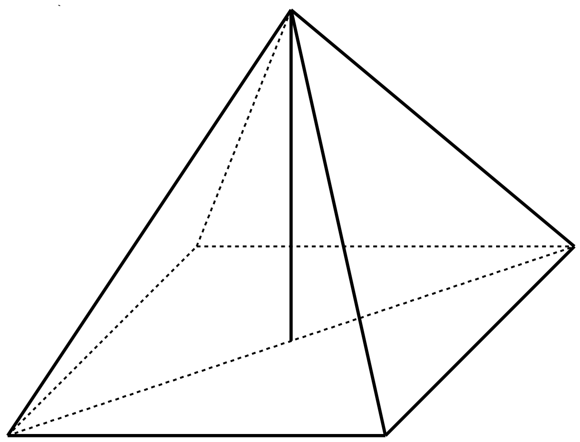
MATHE 364

21.10. Der Satz des Pythagoras – Anwendung

Wahlaufgaben: Bearbeite *eine* der Teilaufgaben **a)** bis **d)**.

a) Eine gerade quadratische Pyramide hat eine quadratische Grundfläche; die Spitze befindet sich genau über dem Schwerpunkt („Mittelpunkt“) der Grundfläche. Bei dieser Pyramide (siehe Skizze) sind die Grundkanten, das sind die Seiten der quadratischen Grundfläche, 24 mm lang. Die Kanten, die von den Ecken der Grundfläche zur Spitze führen, sind 27 mm lang.

Zeige rechnerisch, dass die räumliche Höhe (vom Schwerpunkt der Grundfläche zur Spitze) eine ganzzahlige Länge hat, wenn man in mm misst.



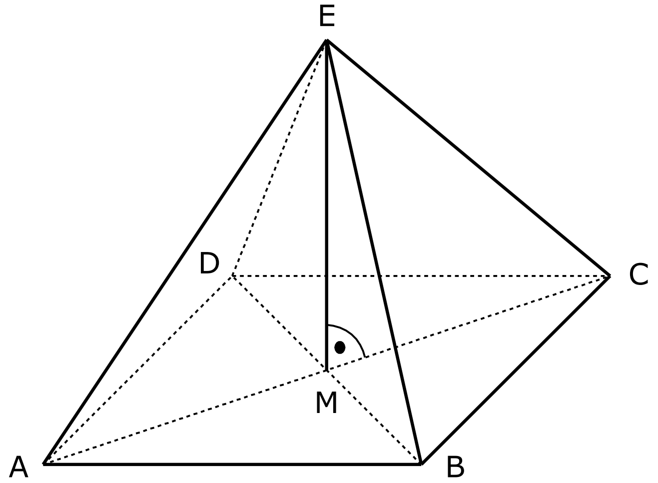
Die Teilaufgaben **b)**, **c)** *und* **d)** *findest du auf den nächsten Seiten.*

MATHE 364

21.10. Der Satz des Pythagoras – Anwendung

Wahlaufgaben: Bearbeite *eine* der Teilaufgaben **a)** bis **d)**.

b) Die Abbildung zeigt die Skizze einer geraden quadratischen Pyramide.
Die Grundfläche ist ein Quadrat. Der Schwerpunkt des Quadrats („Mittelpunkt") ist der Schnittpunkt M der beiden Diagonalen. Die Spitze E befindet sich genau senkrecht über dem Punkt M.



Folgende Maße der Pyramide sind bekannt:
Länge der Grundkante, z. B. $|AB| = 36\,\text{mm}$
räumliche Höhe $|ME| = 51\,\text{mm}$
Länge der Diagonalen der Grundfläche, z. B. $|AC| = \sqrt{2} \cdot 36\,\text{mm} \approx 50{,}9\,\text{mm}$

- **Zeige** durch eine Rechnung, dass die Längenangabe $|AC| = \sqrt{2} \cdot 36\,\text{mm}$ stimmt.

Alle vier Kanten, die von den Ecken der Grundfläche zur Spitze führen, sind gleich lang.

- **Berechne** die Länge einer solchen Kante, z. B. die Länge $|CE|$.
- **Begründe**, dass alle Kanten von den Ecken zur Spitze gleich lang sein müssen.

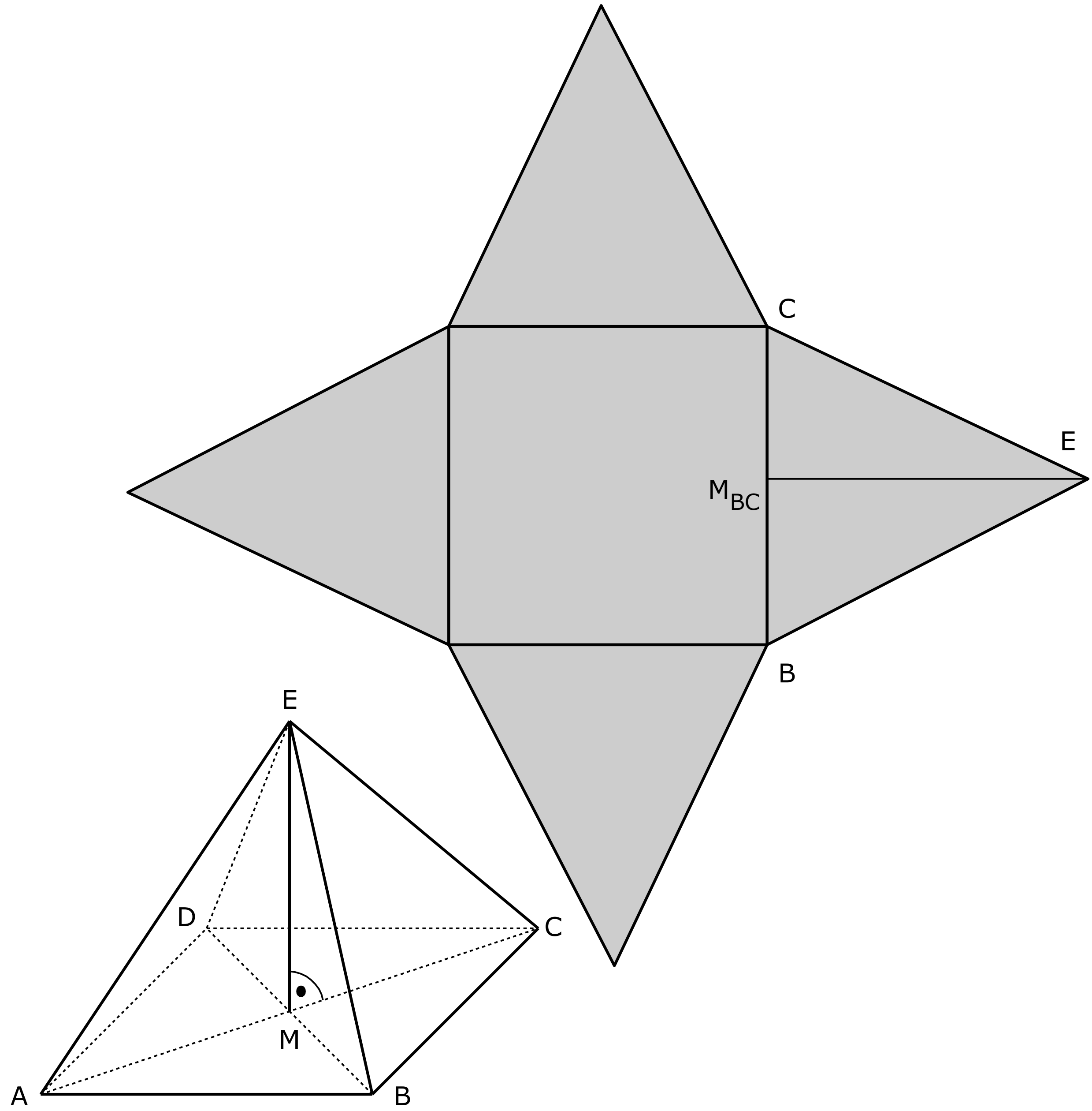
Die Teilaufgaben **c)** *und* **d)** *findest du auf den nächsten beiden Seiten.*

MATHE 364

21.10. Der Satz des Pythagoras – Anwendung

Wahlaufgaben: Bearbeite *eine* der Teilaufgaben **a)** bis **d)***, siehe 1. bis 4. Seite.*

c) Die Abbildung zeigt das Netz einer Pyramide sowie eine räumliche Skizze.
Die Seiten der quadratischen Grundfläche sind 48 mm lang.
Die schrägen Kanten zur Spitze sind 54 mm lang.
Die räumliche Höhe (Körperhöhe) |ME| ist 42 mm lang.

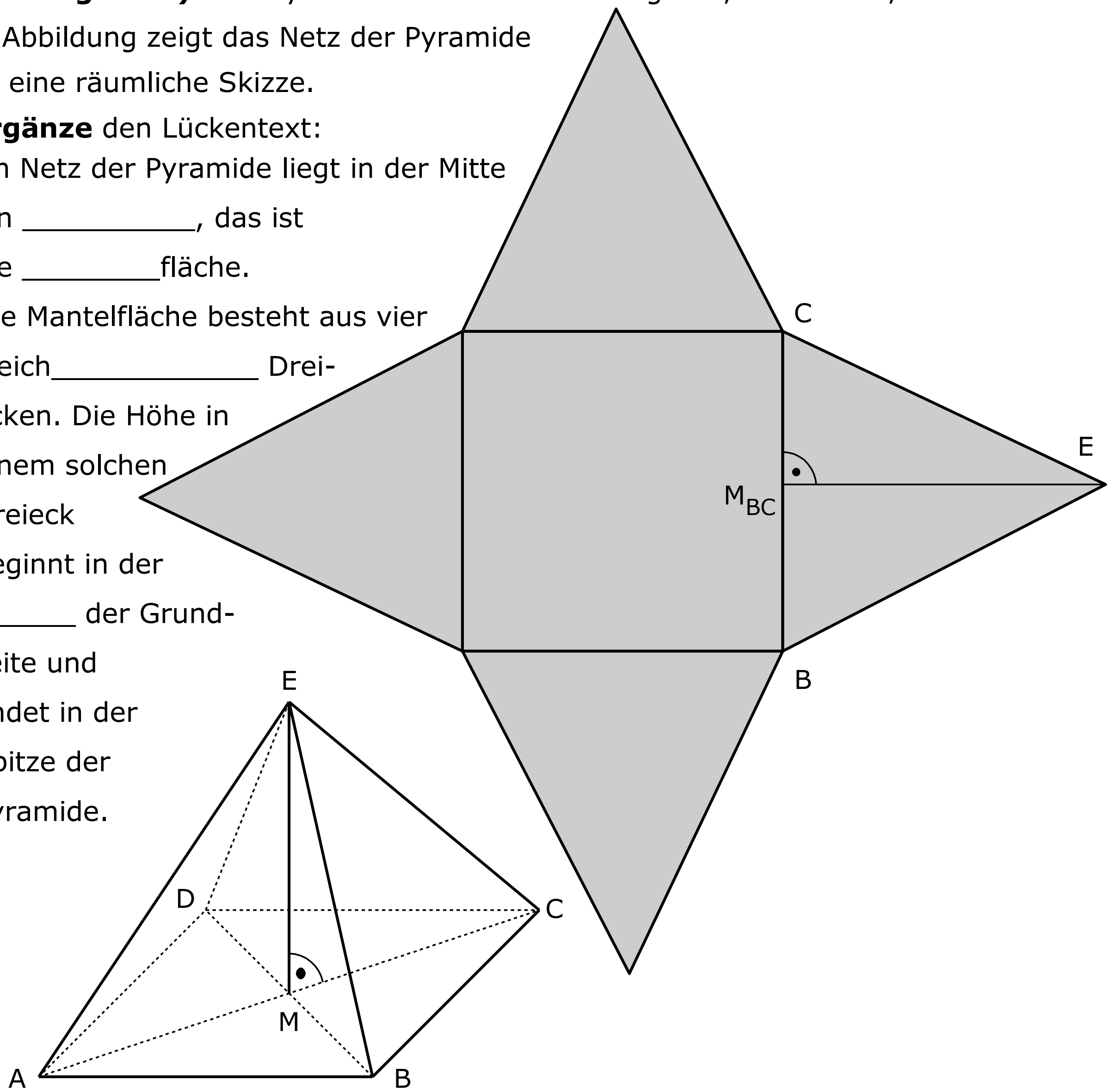


- **Zeige** durch eine Rechnung im Dreieck MCE, dass die halbe Diagonale |MC| die Länge $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 48\text{mm}$ hat und **gib** den gerundeten Wert **an**.
- **Berechne** die Länge der Höhe in einem Dreieck der Mantelfläche, z. B. im Dreieck BCE die Länge $|M_{BC}E|$ der Höhe zur Seite $\overline{BC}$.

21.10. Der Satz des Pythagoras – Anwendung

Wahlaufgabe d) Eine Pyramide hat die Kantenlängen 4,8 cm und 5,4 cm.
Die Abbildung zeigt das Netz der Pyramide und eine räumliche Skizze.

- **Ergänze** den Lückentext:
  Im Netz der Pyramide liegt in der Mitte ein __________, das ist die ________fläche.
  Die Mantelfläche besteht aus vier gleich____________ Dreiecken. Die Höhe in einem solchen Dreieck beginnt in der ______ der Grundseite und endet in der Spitze der Pyramide.



- **Beschrifte** mehrere Kanten im Netz und in der räumlichen Skizze mit der Kantenlänge. **Überprüfe** deine Beschriftung im Netz durch Nachmessen.
- In der räumlichen Skizze sind die Diagonalen der Grundfläche eingezeichnet. **Zeichne** diese Diagonalen in das Netz **ein**.
- Im Netz ist in einer dreieckigen Seitenfläche die Höhe eingezeichnet. **Zeichne** diese Höhe in die räumliche Skizze **ein**.
- **Berechne** die Länge der Höhe im Dreieck BEC.
  Wende dazu den Satz des Pythagoras im Dreieck $M_{BC}EC$ an.
- Das Dreieck MCE in der räumlichen Skizze ist rechtwinklig und hat die Seitenlängen $|CE| = 5{,}4$ cm sowie $|MC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4{,}8$ cm $\approx 3{,}4$ cm.

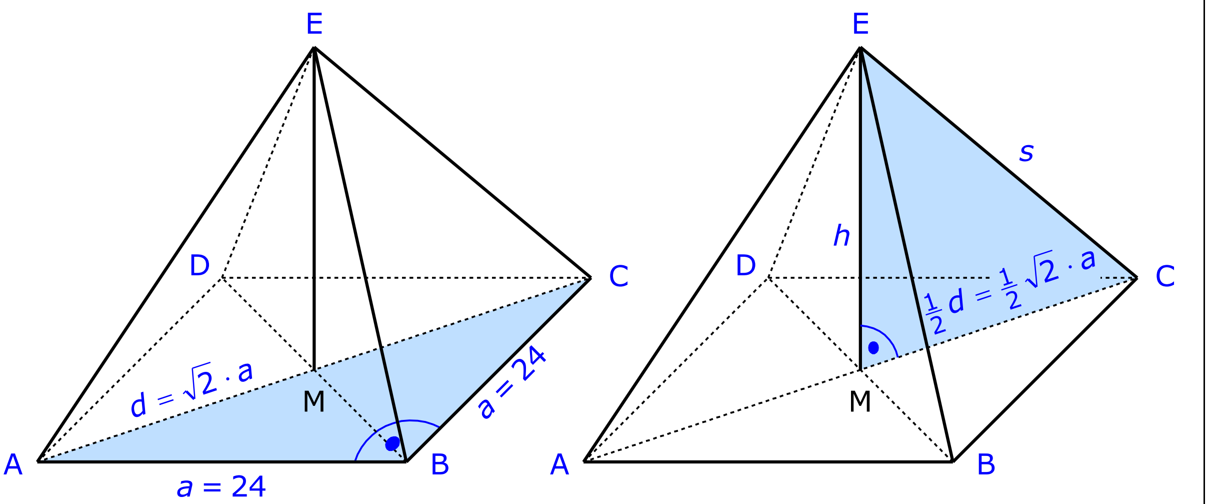
  Berechne die Länge der räumlichen Höhe |ME| und **vergleiche** sie mit $|M_{BC}E|$.

Lösungen 21.10. Der Satz des Pythagoras – Anwendung

Wahlaufgaben: Bearbeite *eine* der Teilaufgaben **a)** bis **d)**.

a) Eine gerade quadratische Pyramide hat eine quadratische Grundfläche; die Spitze befindet sich genau über dem Schwerpunkt („Mittelpunkt") der Grundfläche. Bei dieser Pyramide (siehe Skizze) sind die Grundkanten, das sind die Seiten der quadratischen Grundfläche, 24 mm lang. Die Kanten, die von den Ecken der Grundfläche zur Spitze führen, sind 27 mm lang.

Zeige rechnerisch, dass die räumliche Höhe (vom Schwerpunkt der Grundfläche zur Spitze) eine ganzzahlige Länge hat, wenn man in mm misst.



Da die Grundfläche quadratisch ist, kann die Länge der Diagonalen mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck ABC bestimmt werden:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$
$$a^2 + a^2 = d^2$$
$$d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$$

Das Dreieck MCE ist ebenfalls rechtwinklig, die Länge |MC| ist halb so groß wie die gerade bestimmte Länge *d*.

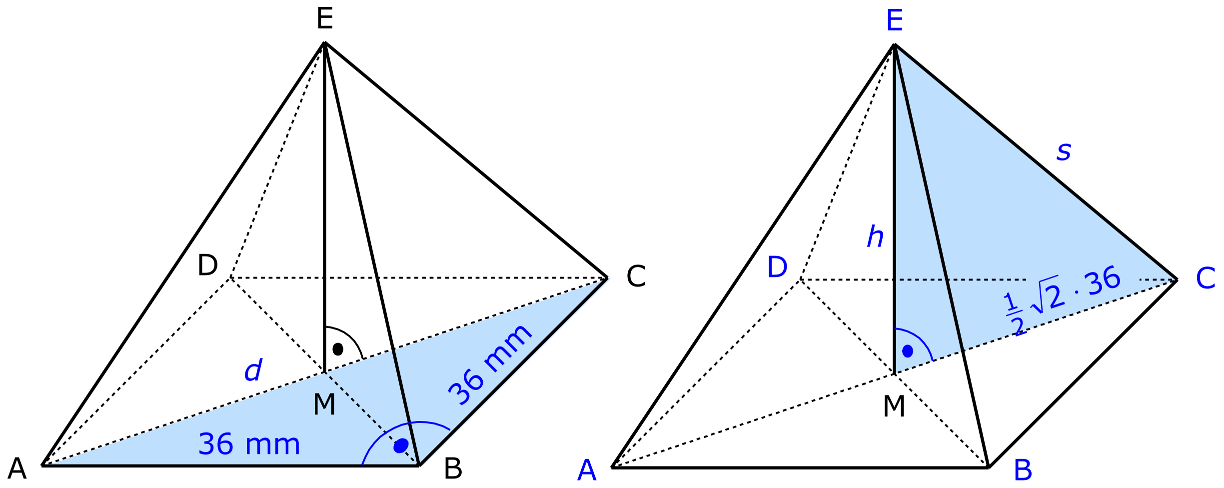
$$|MC|^2 + |EM|^2 = |EC|^2$$
$$\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 + h^2 = s^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h^2 = s^2 - \tfrac{1}{4}d^2$$
$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 - \tfrac{1}{4}d^2}$$
$$= \sqrt{27^2 - \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{2}^2 \cdot a^2}$$
$$= \sqrt{27^2 - \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 24^2}$$
$$= \sqrt{729 - \tfrac{1}{2} \cdot 576} = \sqrt{441} = 21$$

Die räumliche Höhe beträgt 21 mm, das ist ein ganzzahliger Wert.

Lösungen 21.10. Der Satz des Pythagoras – Anwendung

Wahlaufgaben: Bearbeite *eine* der Teilaufgaben **a)** bis **d)**.

b) Die Abbildung zeigt die Skizze einer geraden quadratischen Pyramide.
Die Grundfläche ist ein Quadrat. Der Schwerpunkt des Quadrats („Mittelpunkt") ist der Schnittpunkt M der beiden Diagonalen. Die Spitze E befindet sich genau senkrecht über dem Punkt M.



Folgende Maße der Pyramide sind bekannt:

Länge der Grundkante, z. B. |AB| = 36 mm

räumliche Höhe |ME| = 51 mm

Länge der Diagonalen der Grundfläche, z. B. |AC| = $\sqrt{2}\cdot 36$ mm ≈ 50,9 mm

- **Zeige** durch eine Rechnung, dass die Längenangabe |AC| = $\sqrt{2}\cdot 36$ mm stimmt.

Satz des Pythagoras im Dreieck ABC: $d^2 = 36^2 + 36^2 = 2\cdot 36^2$

$$\Rightarrow \quad d = \sqrt{2}\cdot 36$$

Alle vier Kanten, die von den Ecken der Grundfläche zur Spitze führen, sind gleich lang.

- **Berechne** die Länge einer solchen Kante, z. B. die Länge |CE| .

Satz des Pythagoras im Dreieck MCE: $|MC|^2 + |EM|^2 = |EC|^2$

$$\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 + h^2 = s^2$$

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 36)^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}\cdot 18)^2 + 51^2}$$

$$= \sqrt{2\cdot 324 + 2601}$$

$$= \sqrt{3249} = 57$$

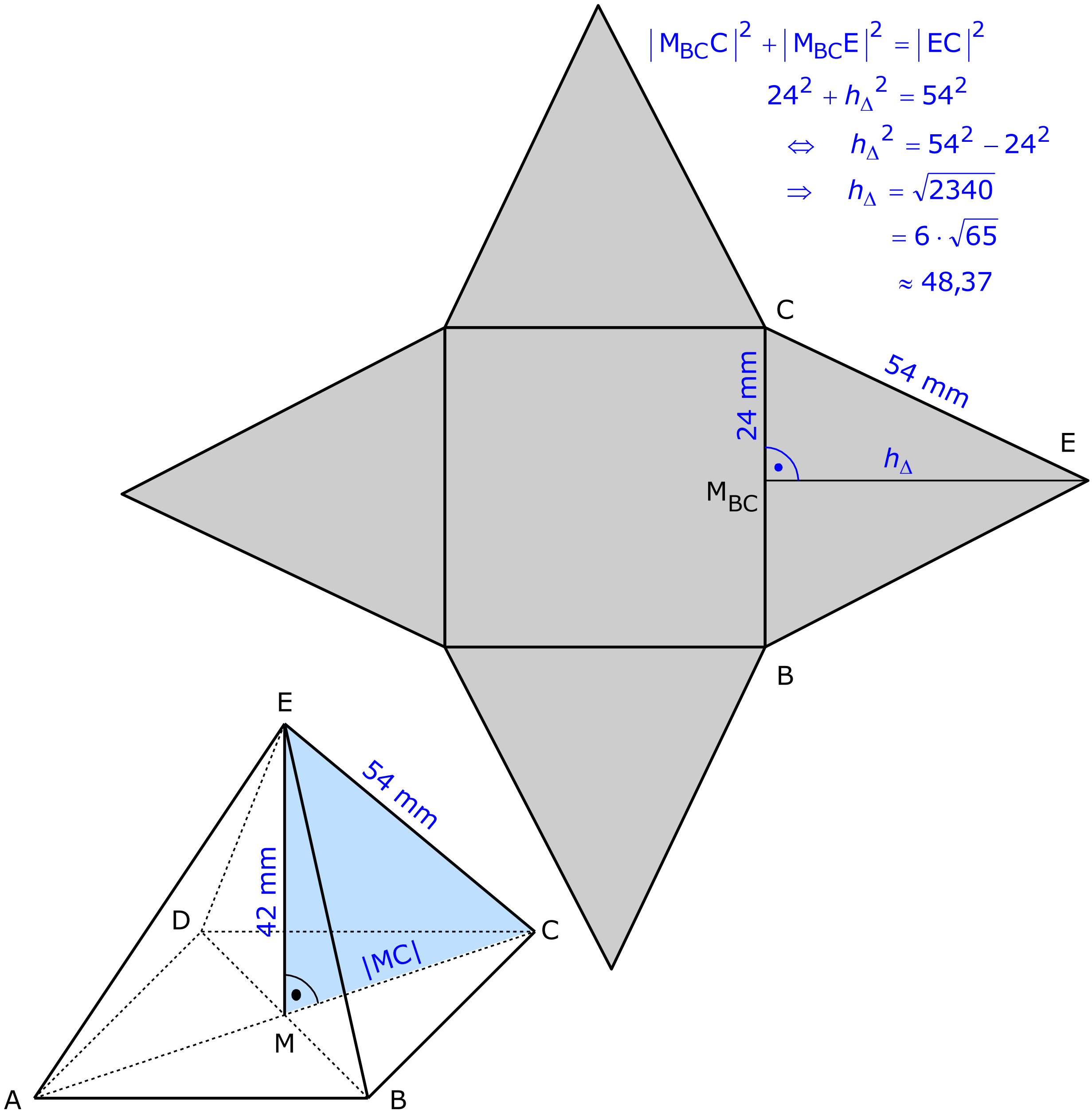
- **Begründe**, dass alle Kanten von den Ecken zur Spitze gleich lang sein müssen.

Die Pyramide ist symmetrisch. Der Punkt M liegt in der Mitte der Diagonalen. Hätte man statt C einen anderen Eckpunkt gewählt, wäre die Kathete genauso lang wie |MC|. Die Länge der anderen Kathete ist immer die Höhe *h*.

Mit dem Satz des Pythagoras erhält man also für alle Kanten zur Spitze die gleiche Länge.

Lösungen 21.10. Der Satz des Pythagoras – Anwendung

c) Die Abbildung zeigt das Netz einer Pyramide sowie eine räumliche Skizze.
Die Seiten der quadratischen Grundfläche sind 48 mm lang.
Die schrägen Kanten zur Spitze sind 54 mm lang.
Die räumliche Höhe (Körperhöhe) |ME| ist 42 mm lang.



$$|M_{BC}C|^2 + |M_{BC}E|^2 = |EC|^2$$
$$24^2 + h_\Delta{}^2 = 54^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h_\Delta{}^2 = 54^2 - 24^2$$
$$\Rightarrow \quad h_\Delta = \sqrt{2340} = 6 \cdot \sqrt{65} \approx 48{,}37$$

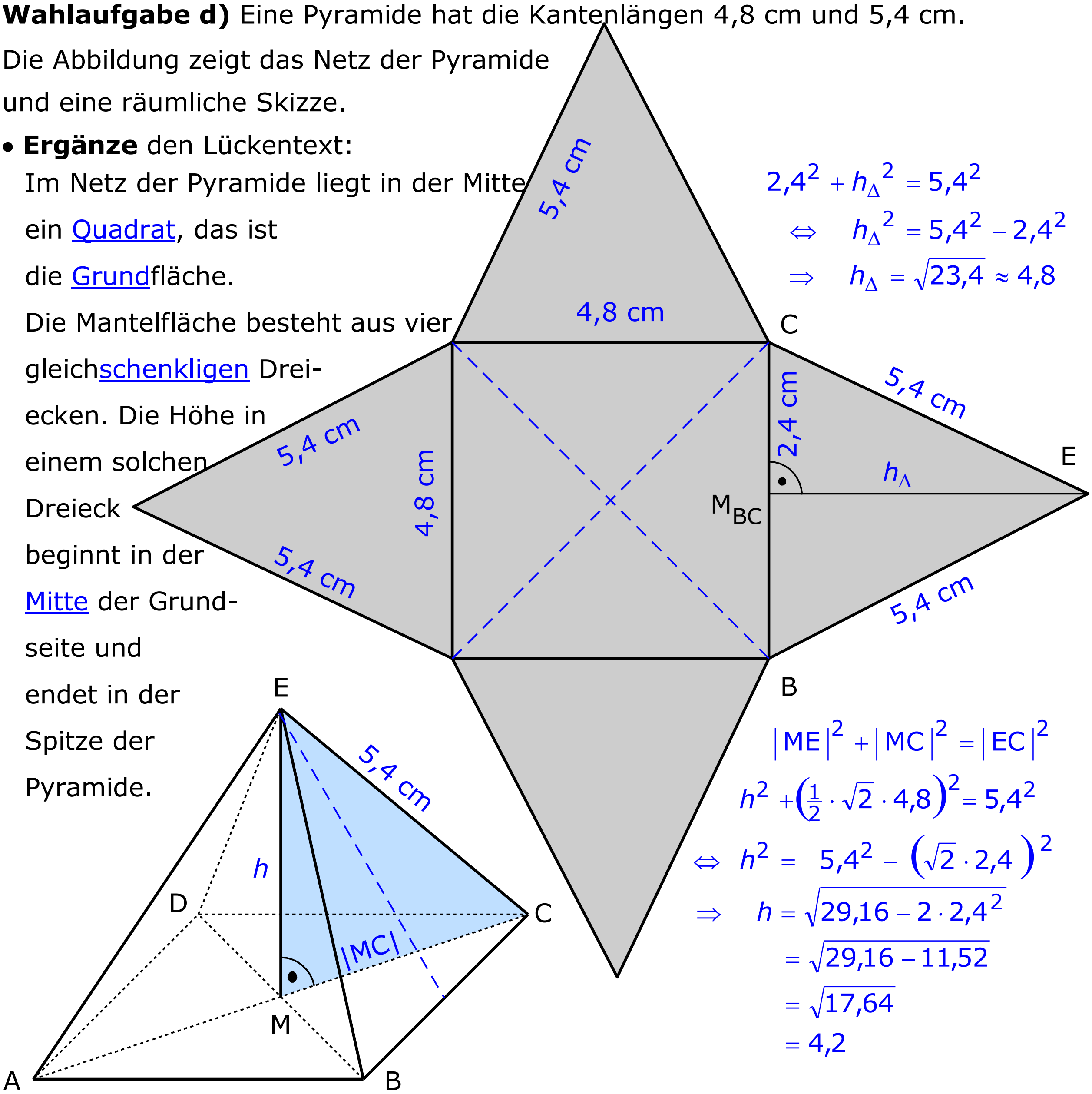
- **Zeige** durch eine Rechnung im Dreieck MCE, dass die halbe Diagonale |MC| die Länge $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 48$mm hat und **gib** den gerundeten Wert **an**.
  Satz des Pythagoras im Dreieck MCE:
  |MC| ≈ 33,94 mm

$$|MC|^2 + |ME|^2 = |EC|^2$$
$$\Leftrightarrow \quad |MC|^2 = |EC|^2 - |ME|^2$$
$$\Leftrightarrow \quad |MC|^2 = 54^2 - 42^2$$
$$\Rightarrow \quad |MC| = \sqrt{1152} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 48$$

- **Berechne** die Länge der Höhe in einem Dreieck der Mantelfläche, z. B. im Dreieck BCE die Länge $|M_{BC}E|$ der Höhe zur Seite $\overline{BC}$. siehe oben

Wahlaufgabe d) Eine Pyramide hat die Kantenlängen 4,8 cm und 5,4 cm.
Die Abbildung zeigt das Netz der Pyramide und eine räumliche Skizze.

- **Ergänze** den Lückentext:
  Im Netz der Pyramide liegt in der Mitte ein Quadrat, das ist die Grundfläche.
  Die Mantelfläche besteht aus vier gleichschenkligen Dreiecken. Die Höhe in einem solchen Dreieck beginnt in der Mitte der Grundseite und endet in der Spitze der Pyramide.



$$2{,}4^2 + h_\Delta^{\,2} = 5{,}4^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h_\Delta^{\,2} = 5{,}4^2 - 2{,}4^2$$
$$\Rightarrow \quad h_\Delta = \sqrt{23{,}4} \approx 4{,}8$$

$$|ME|^2 + |MC|^2 = |EC|^2$$
$$h^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 4{,}8\right)^2 = 5{,}4^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 5{,}4^2 - \left(\sqrt{2}\cdot 2{,}4\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{29{,}16 - 2\cdot 2{,}4^2}$$
$$= \sqrt{29{,}16 - 11{,}52}$$
$$= \sqrt{17{,}64}$$
$$= 4{,}2$$

- **Beschrifte** mehrere Kanten im Netz und in der räumlichen Skizze mit der Kantenlänge. **Überprüfe** deine Beschriftung im Netz durch Nachmessen. √
- In der räumlichen Skizze sind die Diagonalen der Grundfläche eingezeichnet. **Zeichne** diese Diagonalen in das Netz **ein**. √
- Im Netz ist in einer dreieckigen Seitenfläche die Höhe eingezeichnet. **Zeichne** diese Höhe in die räumliche Skizze **ein**. √
- **Berechne** die Länge der Höhe im Dreieck BEC.
  Wende dazu den Satz des Pythagoras im Dreieck $M_{BC}EC$ an. siehe oben
- Das Dreieck MCE in der räumlichen Skizze ist rechtwinklig und hat die Seitenlängen |CE| = 5,4 cm sowie |MC| = $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 4{,}8$ cm ≈ 3,4 cm. siehe oben
  Berechne die Länge der räumlichen Höhe |ME| und **vergleiche** sie mit $|M_{BC}E|$.
  Die Höhen in den dreieckigen Seitenflächen sind länger als die räumliche Höhe.