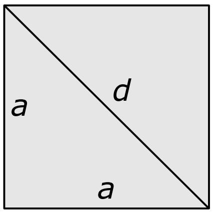
MATHE 364

30.11. Diagonalen im Quadrat



$$a^2 + a^2 = d^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot a^2 = d^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2 \cdot a^2} = d$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \cdot a = d$$

$$\sqrt{2} \cdot a = d$$
$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d$$

a) Ein Quadrat hat die Seitenlänge a und die Diagonalenlänge d.

Berechne *mindestens jeweils eine* Seitenlänge *sowie eine* Diagonalenlänge.

- $a = 4{,}8$ cm
- $a = 12{,}5$ dm
- $a = 3{,}2$ cm
- $a = 4{,}24$ cm

- $d = 3{,}2$ dm
- $d = 4{,}24$ cm
- $d = 6{,}7$ dm
- $d = 6{,}6$ dm

Wahlaufgaben: Bearbeite Teilaufgabe **b)** *oder* Teilaufgabe **c)**.

b) **Konstruiere** *ein* Quadrat aus einer der in **a)** vorgegebenen Seitenlängen a *sowie ein zweites* Quadrat aus einer der in **a)** vorgegebenen Diagonalenängen d.

c) In den Gleichungen

$$d = \sqrt{2} \cdot a \quad \text{und} \quad a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d$$

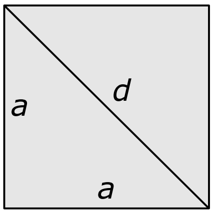
ist mindestens eine der beiden Größen a bzw. d irrational.

- **Trage** die fehlenden Werte in der Tabelle **ein**.
  Berechne dazu eine Seitenlänge a bzw. eine Diagonalenlänge d und runde dabei auf die jeweils angegebene Stellenzahl. Beispielsweise bedeutet 4,80 cm, dass auf zwei Dezimalen (Stellen nach dem Komma) gerundet wird, also auf $\frac{1}{10}$ mm.
- **Beschreibe**, was dir auffällt.
- Kannst du auch zwei zusammengehörenden Längen a und d **angeben**, die beide zugleich irrational sind?

Anzahl Dezimalen	Länge *a* exakt	*a* gerundet	Länge *d* exakt	*d* gerundet
1	4,7 cm Vorgabe	siehe links	$\sqrt{2} \cdot 4{,}7$ cm	6,6 cm
2	4,70 cm Vorgabe	siehe links	$\sqrt{2} \cdot 4{,}70$ cm	6,65 cm
1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 6{,}6$ cm	4,70 cm	6,6 cm Vorgabe	siehe links
2	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 6{,}60$ cm	4,67 cm	6,60 cm Vorgabe	siehe links
1			$10 \cdot \sqrt{2}$ cm	14,1 cm
2			$10 \cdot \sqrt{2}$ cm	14,14 cm
1	$8 \cdot \sqrt{2}$ cm	11,3 cm		
2	$8 \cdot \sqrt{2}$ cm	11,31 cm		

MATHE 364

Lösungen 30.11. Diagonalen im Quadrat



$$a^2 + a^2 = d^2$$
$$\Leftrightarrow \; 2 \cdot a^2 = d^2$$
$$\Leftrightarrow \; \sqrt{2 \cdot a^2} = d$$
$$\Leftrightarrow \; \sqrt{2} \cdot a = d$$

$$\sqrt{2} \cdot a = d$$
$$\Leftrightarrow \; a = \frac{d}{\sqrt{2}}$$
$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d$$

a) Ein Quadrat hat die Seitenlänge *a* und die Diagonalenlänge *d*.
Berechne *mindestens jeweils eine* Seitenlänge *sowie eine* Diagonalenlänge.
siehe Tabelle; bei Rundung auf andere Stellenzahl abweichende Werte möglich

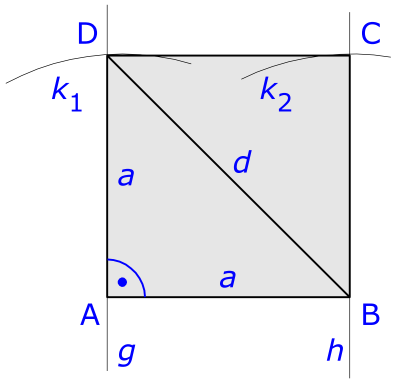
• $a = 4{,}8$ cm	$d = \sqrt{2} \cdot 4{,}8\,\text{cm} \approx 6{,}8\,\text{cm}$	• $d = 3{,}2$ dm	$a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3{,}2\,\text{dm} \approx 2{,}3\,\text{dm}$
• $a = 12{,}5$ dm	$d = \sqrt{2} \cdot 12{,}5\,\text{dm} \approx 17{,}7\,\text{dm}$	• $d = 4{,}24$ cm	$a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4{,}24\,\text{cm} \approx 3{,}00\,\text{cm}$
• $a = 3{,}2$ cm	$d = \sqrt{2} \cdot 3{,}2\,\text{cm} \approx 4{,}5\,\text{cm}$	• $d = 6{,}7$ dm	$a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 6{,}7\,\text{dm} \approx 4{,}7\,\text{dm}$
• $a = 4{,}24$ cm	$d = \sqrt{2} \cdot 4{,}24\,\text{cm} \approx 6{,}00\,\text{cm}$	• $d = 6{,}6$ dm	$a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 6{,}6\,\text{dm} \approx 4{,}7\,\text{dm}$

Wahlaufgaben: Bearbeite Teilaufgabe **b)** *oder* Teilaufgabe **c)**.

b) **Konstruiere** *je ein* Quadrat aus den vorgegebenen Werten von *a sowie* von *d*.
Zum Beispiel (andere Konstruktionsideen möglich)

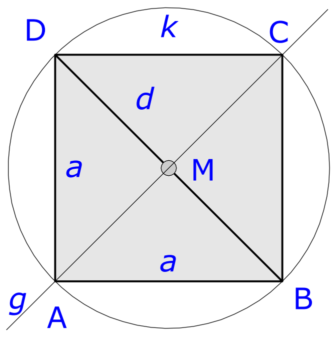
- Strecke $\overline{AB}$ der Länge *a*
- Senkrechte *g* zu $\overline{AB}$ durch A
- Kreis k_1 mit Mittelpunkt A und Radius *a*
- Schnittpunkt von k_1 und *g* ist D.
- Senkrechte *h* zu $\overline{AB}$ durch B
- Kreis K_2 mit Mittelpunkt B und Radius *a*
- Schnittpunkt von k_2 und *h* ist C.
- Vieleck ABCD

hier für *a* = 3,2 cm



- Strecke $\overline{DB}$ der Länge *d*
- Mittelsenkrechte *g* zu $\overline{DB}$
- Schnittpunkt von *g* und $\overline{DB}$ ist M.
- Kreis *k* mit Mittelpunkt M durch Punkt B
- Schnittpunkte von *k* und g sind A und C.
- Vieleck ABCD

hier für *d* = 4,24 cm



Lösungen 30.11. Diagonalen im Quadrat

c) In den Gleichungen

$$d = \sqrt{2} \cdot a \quad \text{und} \quad a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d$$

ist mindestens eine der beiden Größen *a* bzw. *d* irrational.

- **Trage** die fehlenden Werte in der Tabelle **ein**. siehe Tabelle
  Berechne dazu eine Seitenlänge *a* bzw. eine Diagonalenlänge *d* und runde dabei auf die jeweils angegebene Stellenzahl. Beispielsweise bedeutet 4,80 cm, dass auf zwei Dezimalen (Stellen nach dem Komma) gerundet wird, also auf $\frac{1}{10}$ mm.
- **Beschreibe**, was dir auffällt. *Individuell; Beispiele für mögliche Beobachtungen*
- Beim gleichem Ausgangswert *a* können sich je nach Rundung verschiedene Werte von *d* ergeben. (Analog: mit gleichen Werten von *d* verschiedene Werte von *a*)
- Je nach Rundung ergibt sich der gleiche Wert von *a* aus unterschiedlichen Ausgangswerten von *d* (entsprechend: aus verschiedenen *d* gleiche Werte von *a*)
- Die Abweichungen sind jedoch nie größer der Wert der kleinsten Stelle, auf die man rundet. Zum Beispiel kann der auf Hundertstel (0,01) gerundete Ausgangswert von *a* um 0,5 Hundertstel (0,005) vom exakten Wert *a* nach oben oder nach unten abweichen. Die maximale Abweichung für *d* ist das $\sqrt{2}$ - Fache von 0,005, das sind ca. 0,007 und somit weniger als 0,01.
  Entsprechend ist bei einer Ungenauigkeit des gerundeten Ausgangswertes für *d* in Höhe von plus / minus 0,005 maximal ca. 0,0035 Abweichung für a, also ebenfalls kleiner als 0,01. Dennoch sollte man nie mit gerundeten Zwischenergebnissen weiterrechnen, sondern mit den im Rechner gespeicherten „*Dezimabruchbandwürmern*“, die man dazu nicht einmal eintippen muss.
- Kannst du auch zwei zusammengehörenden Längen *a* und *d* **angeben**, die beide zugleich irrational sind? Die Aussage „mindestens eine der beiden Größen *a* bzw. *d* [ist] irrational“ wird trotz ihrer Klarheit gelegentlich als „entweder oder“ missverstanden. *Geht nicht auch beides*? Rechnerische Ursache für die „glatten“ rationalen Werte in den vier letzten Tabellenzeilen ist nämlich der Termbestandteil $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ bzw. $\sqrt{2} : \sqrt{2} = 1$. Also ist zu vermieden, dass die Längen *a* und *d* (ausschließlich) das $\sqrt{2}$ - Fache einer rationalen Länge sind.
  Beispielsweise ergibt die Länge $a = \sqrt{3}$ die ebenfalls irrationale Länge $d = \sqrt{6}$.
  Aus $d = \sqrt{10}$ folgt die Seitenlänge $a = \sqrt{5}$.

Anzahl Dezimalen	Länge *a* exakt	*a* gerundet	Länge *d* exakt	*d* gerundet
1	4,7 cm Vorgabe	siehe links	$\sqrt{2} \cdot 4{,}7$ cm	6,6 cm
2	4,70 cm Vorgabe	siehe links	$\sqrt{2} \cdot 4{,}70$ cm	6,65 cm
1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 6{,}6$ cm	4,70 cm	6,6 cm Vorgabe	siehe links
2	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 6{,}60$ cm	4,67 cm	6,60 cm Vorgabe	siehe links
1	10,0 cm	10,0 cm	$10 \cdot \sqrt{2}$ cm	14,1 cm
2	10,00 cm	10,00 cm	$10 \cdot \sqrt{2}$ cm	14,14 cm
1	$8 \cdot \sqrt{2}$ cm	11,3 cm	16,00 cm	16,00 cm
2	$8 \cdot \sqrt{2}$ cm	11,31 cm	16,00 cm	16,00 cm