

MATHE 364

30.12. Wie viele Stellen der Zahl Pi muss ich eingeben?

Viele Menschen haben eine richtige Vorstellung von einer Eigenschaft der Zahl Pi, können diese aber korrekt ausdrücken und sagen „Pi ist irgendwie unendlich“.

Wahlaufgaben: Bearbeite mindestens eine der Teilaufgaben **a)**, **b)** oder **c)**.

a) Ergänze *mindestens einen* der Lückentexte:

Bei der Zahl Pi steht vor dem Komma die Ziffer _____ und nach dem Komma folgen _____.

Dabei gibt es einen Unterschied zwischen der rationalen Zahl $\frac{22}{7}$ und der _____ Zahl π : Der Dezimalbruch zu $\frac{22}{7}$ lautet $\frac{22}{7} = 3,142857142857...$ und ist _____. Die Ziffernfolge 1 4 2 8 5 7 _____ oft.

Wenn die Zahl Pi in Ziffern geschrieben wird, also $\pi \approx 3,1415926535914039784825424142192796639198932348258351990748479774631213467319607687311770202760658019856787782293313748756552931794701750828279617334466023408$ dann sind das _____ nach dem Komma, aber es gibt keine _____, die sich _____ oft _____.

b) Die Zahl π ist so wichtig, dass dein Taschenrechner dafür eine besondere Taste hat. Du musst also nicht jedesmal 3,14159265 eintippen.

Informiere dich, wie du bei deinem Taschenrechner die Zahl π mit einem Tastendruck eingeben kannst.

Berechne den Wert *mindestens eines* der folgenden Terme und **ergänze** die fehlenden Ziffern an den markierten Stellen. Du brauchst aber nicht die unendlich vielen weiteren Ziffern anzugeben.

$$\sqrt{2} \cdot \pi = 4, \underline{\quad} 2 \underline{\quad} 29 \dots$$

$$\sqrt{3} \cdot \pi = 5, \underline{\quad} 1398 \dots$$

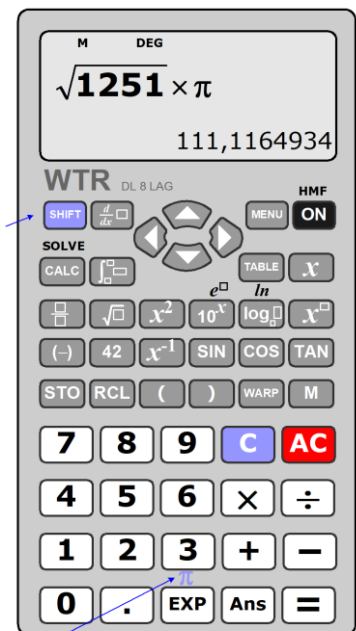
$$\sqrt{4} \cdot \pi = 6, \underline{\quad} 13185 \dots$$

⋮

Kannst du eine Wurzel angeben, bei der der Ausdruck

$$\sqrt{x} \cdot \pi \text{ dreimal die gleiche Ziffer unmittelbar hintereinander enthält?}$$

c) Der englische Mathematiker WILLIAM SHANKS (1812 – 1882) wurde durch seine handschriftlichen Berechnungen der Kreiszahl Pi berühmt. 1853 veröffentlichte er 607 Dezimalstellen von Pi und 1873 schließlich 707 Stellen. FERGUSON wies 1945 mit einer Tischrechenmaschine nach, dass Shanks Berechnungen nur für die ersten 527 Stellen korrekt waren. Nach https://de.wikipedia.org/wiki/William_Shanks Bestimmte Fehler in den berechneten Dezimalstellen der Zahl Pi fallen durch eine Statistik auf. Bearbeite dazu das Material auf der nächsten Seite.



MATHE 364

Arbeitsmaterial 9999 Nachkommastellen von PI (insgesamt 10 000 Ziffern)

3,141592

65359140397848254241219279663919893234825835199074879774631213467319607687311770202760658019856787782293313748756552931794701750828279617333446602340831924
3216876351349499743774543521332481988857618117195057452050214708711391482735328053536048318366295527975161202807244466489272785568066909098881103167056252744877546154836906331098
097354711945038954490522398489502977420156585268269423122771729151880037159542137440979082685462014233529635831006294651053812826618947529959195753508370488308172084853101972250
920082320991578814676374916760981384640015017278090942224585038077569174022312064008919386467130521515681546012337187219967499102525807521447898540199992875014044434700873
90693124114514966581075489226199121434424095606350006713929073505191648420308402726707050721678865921466212494484986832477828879760381241556206547862093156450989687953018938760
74571199162540112300740176425613776434382989918144872887510173657830770620386771222181725507175682971009528298525950020963900984618251473638922154047677117559527887469067969625
636795619777864860939456802032265224861816378150408453521798346455182468149942589055473496422434936546519307341749951358268957258305403018472896279387141592653591403978482542414
2192796639198932348258352199074847974631213467319607687311770202760658019856787782293313748756552931794701750828279617333446602340831924321687635134949974377454352133248198885761
81171950574520502147087113914823532805353604831836629552797516120280724446648927278556806690909888110316705625274487754615483690633109809735471194503895449052239848950297742015
658526826942312277172915188003715954213744097908268546201423352963583100629465105381282661894752995919575350837048830817208485310197225092008232099157881467637491676098138464001
501727809094224585038077569174022301206400891938626467130521521568154601233718721996749910252580752144789854019999287501404443470087390693124114514966581075489226199121434424
95066350006713929073505191648420308402726707050721678865921466212494484986832477828879760381241556206547862093156450989687953018938760745711991625401123007401764256137764343829
8991814487288751017365783077062038677122218172550717568297100952829852595002096390098461825147363892215404767711755952788746906796962563795619777864860939456802032265224861816
378150408453521798346455182468149942589055473496422434936546519307341749951358268957258305403018472896279387141592653591403978482542414219279663919893234825835199074847977463121
346731960768731177020276065801985678778229331374875655293179470175082827961733344660234083192432168763513494997437745435213324819888576181171950574520502147087113914823532805353
604831836629552797516120280724446648927278556806690909888110316705625274487754615483690633109809735471194503895449052239848950297742015658526826942312277172915188003715954213744
0979082685462014233529635831006294651053812826618947529959195753508370488308172084853101972250920082320991578814676374916760981384640015017278090942245850380775691740223012064
08919386264671305215215681546012337187219967499102525807521447898540199992875014044434700873906931241145149665810754892261991214344240956063500067139290735051916484203084027267
070507216788659212449448498683247782887976038124155620654786209315645098968795301893876074571199162540112300740176425613776434382989918144872887510173657830770620386777122
218172550717568297100952829852595002096390098461825147363892215404767711755952788746906796962563795619777864860939456802032265224861816378150408453521798346455182468149942589055
473496422434936546519307341749951358268957258305403018472896279387141592653591403978482542414219279663919893234825835199074847977463121346731960768731177020276065801985678778229
331374875655293179470175082827961733344660234083192432168763513494997437745435213324819888576181171950574520502147087113914823532805353604831836629552797516120280724446648927278
55680669090988811031670562527448775461548369063310980973547119450389544905223984895029774201565852682694231227717291518800371595421374409790826854620142335296358310062946510538
2826618947529959195753508370488308172084853101972250920082320991578814676374916760981384640015017278090942245850380775691740223012064008919386264671305215215681546012337187219
674991025258075212447898540199992875014044434700873906931241145149665810754892261991214344240956063500067139290735051916484203084027267070507216788659214662124944849868324778782
887976038124155620654786209315645098968795301893876074571199162540112300740176425613776434382989918144872887510173657830770620386777122218172550717568297100952829852595002096390
098461825147363892215404767711755952788746906796962563795619777864860939456802032265224861816378150408453521798346455182468149942589055473496422434936546519307341749951358268957
2583054043018472896279387141592653591403978482542414219279663919893234825835199074847977463121346731960768731177020276065801985678778229331374875655293179470175082827961733344660
234083192432168763513494997437745435213324819888576181171950574520502147087113914823532805353604831836629552797516120280724446648927278556806690909888110316705625274487754615483
690633109809735471194503895449052239848950297742015658526826942312277172915188003715954213744097908268546201423352963583100629465105381282661894752995919575350837048830817208485
3101972250920082320991578814676374916760981384640015017278090942245850380775691740223012064008919386264671305215215681546012337187219967499102525807521244789854019999287501404443470087390693124114514966581075489226199
4434700873906931241145149665810754892261991214344240956063500067139290735051916484203084027267070507216788659214662124944849868324778782887976038124155620654786209315645098968795
30189387607457119916254011230074017642561377643438298991814487288751017365783077062038677122218172550717568297100952829852595002096390098461825147363892215404767711595265359140397848254241421927966391989323482583519907484
90679696256379561977786486093945680203226522486181637815040845352179834645518246814994258905547349642243493654651930734174995135826895725830540301847289627938714159265359140397
8482542414219279663919893234825835199074847977463121346731960768731177020276065801985678778229331374875655293179470175082827961733344660234083192432168763513494997437745435213324
819888576181171950574520502147087113914823532805353604831836629552797516120280724446648927278556806690909888110316705625274487754615483690633109809735471194503895449052239848950
2977422015658526826942312277172915188003715954213744097908268546201423352963583100629465105381282661894752995919575350837048830817208485310197225092008232099157881467637491676098
13846040015017278090942245850380775691740223012064008919386264671305215215681546012337187219967499102525807521244789854019999287501404443470087390693124114514966581075489226199
1214344240956063500067139290735051916484203084027267070507216788659214662124944849868324778782887976038124155620654786209315645098968795301893876074571199162540112300740176425613
7764343829899181448728875101736578307706203867712221817255071756829710095282985259500209639009846182514736389221540476771175595278874690679696256379561977786486093945680203226
5224861816378150408453521798346455182468149942589055473496422434936546519307341749951358268957258305404301847289627938714159265359140397848254241421927966391989323482583519907484
7977463121346731960768731177020276065801985678778229331374875655293179470175082827961733344660234083192432168763513494997437745435213324819888576181171950574520502147087113914823
53280535360483183662955279751612028072444664892727855680669090988811031670562527448775461548369063310980973547119450389544905223984895029774201565852682694231227717291518800371
59542137440979082685462014233529635831006294651053812826618947529959195753508370488308172084853101972250920082320991578814676374916760981384640015017278090942245850380775691740
223012064008919386264671305215215681546012337187219967499102525807521244789854019999287501404443470087390693124114514966581075489226199121434424095606350006713929073505191648420308402726707050721678865921466212494484986832477878288797603812415562065478620931564509896879530189387607457119916254011230074017642561377643438298991814487288751017365783077062
038677712221817255071756829710095282985259500209639009846182514736389221540476771175595278874690679696256379561977786486093945680203226522486181637815040845352179834645518246814
9942589055473496422434936546519307341749951358268957258305404301847289627938714159265359140397848254241421927966391989323482583519907484797746312134673196076873117702027606580198
56787822933137487565529317947017508282796173334466023408319243216876351349499743774543521332481988857618117195057452050214708711391482353280535360483183662955279751612028072444
648927278556806690909888110316705625274487754615483690633109809735471194503895449052239848950297742201565852682694231227717291518800371595421374409790826854620142335296358310062
94651053812826618947529959195753508370488308172084853101972250920082320991578814676374916760981384640015017278090942245850380775691740223012064008919386264671305215215681546012
337187219967499102525807521244789854019999287501404443470087390693124114514966581075489226199121434424095606350006713929073505191648420308402726707050721678865921466212494484986
832477828879760381241556206547862093156450989687953018938760745711991625401123007401764256137764343829899181448728875101736578307706203867712221817255071756829710095282985259
500209639009846182514736389221540476771175595278874690679696256379561977786486093945680203226522486181637815040845352179834645518246814994258905547349642243493654651930734174995
1358268957258305404301847289627938714159265359140397848254241421927966391989323482583519907484797746312134673196076873117702027606580198567877822933137487565529317947017508282796
173334466023408319243216876351349499743774543521332481988857618117195057452050214708711391482353280535360483183662955279751612028072444664892727855680669090988811031670562527448

Zahl	Stellen nach dem Komma	Ziffer									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{22}{7}$	10	0	2	2	1	2	1	0	1	1	0
π	10	0	2	1	2	1	2	1	0	0	1
$\frac{22}{7}$	100	0	17	17	1	17	16	0	16	16	0
π	100	7	13	10	11	11	7	9	12	8	12
$\frac{22}{7}$	1000	0	167	167	1	167	166	0	166	166	0
π	1000	106	110	110	84	99	96	84	108	103	100
$\frac{22}{7}$	10000	0	1667	1667	1	1667	1666	0	1666	1666	0
π	10000	989	1048	1067	842	1039	996	887	1074	1037	1021

- In der Darstellung von PI kommen alle Ziffern ungefähr gleich oft vor. **Gib an**, welche Daten du in der Tabelle unter dieser Voraussetzung erwartest.
- **Erkläre**, wodurch der periodische Dezimalbruch $3,142857$ in der Tabelle auffällt.
- **Gib an**, welche Ziffer jeweils die größte bzw. die kleinste relative Häufigkeit hat.
- **Bestimme**, wie oft die Ziffernfolge 123 in den ersten 10 000 Ziffern von Pi vorkommt. **Tipp:** Verwende dazu die Suchfunktion CTRL-F (Steuerung-F).

Viele Menschen haben eine richtige Vorstellung von einer Eigenschaft der Zahl Pi, können diese aber korrekt ausdrücken und sagen „Pi ist irgendwie unendlich“.

Frage aus dem Titel: Wie viele Stellen der Zahl Pi muss ich eingeben?

Antwort: Immer die dafür vorgesehene Taste π drücken, niemals die Ziffern einzeln eingeben. Beim Kopfrechnen mit 3,15 (das Dreifache plus 5 %) rechnen.

Wahlaufgaben: Bearbeite mindestens eine der Teilaufgaben a), b) oder c).

a) **Ergänze** mindestens einen der Lückentexte:

Bei der Zahl Pi steht vor dem Komma die Ziffer 3 und nach dem Komma folgen unendlich viele weitere Ziffern.

Dabei gibt es einen Unterschied zwischen der rationalen Zahl $\frac{22}{7}$ und der irrationalen Zahl π : Der Dezimalbruch zu $\frac{22}{7}$ lautet $\frac{22}{7} = 3,14285714287...$ und ist periodisch. Die Ziffernfolge 1 4 2 8 5 7 wiederholt sich unendlich oft.

Wenn die Zahl Pi in Ziffern geschrieben wird, also $\pi \approx 3,14159265359140397848254241421927966391989323482583519907484797746312134673196076873117702027606580198567877822933137487565529317947017508282796173334466023408$ dann sind das unendlich viele Stellen nach dem Komma, aber es gibt keine Periode, die sich unendlich oft wiederholt.

b) Die Zahl π ist so wichtig, dass dein Taschenrechner dafür eine besondere Taste hat. Du musst also nicht jedesmal 3,14159265 eintippen.

Informiere dich, wie du bei deinem Taschenrechner die Zahl π mit einem Tastendruck eingeben kannst. abhängig vom Taschenrechnermodell

Berechne den Wert *mindestens eines* der folgenden Terme und **ergänze** die fehlenden Ziffern an den markierten Stellen. Du brauchst aber nicht die unendlich vielen weiteren Ziffern anzugeben.

$$\sqrt{2} \cdot \pi = 4, \underline{44} \underline{288} 29 \dots$$

$$\sqrt{3} \cdot \pi = 5, \underline{44} 1398 \dots$$

$$\sqrt{4} \cdot \pi = 6, \underline{28} 13185 \dots$$

⋮



Kannst du eine Wurzel angeben, bei der der Ausdruck $\sqrt{x} \cdot \pi$ dreimal die gleiche Ziffer unmittelbar hintereinander enthält? z. B. $\sqrt{8} \cdot \pi \approx 8,88576587...$

c) Der englische Mathematiker WILLIAM SHANKS (1812 – 1882) wurde durch seine handschriftlichen Berechnungen der Kreiszahl Pi berühmt. 1853 veröffentlichte er 607 Dezimalstellen von Pi und 1873 schließlich 707 Stellen. FERGUSON wies 1945 mit einer Tischrechenmaschine nach, dass Shanks Berechnungen nur für die ersten 527 Stellen korrekt waren. Nach https://de.wikipedia.org/wiki/William_Shanks Bestimmte Fehler in den berechneten Dezimalstellen der Zahl Pi fallen durch eine Statistik auf. Bearbeite dazu das Material auf der nächsten Seite.

- | Zahl | Stellen nach dem Komma | Ziffer | | | | | | | | | |
|----------------|------------------------|--------|------|------|-----|------|------|-----|------|------|------|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $\frac{22}{7}$ | 10 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| π | 10 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\frac{22}{7}$ | 100 | 0 | 17 | 17 | 1 | 17 | 16 | 0 | 16 | 16 | 0 |
| π | 100 | 7 | 13 | 10 | 11 | 11 | 7 | 9 | 12 | 8 | 12 |
| $\frac{22}{7}$ | 1000 | 0 | 167 | 167 | 1 | 167 | 166 | 0 | 166 | 166 | 0 |
| π | 1000 | 106 | 110 | 110 | 84 | 99 | 96 | 84 | 108 | 103 | 100 |
| $\frac{22}{7}$ | 10 000 | 0 | 1667 | 1667 | 1 | 1667 | 1666 | 0 | 1666 | 1666 | 0 |
| π | 10 000 | 989 | 1048 | 1067 | 842 | 1039 | 996 | 887 | 1074 | 1037 | 1021 |

- **Erkläre**, wodurch der periodische Dezimalbruch $3,\overline{142857}$ in der Tabelle auffällt.
Die Anfangsziffer 3 tritt nur einmal auf, die Ziffern 1, 4, 2, 8, 5 und 7 sind fast genau gleich häufig, und die Ziffern 0, 6 und 9 kommen überhaupt nicht vor.
- **Gib an**, welche Ziffer jeweils die größte bzw. die kleinste relative Häufigkeit hat.
siehe hellgrün bzw. rot markierte Anzahlen
- **Bestimme**, wie oft die Ziffernfolge 123 in den ersten 10 000 Ziffern von Pi vorkommt. **Tipp**: Verwende dazu die Suchfunktion CTRL-F (Steuerung-F).
Die Ziffernfolge 123 kommt 16 mal vor.
Da jede der 1000 Dreierkombinationen von 000 bis 999 gleich wahrscheinlich ist, wäre bei einer Wahrscheinlichkeit von einem Tausendstel für die Folge 123 nur eine Häufigkeit von 10 zu erwarten. Dagegen kommt die Ziffernfolge 456 acht-mal vor und die Ziffernfolge 1234 tritt in den ersten 10 000 Stellen gar nicht auf.