MATHE 364

02.10. Rechnen mit Wurzeln

Information: Rechnen mit Wurzeln
Die Eigenschaften von Quadratwurzeln haben wir an Quadraten untersucht.
Wenn ein Quadrat den Flächeninhalt A besitzt, dann ist seine Seitenlänge $\sqrt{A}$.
Beispiele:

Seitenlänge eines Quadrats	$\sqrt{48}$	7	$\sqrt{50}$			9
Flächeninhalt *A* eines Quadrats	48	49	50	60	64	

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Da Quadratwurzeln lediglich eine andere Schreibweise für Potenzen mit der Hochzahl $\frac{1}{2}$ sind, gelten beim Rechnen die Regeln der Potenzrechnung.
Wegen der Wurzel ist einer der beteiligten Exponenten stets die Hochzahl $\frac{1}{2}$.

Multiplikation
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ zwei Potenzen mit gleichen Hochzahlen werden multipliziert,
für $n = \frac{1}{2}$ also $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}}$ oder in Wurzelschreibweise $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

Division
$a^n : b^n = (a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ zwei Potenzen mit gleichen Hochzahlen werden
dividiert, hier $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = (a : b)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Potenzieren
$\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$ wird für $n = \frac{1}{2}$ zu $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^k = a^{\frac{1}{2} \cdot k}$ oder $\left(\sqrt{a}\right)^k = \sqrt{a^k}$, wobei $a > 0$ ist.

Für $k = \frac{1}{2}$ ist $\left(a^n\right)^{\frac{1}{2}} = a^{n \cdot \frac{1}{2}}$ gleichwertig mit $\left(a^n\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^n}$, wobei $a^n > 0$ sein muss.

Addieren und Subtrahieren
Für $\sqrt{a+b}$ und $\sqrt{a-b}$ gibt es keine einfache Regel zum Auflösen des Wurzelzeichens und entsprechend keine einfache Regel für $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sowie für $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

a) **Lies** den Informationstext. **Ergänze** die fehlenden Zahlen in der Tabelle.
Gib für die irrationalen Wurzeln Näherungswerte in Ziffernschreibweise **an**.

b) **Berechne** die Werte der Terme ohne Taschenrechner.
Überprüfe deine Ergebnisse mit dem Taschenrechner.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{\square \cdot \square} = \sqrt{\square} = \square$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}} = \sqrt{\frac{1}{\square}} = \frac{1}{\square} = 0{,}\square$; $\sqrt{42}^2 =$; $\sqrt{8^2 + 6^2} =$

Lösungen 02.10. Rechnen mit Wurzeln

Information: Rechnen mit Wurzeln
Die Eigenschaften von Quadratwurzeln haben wir an Quadraten untersucht.
Wenn ein Quadrat den Flächeninhalt A besitzt, dann ist seine Seitenlänge $\sqrt{A}$.
Beispiele:

Seitenlänge d. Quadrats	$\sqrt{48} \approx 6{,}92..$	7	$\sqrt{50} \approx 7{,}07..$	$\sqrt{60} \approx 7{,}74..$	8	9
Flächeninhalt *A*	48	49	50	60	64	81

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Da Quadratwurzeln lediglich eine andere Schreibweise für Potenzen mit der Hochzahl $\frac{1}{2}$ sind, gelten beim Rechnen die Regeln der Potenzrechnung. Wegen der Wurzel ist einer der beteiligten Exponenten stets die Hochzahl $\frac{1}{2}$.

Multiplikation

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ zwei Potenzen mit gleichen Hochzahlen werden multipliziert, für $n = \frac{1}{2}$ also $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}}$ oder in Wurzelschreibweise $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

Division

$a^n : b^n = (a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ zwei Potenzen mit gleichen Hochzahlen werden dividiert, hier $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = (a : b)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Potenzieren

$\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$ wird für $n = \frac{1}{2}$ zu $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^k = a^{\frac{1}{2} \cdot k}$ oder $\left(\sqrt{a}\right)^k = \sqrt{a^k}$, wobei $a > 0$ ist.

Für $k = \frac{1}{2}$ ist $\left(a^n\right)^{\frac{1}{2}} = a^{n \cdot \frac{1}{2}}$ gleichwertig mit $\left(a^n\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^n}$, wobei $a^n > 0$ sein muss.

Addieren und Subtrahieren

Für $\sqrt{a+b}$ und $\sqrt{a-b}$ gibt es keine einfache Regel zum Auflösen des Wurzelzeichens und entsprechend keine einfache Regel für $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sowie für $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

a) **Lies** den Informationstext. √ **Ergänze** die fehlenden Zahlen in der Tabelle. s. o.
Gib für die irrationalen Wurzeln Näherungswerte in Ziffernschreibweise **an**. s. o.

b) **Berechne** die Werte der Terme ohne Taschenrechner.
Überprüfe deine Ergebnisse mit dem Taschenrechner. √

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\sqrt{42^2} = 42$

$\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$