MATHE 364

28.06. Quadratische Gleichungen – Nullstellen von Parabeln

a) Aus der faktorisierten Form sind die Lösungen der Gleichung direkt ablesbar.
Gib die Lösungen der linken Gleichung **an**.

$(x+2)\cdot(x+4)=0$ $\qquad\qquad$ $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$

b) Die Normalform der quadratischen Gleichung kann mit Hilfe der quadratischen Ergänzung umgeformt werden. Wie beim Bestimmen der Scheitelpunktsform gibt es dabei drei Tricks:

„doppeltes Produkt"	Schreibe den Vorfaktor von x als „zweimal die Hälfte".
„hilfreiche Null"	Addiere zu dem Term eine Null.
„quadratische Ergänzung"	Quadriere den halben Vorfaktor von x. Addiere dieses Quadrat und subtrahiere es sofort wieder.

- **Markiere** diese drei Tricks in der Rechnung durch Einkringeln.

$$\begin{aligned}
& 1\cdot x^2+6\cdot x+8=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+2\cdot 3\cdot x+8=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+2\cdot 3\cdot x+0+8=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+8=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-9+8=0\\
\Leftrightarrow\ & (x+3)^2-9+8=0\\
\Leftrightarrow\ & (x+3)^2=1\\
\Leftrightarrow\ & |x+3|=\sqrt{1}\\
\Leftrightarrow\ & x+3=1 \quad\text{oder}\quad x+3=-1\\
\Leftrightarrow\ & x=-2 \quad\text{oder}\quad x=-4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1\cdot x^2+p\cdot x+q=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+q=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+0+q=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0\\
\Leftrightarrow\ & \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0\\
\Leftrightarrow\ & \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q\\
\Leftrightarrow\ & \left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\\
\Leftrightarrow\ & x+\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad\text{oder}\quad x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\\
\Leftrightarrow\ & x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad\text{oder}\quad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}
\end{aligned}$$

c) Wahlaufgabe:

- **Löse** die Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ mit quadratischer Ergänzung (wie links).
- **Löse** die Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ mit der Lösungsformel unten rechts.
  Gib dazu die folgenden Werte **an**:

  $p=$___ $\quad q=$___ $\quad \frac{p}{2}=$___ $\quad -\frac{p}{2}=$___ $\quad \left(\frac{p}{2}\right)^2=$___ $\quad \frac{p^2}{4}=$___ $\quad \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=$___

- **Lies** mit dem Satz von Vieta die Lösungen der Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ **ab**.

Lösungen 28.06. Quadratische Gleichungen – Nullstellen von Parabeln

a) Aus der faktorisierten Form sind die Lösungen der Gleichung direkt ablesbar.
Gib die Lösungen der linken Gleichung **an**.

$(x+2)\cdot(x+4)=0$ $x_1=-2$ $x_2=-4$ $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$

b) Die Normalform der quadratischen Gleichung kann mit Hilfe der quadratischen Ergänzung umgeformt werden. Wie beim Bestimmen der Scheitelpunktsform gibt es dabei drei Tricks:

„doppeltes Produkt"	Schreibe den Vorfaktor von x als „zweimal die Hälfte".
„hilfreiche Null"	Addiere zu dem Term eine Null.
„quadratische Ergänzung"	Quadriere den halben Vorfaktor von x. Addiere dieses Quadrat und subtrahiere es sofort wieder.

- **Markiere** diese drei Tricks in der Rechnung durch Einkringeln.

$$1\cdot x^2+6\cdot x+8=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot 3\cdot x+8=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot 3\cdot x+0+8=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+8=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-9+8=0$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2-9+8=0$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2=1$$
$$\Leftrightarrow |x+3|=\sqrt{1}$$
$$\Leftrightarrow x+3=1 \quad\text{oder}\quad x+3=-1$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \quad\text{oder}\quad x=-4$$

$$1\cdot x^2+p\cdot x+q=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\tfrac{p}{2}\cdot x+q=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\tfrac{p}{2}\cdot x+0+q=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\tfrac{p}{2}\cdot x+\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-\left(\tfrac{p}{2}\right)^2+q=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\tfrac{p}{2}\cdot x+\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-\tfrac{p^2}{4}+q=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2-\tfrac{p^2}{4}+q=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2=\tfrac{p^2}{4}-q$$
$$\Leftrightarrow \left|x+\tfrac{p}{2}\right|=\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q}$$
$$\Leftrightarrow x+\tfrac{p}{2}=\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q} \quad\text{oder}\quad x+\tfrac{p}{2}=-\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q}$$
$$\Leftrightarrow x=-\tfrac{p}{2}+\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q} \quad\text{oder}\quad x=-\tfrac{p}{2}-\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q}$$

c) **Wahlaufgabe**: *Lösungen siehe nächste Seite*

- **Löse** die Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ mit quadratischer Ergänzung (wie links).
- **Löse** die Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ mit der Lösungsformel unten rechts.
  Gib dazu die folgenden Werte **an**:

  $p=$___ $q=$___ $\frac{p}{2}=$___ $-\frac{p}{2}=$___ $\left(\frac{p}{2}\right)^2=$___ $\frac{p^2}{4}=$___ $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=$___

- **Lies** mit dem Satz von Vieta die Lösungen der Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ **ab**.

c) Wahlaufgabe:

- **Löse** die Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ mit quadratischer Ergänzung.

$1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$	$1\cdot x^2+p\cdot x+q=0$
$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot 4\cdot x+15=0$	$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+q=0$
$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot 4\cdot x+0+15=0$	$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+0+q=0$
$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2-4^2+15=0$	$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0$
$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2-16+15=0$	$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0$
$\Leftrightarrow\ (x+4)^2-16+15=0$	$\Leftrightarrow\ \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0$
$\Leftrightarrow\ (x+4)^2=1$	$\Leftrightarrow\ \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$
$\Leftrightarrow\ \lvert x+4\rvert=\sqrt{1}$	$\Leftrightarrow\ \left\lvert x+\frac{p}{2}\right\rvert=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
$\Leftrightarrow\ x+4=1$ oder $x+4=-1$	$\Leftrightarrow\ x+\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ oder $x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
$\Leftrightarrow\ x=-3$ oder $x=-5$	$\Leftrightarrow\ x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ oder $x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

- **Löse** die Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ mit der Lösungsformel unten rechts.
  Gib dazu die folgenden Werte **an**:

  $p=\underline{8}$ $q=\underline{15}$ $\frac{p}{2}=\underline{4}$ $-\frac{p}{2}=\underline{-4}$ $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\underline{16}$ $\frac{p^2}{4}=\underline{16}$ $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\underline{1}$

  $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-4+\sqrt{16-15}=-4+\sqrt{1}=-3$

  oder

  $x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-4-\sqrt{16-15}=-4-\sqrt{1}=-5$

- **Lies** mit dem Satz von Vieta die Lösungen der Gleichung $1\cdot x^2+8\cdot x+15=0$ **ab**.
  Gesucht sind zwei Zahlen mit dem Produkt 15, z. B. $1\cdot 15$ oder $2\cdot 7{,}5$ oder $3\cdot 5$.
  Die Summe dieser beiden Zahlen multipliziert mit (-1) soll $+8$ ergeben.
  Die probierten Zahlen haben die Summen 16 bzw. 9,5 bzw. 8.
  Aber diese Summen sind positiv und ergeben nicht +8, wenn man sie mit (-1) multipliziert. Also kehren wir die Vorzeichen der beiden Zahlen um.
  <u>Die Lösungen lauten −3 und −5</u>.
  Kontrolle: $-3\cdot(-5)=+15$ √ $-1\cdot(-3+(-5))=-1\cdot(-8)=+8$ √