text{cm} \cdot 6{,}46\,\text{cm} = 75{,}582\,\text{cm}^2$$

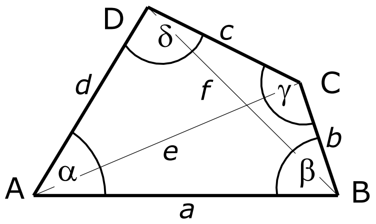
$$A = b \cdot h_b = 7{,}5\,\text{cm} \cdot 10{,}08\,\text{cm} = 75{,}6\,\text{cm}^2$$

Umfang:

$$u = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (11{,}7\,\text{cm} + 7{,}5\,\text{cm}) = 38{,}4\,\text{cm}$$

Diagonalenlänge: $e^2 = 7{,}9^2 + 6{,}46^2$ $\quad f^2 = 15{,}1^2 + 6{,}46^2$

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.



Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.

c) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 10$ cm, $b = 8{,}2$ cm, $c = 10$ cm, $d = 8{,}2$ cm hat eine Diagonale der Länge $e = 17{,}8$ cm.

Viereckstyp

Parallelogramm, da gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Durch eine Konstruktion des Teildreiecks ABC erkennt man, dass nicht beide Diagonalen gleich lang sein könne. Also handelt es sich um *ein Parallelogramm, das kein Rechteck ist*.

Flächeninhalt

$$A = a \cdot h_a = 10\,\text{cm} \cdot 3{,}36\,\text{cm} = 33{,}6\,\text{cm}^2$$

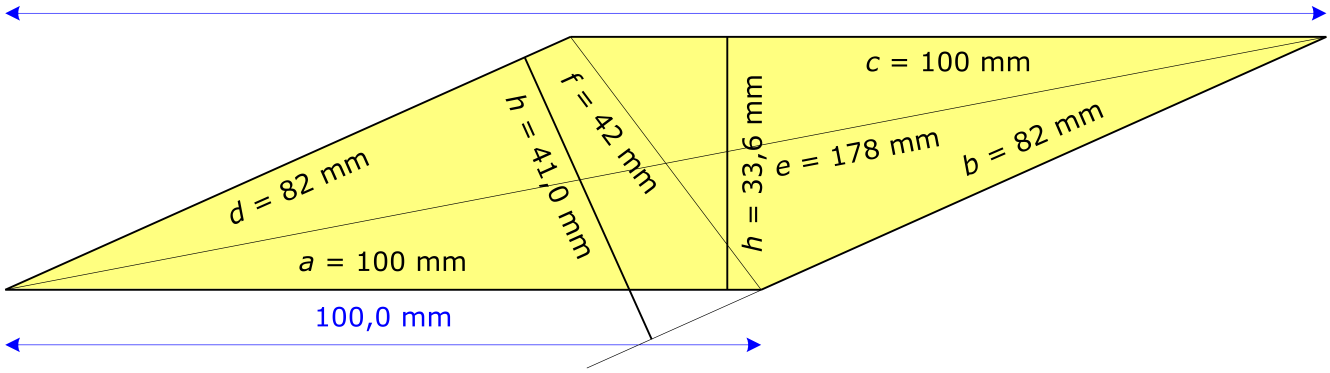
$$A = b \cdot h_b \approx 8{,}2\,\text{cm} \cdot 4{,}1\,\text{cm} = 33{,}62\,\text{cm}^2$$

Umfang

$$u = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (10\,\text{cm} + 8{,}2\,\text{cm}) = 36{,}4\,\text{cm}$$

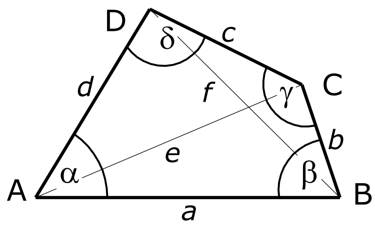
Diagonalenlänge

$$e^2 = 17{,}48^2 + 3{,}36^2 \qquad f^2 = 10^2 + 3{,}36^2$$

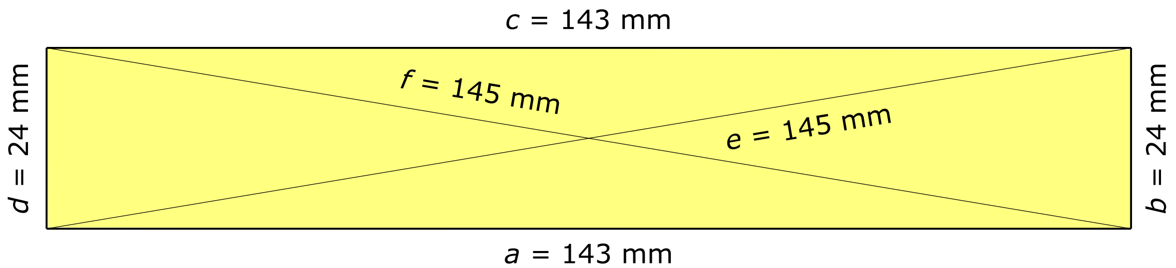


Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



d) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 14{,}3\,\text{cm}$, $b = 2{,}4\,\text{cm}$, $c = 14{,}3\,\text{cm}$, $d = 2{,}4\,\text{cm}$ hat gleich lange Diagonalen ($e = f$).



Viereckstyp: Rechteck, da gegenüberliegende Seiten gleich lang und laut Aufgabenstellung auch die Diagonalen gleich lang sind.

Flächeninhalt:

$$A = a \cdot b$$
$$= 14{,}3\,\text{cm} \cdot 2{,}4\,\text{cm}$$
$$= 34{,}32\,\text{cm}^2$$

Umfang:

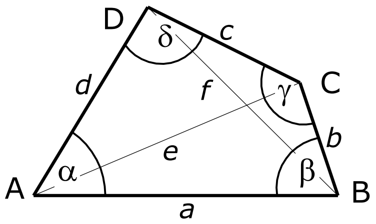
$$u = 2 \cdot (a + b)$$
$$= 2 \cdot (14{,}3\,\text{cm} + 2{,}4\,\text{cm})$$
$$= 33{,}4\,\text{cm}$$

Diagonalenlänge:

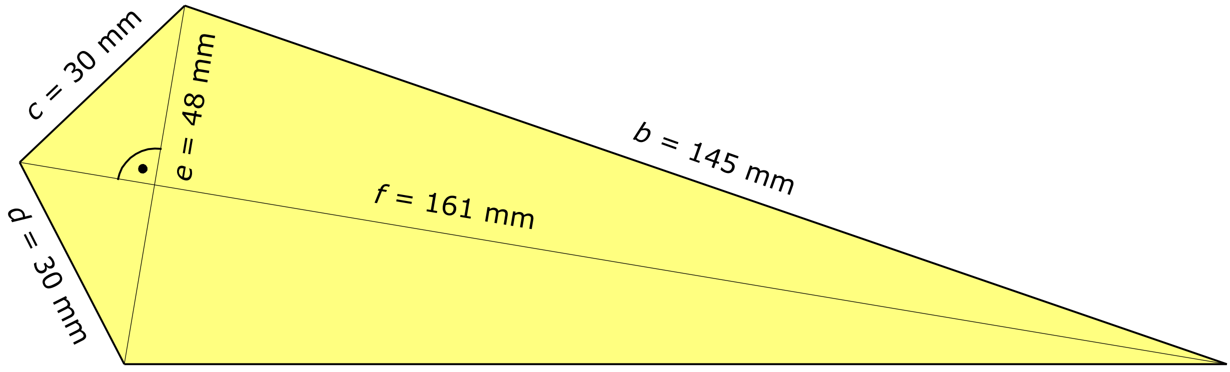
$$e^2 = a^2 + b^2$$
$$e^2 = 14{,}3^2 + 2{,}4^2$$
$$e = \sqrt{204{,}49 + 5{,}76}$$
$$e = \sqrt{210{,}25}$$
$$e = 14{,}5$$

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



e) Das Viereck mit den Seitenlängen a = 14,5 cm, b = 14,5 cm, c = 3 cm, d = 3 cm hat zwei verschieden lange Diagonalen, die sich im rechten Winkel schneiden. Der Diagonalenschnittpunkt liegt in der Mitte der 4,8 cm langen Diagonalen, aber nicht in der Mitte der anderen Diagonalen.



Viereckstyp

Bereits ohne Blick auf die Seitenlängen ergibt sich aus den Eigenschaften der Diagonalen, dass es sich um *ein Drachenviereck* handelt, *das keine Raute ist*.

Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4{,}8\,\text{cm} \cdot 16{,}1\,\text{cm}$$
$$= 38{,}64\,\text{cm}^2$$

Umfang

$$u = 2 \cdot (a + b)$$
$$= 2 \cdot (14{,}5\,\text{cm} + 3\,\text{cm})$$
$$= 35\,\text{cm}$$

Diagonalenlänge

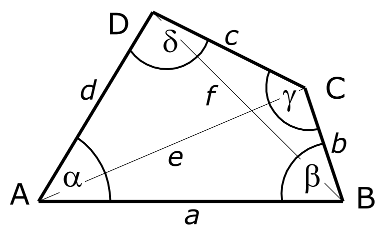
e = 4,8 cm ist gegeben. Zur Berechnung des Flächeninhalts werden die Längen beider Diagonalen benötigt.

$$3^2 = 2{,}4^2 + f_1^{\,2} \qquad 14{,}5^2 = 2{,}4^2 + f_2^{\,2}$$
$$f_1^{\,2} = 3^2 - 2{,}4^2 \qquad f_2^{\,2} = 14{,}5^2 - 2{,}4^2$$
$$f_1^{\,2} = 9 - 5{,}76 = 3{,}24 \qquad f_2^{\,2} = 210{,}25 - 5{,}76 = 204{,}49$$
$$f_1 = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8 \qquad f_2 = \sqrt{204{,}49} = 14{,}3$$

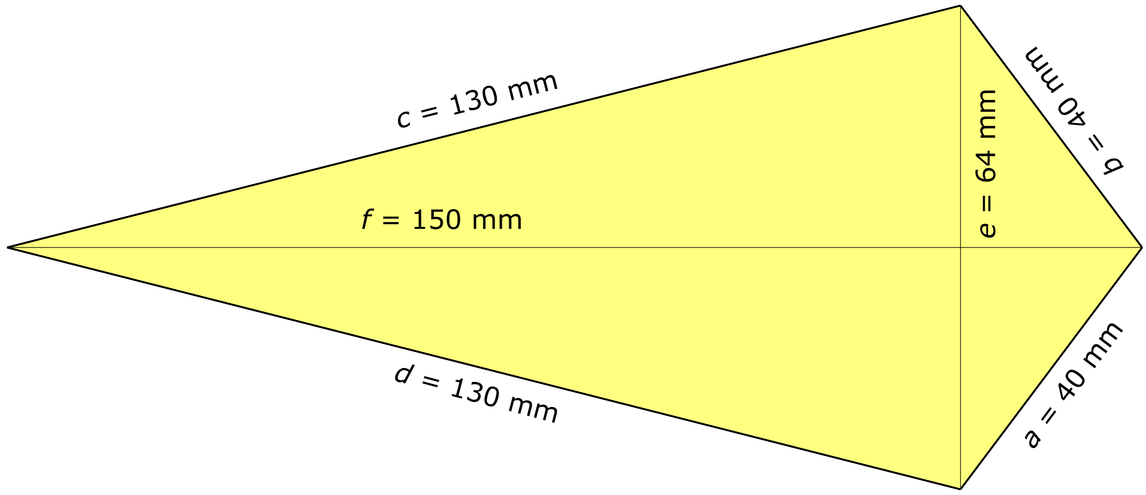
$$f = f_1 + f_2 = 16{,}1$$

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



f) Bei dem Drachen mit den Diagonalenlängen $e = 6{,}4$ cm und $f = 15$ cm ist eine der Seitenlängen $a = 4$ cm.



Viereckstyp: Drachen (in der Aufgabenstellung angegeben)

Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 15\,\text{cm}\cdot 6{,}4\,\text{cm}$$
$$= 48\,\text{cm}^2$$

Umfang: Da nur die Seitenlänge $a = 4$ cm bekannt ist, wird die unbekannte Seitenlänge b mit dem Satz des Pythagoras berechnet.

$$4^2 = 3{,}2^2 + f_2{}^2$$
$$f_2{}^2 = 4^2 - 3{,}2^2 = 16 - 10{,}24 = 5{,}76$$
$$f_1 = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$$
$$f_1 = f - f_2 = 12{,}6$$

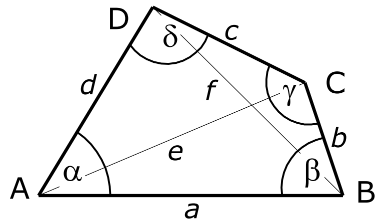
$$c^2 = f_1{}^2 + 3{,}2^2$$
$$= 158{,}76 + 10{,}24 = 169$$
$$c = \sqrt{169} = 13$$

$$u = 2\cdot(a+b)$$
$$= 2\cdot(4\,\text{cm} + 13\,\text{cm})$$
$$= 34\,\text{cm}$$

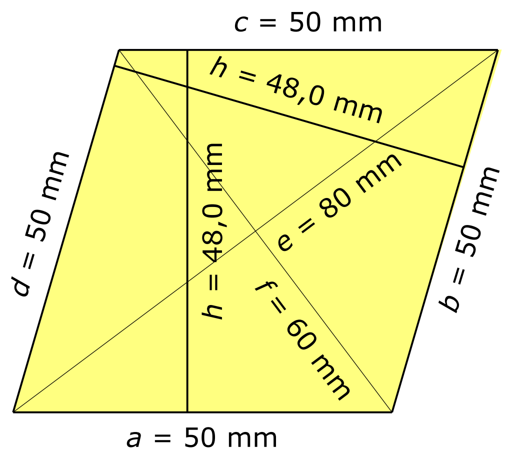
Diagonalenlänge: in der Aufgabenstellung angegeben

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



g) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 5\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, $d = 5\,\text{cm}$ ist trotz der vier gleich langen Seiten kein Quadrat, denn die andere Diagonale ist kürzer als die Diagonale mit der Länge $e = 8\,\text{cm}$.



Viereckstyp: Raute, denn alle vier Seiten sind gleichlang. Da die beiden Diagonalen aber unterschiedlich lang sind, kann es sich nur um eine Raute handeln, die kein Quadrat ist.

Flächeninhalt: Da die Raute zugleich ein Drachenviereck und auch ein Parallelogramm ist, sind beide Flächeninhaltsformeln anwendbar:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 8\text{cm} \cdot 6\text{cm} = 24\text{cm}^2$$

$$A = a \cdot h = 5\text{cm} \cdot 4{,}8\text{cm} = 24\text{cm}^2$$

Umfang:

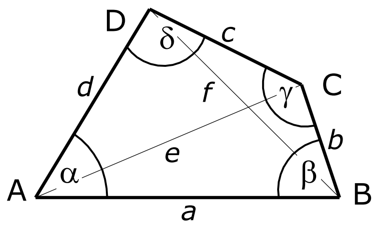
$$u = 4 \cdot a = 4 \cdot 5\text{cm} = 20\text{cm}$$

Diagonalenlänge: $e = 8\,\text{cm}$ war in der Aufgabenstellung angegeben. Die zweite Diagonalenlänge kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

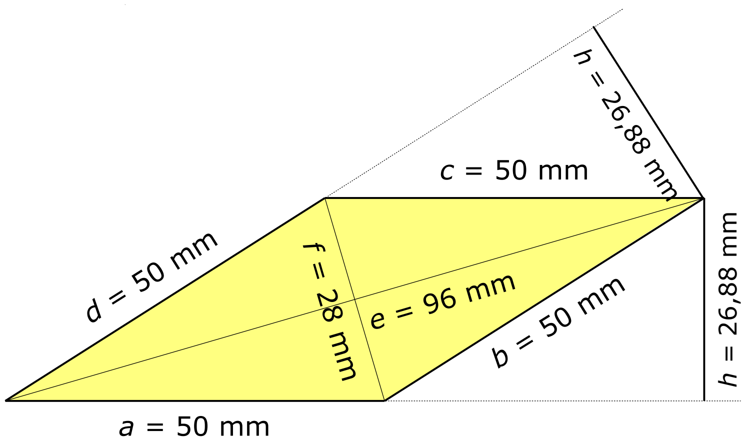
$$5^2 = 4^2 + f_2{}^2$$
$$f_2{}^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$
$$f_1 = \sqrt{9} = 3$$
$$f = 2 \cdot f_1 = 6$$

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



h) Bei dem Drachen mit den Diagonalenlängen e = 9,6 cm und f = 2,8 cm liegt der Diagonalenschnittpunkt in der Mitte der beiden Diagonalen.



Viereckstyp: Da sich die Diagonalen gegenseitig halbieren, aber unterschiedlich lang sind, kann es sich nur eine Raute handeln.

Flächeninhalt: Da die Raute zugleich ein Drachenviereck und auch ein Parallelogramm ist, sind beide Flächeninhaltsformeln anwendbar:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 9{,}6\,\text{cm} \cdot 2{,}8\,\text{cm} = 13{,}44\,\text{cm}^2$$

$$A = a \cdot h = 5\,\text{cm} \cdot 2{,}688\,\text{cm} = 13{,}44\,\text{cm}^2$$

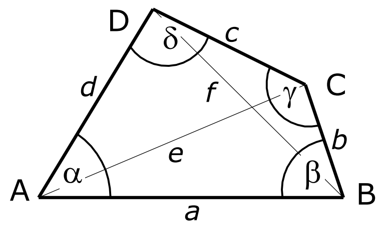
Umfang:

$$u = 4 \cdot a = 4 \cdot 5\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$$

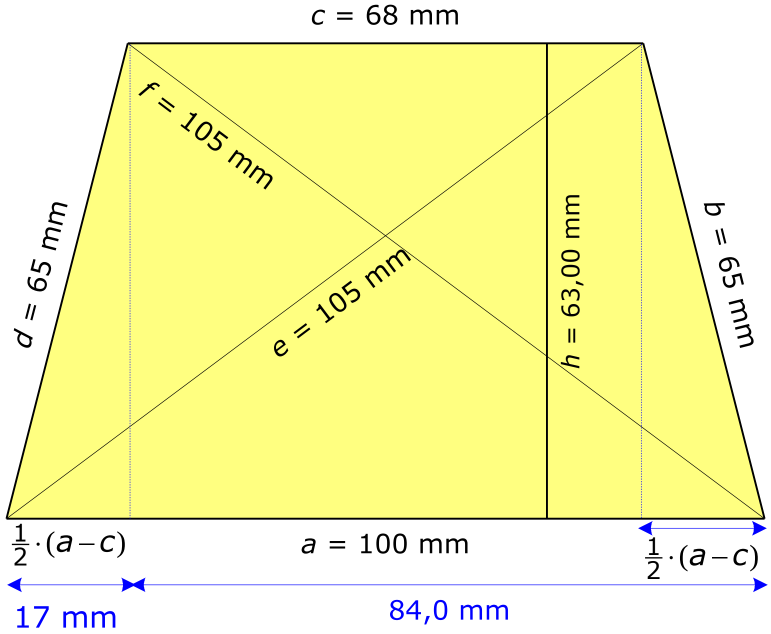
Diagonalenlänge: in der Aufgabenstellung angegeben

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



i) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 10$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 6{,}8$ cm, $d = 6{,}5$ cm hat gleich lange Diagonalen und kann nur ein gleichschenkliges Trapez sein.



Viereckstyp: Es kann sich nur um ein gleichschenkliges Trapez handeln, denn zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang, die beiden anderen Seiten sind verschieden lang und die beiden Diagonalen wiederum gleich lang.

Flächeninhalt:

$A = \frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h$
$= \frac{1}{2}\cdot(16{,}8\,\text{cm} + 6{,}8\,\text{cm})\cdot 6{,}3\,\text{cm}$
$= 52{,}92\,\text{cm}^2$

$A = m\cdot h$
$= 8{,}4\,\text{cm}\cdot 6{,}3\,\text{cm}$
$= 52{,}92\,\text{cm}^2$

Umfang:

$u = a+b+c+d$
$= 10\,\text{cm} + 6{,}5\,\text{cm} + 6{,}8\,\text{cm} + 6{,}5\,\text{cm}$
$= 29{,}8\,\text{cm}$

Diagonalenlänge: Satz des Pythagoras, halbe Differenz zwischen der langen und der kurzen Parallelen berechnen

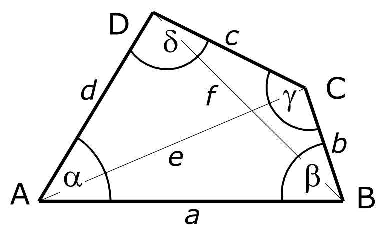
$c + \frac{1}{2}\cdot(a+c) = 6{,}8 + 1{,}6 = 8{,}4$

$f^2 = 6{,}3^2 + 8{,}4^2 = 39{,}69 + 70{,}56 = 110{,}25$

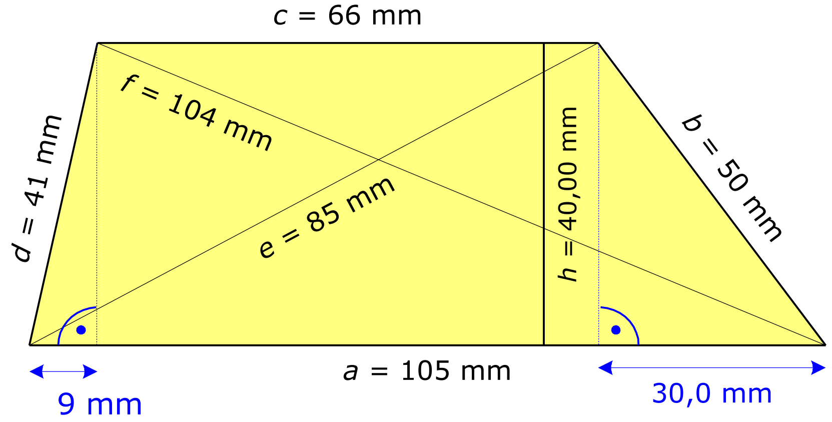
$c = \sqrt{110{,}25} = 10{,}5$

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



j) Das Viereck mit den Seitenlängen $a = 10{,}5$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6{,}6$ cm, $d = 4{,}1$ cm und $e = 8{,}5$ cm ist ein Trapez mit verschieden langen Diagonalen.



k) Viereckstyp: Trapez (in der Aufgabenstellung angegeben)

Flächeninhalt:

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot(10{,}5\,\text{cm}+6{,}6\,\text{cm})\cdot 4\,\text{cm}$$
$$= 34{,}6\,\text{cm}^2$$

$$A = m\cdot h$$
$$= 8{,}65\,\text{cm}\cdot 4\,\text{cm}$$
$$= 34{,}6\,\text{cm}^2$$

Umfang:

$$u = a+b+c+d$$
$$= 10{,}5\,\text{cm}+5\,\text{cm}+6{,}6\,\text{cm}+4{,}1\,\text{cm}$$
$$= 26{,}2\,\text{cm}$$

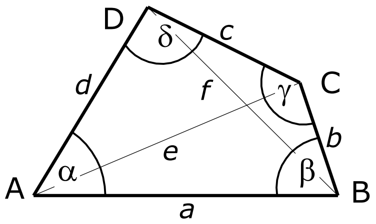
Diagonalenlänge: $e = 8{,}5$ cm in der Aufgabenstellung angegeben

Mit dem Satz des Pythagoras kann in den rechtwinkligen Teildreiecken aus der gemessenen Höhe und der bekannten Länge *e* die Länge 30 mm der rechten Teilstrecke bestimmt werden, entsprechend im linken Teildreieck 9 mm.

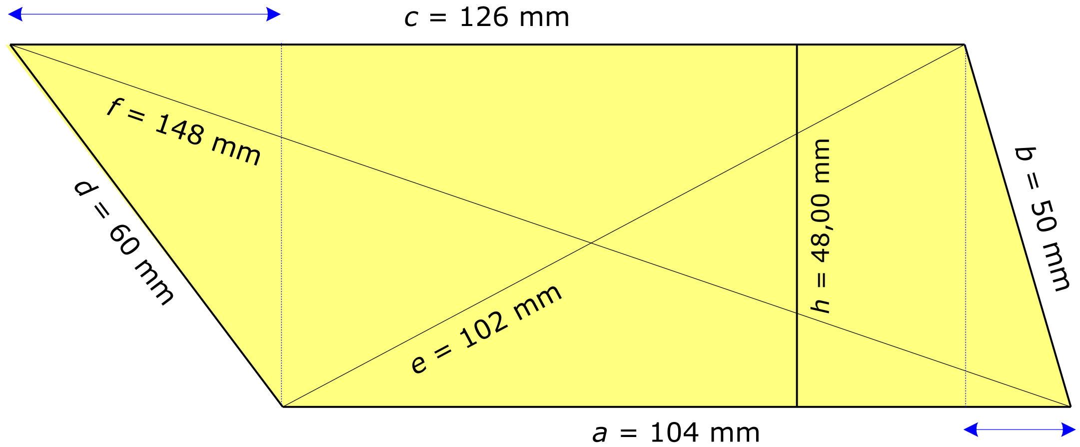
$$10{,}5 - 0{,}9 = 9{,}6$$
$$f^2 = 9{,}6^2 + 4^2$$
$$f = \sqrt{108{,}16} = 10{,}4$$

Wahlaufgaben: Wähle *eines* der Vierecke und **bestimme** den Flächeninhalt, den Umfang sowie ggf. die Länge der Diagonalen und ggf. den Viereckstyp, soweit diese nicht ohnehin angegeben sind. Wenn du möchtest, darfst du das Viereck ggf. auch zeichnen.

Die Planfigur zeigt die übliche Bezeichnungsweise der Bestimmungsstücke von Vierecken.



k) Ein Viereck hat die Seitenlängen $a = 10{,}4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 12{,}6$ cm, $d = 6$ cm sowie eine Diagonale der Länge $e = 10{,}2$ cm.



Viereckstyp	Trapez, z. B. durch Konstruktion des Teildreiecks ABC nach Kongruenzsatz SSS, anschließend Konstruktion des Teildreiecks ACD nach Kongruenzsatz SSS Auch wenn dieses Trapez ungewöhnlich aussieht und eine ungewöhnliche Lage hat, besitzt es die geforderte Eigenschaft „zwei parallele Seiten".
Flächeninhalt	$A = 55{,}2\ \text{cm}^2$
Umfang	$u = 34$ cm
Diagonalenlänge	$e = 10{,}2$ cm in der Aufgabenstellung angegeben, siehe Lösungsweg bei Teilaufgabe **k)**