![MATHE 364]

10.11. Die berühmteste Zahl der Welt

Information: Die Kreiszahl Pi

Bei jedem Kreis ist der Umfang ungefähr 3,14 mal so lang wie der Durchmesser. Der genaue Wert dieser Zahl wird mit π abgekürzt. Der Buchstabe π (sprich „pi") aus dem griechischen Alphabet entspricht dem Buchstaben p im lateinischen Alphabet. π ist also ein kleines griechisches p als Abkürzung für das griechische Wort περιφέρεια oder lateinisch *Peripherie*, wörtlich *Randbereich*, hier *Kreisumfang*.

$\pi \approx$ 3,14159265359140397848254241421927966391989323482583519907484797746312134673196076873117702027606580198
5678778229331374875655293179470175082827961733344660234083192432168763513494997437745435213324819888576181117195057452050214708711391482353328053536048318366295527975161202807244466489272785568066

Für das praktische Arbeiten im Handwerk genügt der Näherungswert 3,14. Trotzdem sucht die Mathematik immer mehr Stellen nach dem Komma. Aktuell liegt der Weltrekord bei 63 Billionen Ziffern(August 2021).

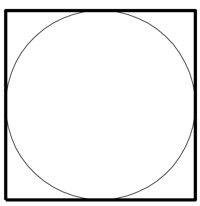
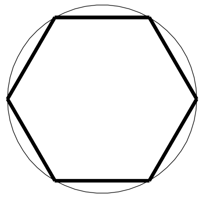
Die Zahl π ist irrational, hat also unendlich viele Nachkommastellen, bei denen sich kein bestimmtes Ziffernmuster unendlich oft periodisch wiederholt.

a) **Lies** den Informationstext.
Schätze, wie viele Ziffern von π in der Abbildung angegeben sind.

b) Wähle *mindestens zwei* historische Näherungswerte und **gib** sie in Ziffernschreibweise **an**. Nutze den Taschenrechner.
Entscheide, ob der Wert kleiner oder größer ist als π.

Papyrus Rhind	1650 Jh. v. u. Z	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Archimedes	287 – 212 v. u. Z	$\frac{22}{7}$ sowie $\frac{221}{71}$
Ptolemäus	ca. 100 – 160	$3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60 \cdot 60}$
Tsu Ch'ung-Chih	429 – 500	$\frac{355}{113}$
Brahmagupta	7. Jahrhundert	$\sqrt{10}$
Al Kashi ca. 1380 – 1429		$\frac{6}{60^0}+\frac{16}{60^1}+\frac{59}{60^2}+\frac{28}{60^3}+\frac{1}{60^4}+\frac{34}{60^5}+\frac{51}{60^6}+\frac{46}{60^7}+\frac{14}{60^8}+\frac{50}{60^9}$

c) Diese Kreise haben in Orginalgröße 10 cm Durchmesser.
Wähle eine der beiden Abbildungen.
Bestimme die Länge der dick markierten Streckenzüge in Originalgröße.
Erkläre, warum man aus dieser Länge einen Näherungswert für die Zahl π erhält.

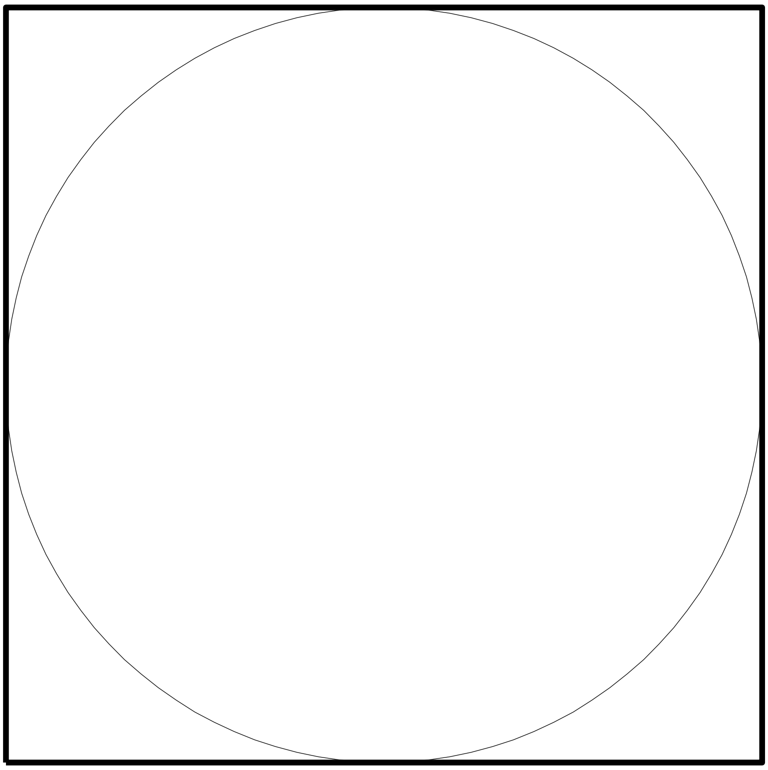
Du findest diese Skizzen in Orginalgröße auf der nächsten Seite.

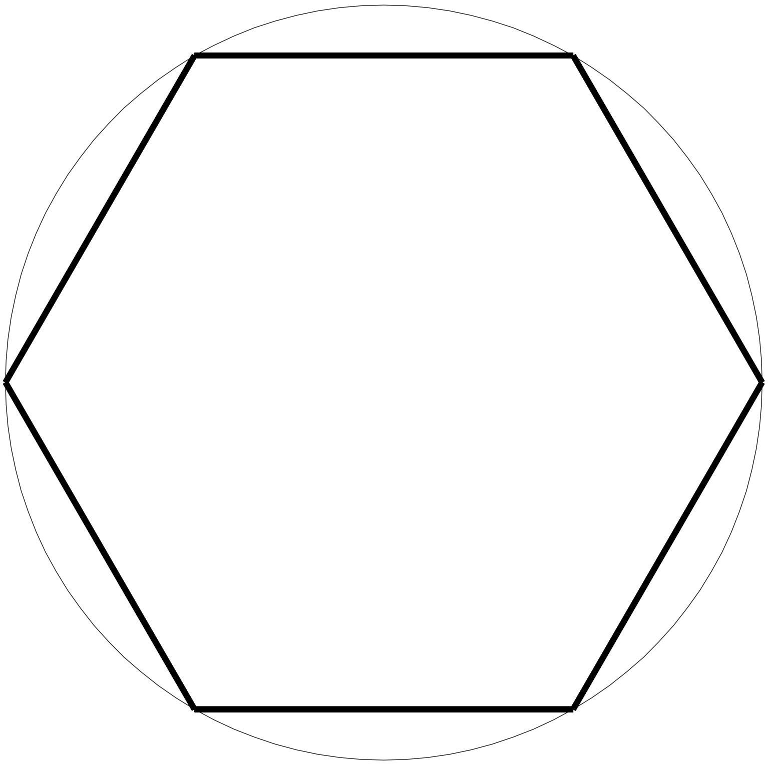
© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht

MATHE 364

10.11. Die berühmteste Zahl der Welt

c) Wähle eine der beiden Abbildungen. **Bestimme** die Länge der dick markierten Streckenzüge. **Erkläre**, warum man damit einen Näherungswert für die Zahl π erhält.





© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht

Lösungen 01.11. Die berühmteste Zahl der Welt

Information: Die Kreiszahl Pi

Bei jedem Kreis ist der Umfang ungefähr 3,14 mal so lang wie der Durchmesser. Der genaue Wert dieser Zahl wird mit π abgekürzt. Der Buchstabe π (sprich „pi") aus dem griechischen Alphabet entspricht dem Buchstaben p im lateinischen Alphabet. π ist also ein kleines griechisches p als Abkürzung für das griechische Wort περιφέρεια oder lateinisch *Peripherie*, wörtlich *Randbereich*, hier *Kreisumfang*.

$\pi \approx$ 3,1415926535914039784825424142192796639198932348258351990748479774631213467319607687311770202760658019856787782293313748756552931794701750828279617333446602340831924321687635134949974377454352133248198885761811719505745205021470871139148235332805353604831836629552797516120280724446648927278556806690909888110316705625724487754615483690633109809735471194503 89

Für das praktische Arbeiten im Handwerk genügt der Näherungswert 3,14. Trotzdem sucht die Mathematik immer mehr Stellen nach dem Komma. Aktuell liegt der Weltrekord bei 63 Billionen Ziffern(August 2021).

Die Zahl π ist irrational, hat also unendlich viele Nachkommastellen, bei denen sich kein bestimmtes Ziffernmuster unendlich oft periodisch wiederholt.

a) **Lies** den Informationstext. √

Schätze, wie viele Ziffern von π in der Abbildung angegeben sind. exakt 358

b) Wähle *mindestens zwei* historische Näherungswerte und **gib** sie in Ziffernschreibweise **an**. Nutze den Taschenrechner.

Entscheide, ob der Wert kleiner oder größer ist als π.

Papyrus Rhind	1650 Jh. v. u. Z	$\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}\overline{160493827} > \pi$ eine gültige Nachkommastelle
Archimedes 287 – 212 v. u. Z		$\frac{221}{71} = 3{,}\overline{1126760563380281690140845070422535 2} < \pi$ $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857} > \pi$ zwei gültige Nachkommastellen
Ptolemäus	ca. 100 – 160	$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60 \cdot 60} = 3{,}141\overline{6} > \pi$ drei gültige Nachkommastellen
Tsu Ch'ung-Chih	429 – 500	
$\frac{355}{113} = 3{,}\overline{1415929203539823008849557522123893805309734513274336 2\ldots}$ $\overline{\ldots 8318584070796460176991150442477876106194690265486725663716 8} > \pi$ sechs gültige Nachkommastellen		
Brahmagupta	7. Jahrhundert	$\sqrt{10} \approx 3{,}162277660161882\ldots > \pi$ ist irrational und hat eine gültige Nachkommastelle
Al Kashi	ca. 1380 – 1429	
$\frac{6}{60^0} + \frac{16}{60^1} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9}$ = 6,28318530717411239834109161756259777183346184478989170 13 ... < 2π ist ein Näherungswert für die Zahl $2 \cdot \pi$ mit zehn gültigen Nachkommastellen. Der Näherungswert ist periodischer Dezimalbruch; aus Platzgründen können hier nicht alle Ziffern der Periode dargestellt werden, es sind mehr als 2000.		

c) *siehe nächste Seite*

© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht

c) **Bestimme** die Länge des dick markierten Streckenzuges. **Erkläre**, warum man damit einen Näherungswert für die Zahl π erhält.

Der Kreis hat einen Durchmesser von 10 cm.

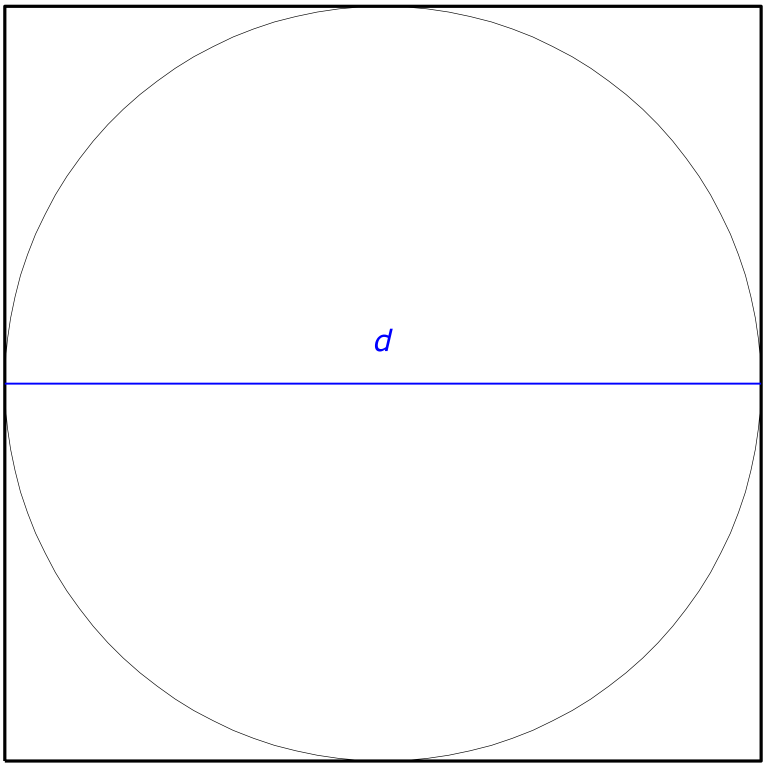
Der Umfang des Kreises ist $u = \pi \cdot d = \pi \cdot 10\,\text{cm}$.

Das Quadrat eine Seitenlänge von 10 cm.

Der Umfang des Quadrat ist $u = 4 \cdot 10\,\text{cm}$.

Da sich die beiden Terme $\pi \cdot 10\,\text{cm}$ und $4 \cdot 10\,\text{cm}$ nur in dem Faktor π bzw. 4 vor der 10 unterscheiden, ist 4 der Näherungswert für π.

Man sieht auch, dass der Weg einmal um den Kreis herum auf dem Rand des Quadrats länger ist als der Weg auf der Kreislinie.



© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht

c) **Bestimme** die Länge des dick markierten Streckenzuges. **Erkläre**, warum man damit einen Näherungswert für die Zahl π erhält.

Der Kreis hat einen Durchmesser von 10 cm.

Der Radius ist halb so lang, also 5 cm.

$d = 2 \cdot r$ bzw. $r = 0{,}5 \cdot r$

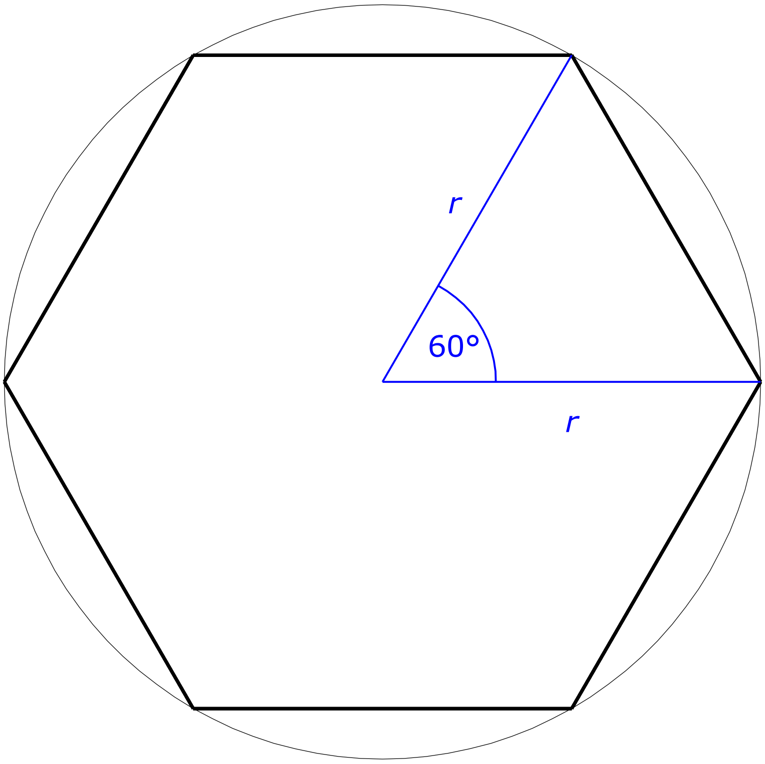
Bei einem regelmäßigen Sechseck sind die Seiten genauso lang wie der Radius des Umkreises.

Der Umfang des Kreises ist $u = \pi \cdot d = \pi \cdot 10\text{ cm} = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 5\text{ cm}$.

Der Umfang regelmäßigen Sechsecks ist $u = 6 \cdot r = 6 \cdot 5\text{ cm}$.

Da sich die beiden Terme $2 \cdot \pi \cdot 5\text{ cm}$ und $6 \cdot 5\text{ cm}$ nur in dem Faktor $2 \cdot \pi$ bzw. 6 vor der 5 unterscheiden, ist 6 der Näherungswert für $2 \cdot \pi$.

Man sieht auch, dass der Weg einmal um den Kreis herum auf dem Rand des Sechsecks kürzer ist als der Weg auf der Kreislinie.



Die Aussage „*Bei einem regelmäßigen Sechseck sind die Seiten genauso lang wie der Radius des Umkreises*." muss begründet werden. Dazu betrachten wir das eingezeichnete Dreieck und weisen nach, dass es gleichseitig ist. Die beiden blau gefärbten Seiten sind Radien des Kreises, also gleich lang. Das Dreieck ist also gleichschenklig. Die dritte Seite ist die Basis. Da wir die Radien auch zu anderen Eckpunkten des Sechsecks einzeichnen können, ist sicher, dass sechs solcher Dreiecke unmittelbar aneinandergelegt in den Kreis passen. Das eingetragene Winkelmaß 60° muss exakt stimmen, da $6 \cdot 60° = 360°$ ist. Das eingezeichnete Dreieck ist gleichseitig, denn die beiden Basiswinkel sind gleich groß. Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt, haben die Basiswinkel ebenfalls die Größe 60°. Da das Dreieck gleichseitig ist, hat ist dritte Seite ebenfalls so lang wie der Radius.

© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht