MATHE 364

11.10. Rechnen mit *n*-ten Wurzeln

$\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ ist eine andere Schreibweise für $a^{\frac{p}{q}}$. Dabei ist $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$.

Beispiel: $4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{4}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

a) **Ergänze** *mindestens fünf* fehlende Zahlen.

$16^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{16}\right)^{\square} = \left(\sqrt{16}\right)^{\square} = \square^3 = \square$

$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{\square} = \square^{\square} = \square$

$16^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^1 = \square^{\square} = \square$

$\square^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{\square}\right)^1 = 5$

$27^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt[\square]{27}\right)^{\square} = \square$

$\square^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{\square}\right)^1 = 3$

$0{,}125^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{0{,}125}\right)^{\square} = \square^{\square} = \square$

$0{,}0125^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{0{,}0625}\right)^{\square} = \square^{\square} = \square$

b) **Nenne** den Unterschied:

$9^{\frac{1}{2}}$ und $9^{-\frac{1}{2}}$

c) Die 9. Klasse findet die Einschränkung $a \geq 0$ unnötig. Einige berufen sich auf den Taschenrechner, der für $\sqrt[3]{-125}$ den Wert –5 angibt.

Der Mathematiklehrer führt als Argument $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ an.

- **Untersuche**, wie dein Taschenrechner auf die Eingabe $\sqrt[3]{-125}$ reagiert.
- **Vergleiche** $(-125)^{\frac{1}{3}}$ und $(-125)^{\frac{2}{6}}$.

Lösungen 11.10. Rechnen mit *n*-ten Wurzeln

$\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ ist eine andere Schreibweise für $a^{\frac{p}{q}}$. Dabei ist $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$.

Beispiel: $4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{4}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

a) **Ergänze** *mindestens fünf* fehlende Zahlen.

$16^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{16}\right)^3 = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$

$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

$16^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^1 = 2^1 = 2$

$625^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{625}\right)^1 = 5$

$27^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^1 = 3$

$81^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^1 = 3$

$0{,}125^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{0{,}125}\right)^2 = 0{,}2^2 = 0{,}04$

$0{,}0125^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{0{,}0625}\right)^3 = 0{,}2^3 = 0{,}125$

b) $9^{\frac{1}{2}}$ und $9^{-\frac{1}{2}}$, **nenne** den Unterschied: $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ und $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ sind die Zahl 3 und ihr Kehrwert. Dabei ist auch die zweite Zahl positiv.

c) Die 9. Klasse findet die Einschränkung $a \geq 0$ unnötig. Einige berufen sich auf den Taschenrechner, der für $\sqrt[3]{-125}$ den Wert −5 angibt.

Der Mathematiklehrer führt als Argument $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ an.

- **Untersuche**, wie dein Taschenrechner auf die Eingabe $\sqrt[3]{-125}$ reagiert.

  Die meisten wissenschaftlichen Taschenrechner akzeptieren eine negative Zahl als Radikand, wenn der Wurzelindex eine ungerade Zahl ist, also bei dritten, fünften, siebenten usw. Wurzeln. Im Beispiel wird als Wert des Terms −5 angezeigt.

- **Vergleiche** $(-125)^{\frac{1}{3}}$ und $(-125)^{\frac{2}{6}}$.

  $(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5$ wäre akzeptabel, da $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$ ist.

  $(-125)^{\frac{2}{6}} = \left(\sqrt[6]{-125}\right)^2$ ist dagegen undefiniert.

  Anmerkung: Wenn man beim Potenzieren negative Grundzahlen *a* zulassen möchte, tritt an dieser Stelle ein Problem auf. Bei einer vernünftig definierten Rechenoperation darf es keine Rolle spielen, ob die Hochzahl ein gekürzter Bruch ist oder ob dieser Bruch mit 2 erweitert wurde. Es gilt $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

  Wenn das Potenzieren auf irrationale Hochzahlen erweitert wird, kann nicht mehr verlangt werden, dass Zähler und Nenner ungerade Zahlen sind, da irrationale Zahlen nicht als Bruch darstellbar sind. Dann muss $a \geq 0$ gelten.