MATHE 364

03.10. Rechnen mit Wurzeln

a) $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ sollen irrational sein, zum Beispiel $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

- **Gib** *mindestens zwei* Beispiele für *a* und *b* **an**, so dass $\sqrt{a \cdot b}$ rational ist.
- **Gib** *mindestens zwei* Beispiele für *a* und *b* **an**, so dass $\sqrt{a \cdot b}$ irrational ist.
- Im Beispiel oben sind *a* und *b* verschieden.
  Untersuche, was sich ändert, wenn $a = b$ ist.

b) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$ ist irrational:

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$= 2 + 2 \cdot \sqrt{6} + 3 = 5 + 2 \cdot \sqrt{6}.$$

- **Gib** *mindestens zwei* weitere Beispiele mit irrationalem Ergebnis **an**.

$\left(\sqrt{18} + \sqrt{8}\right)^2$ ist rational:

$$\left(\sqrt{18} + \sqrt{8}\right)^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{8} + \left(\sqrt{8}\right)^2$$
$$= 18 + 2 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{8} + 8 = 26 + 2 \cdot \sqrt{144} = 26 + 24 = 50.$$

- **Gib** *mindestens zwei* weitere Beispiele mit rationalem Ergebnis **an**.

MATHE 364

Lösungen 03.10. Rechnen mit Wurzeln

a) $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ sollen irrational sein, zum Beispiel $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$.

- **Gib** *mindestens zwei* Beispiele für *a* und *b* **an**, so dass $\sqrt{a\cdot b}$ rational ist.

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 32}=\sqrt{64}=8$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=9$

- **Gib** *mindestens zwei* Beispiele für *a* und *b* **an**, so dass $\sqrt{a\cdot b}$ irrational ist.

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{3\cdot 5}=\sqrt{15}$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{3\cdot 10}=\sqrt{30}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}=\sqrt{2\cdot 14}=\sqrt{28}$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{2\cdot 7}=\sqrt{14}$

- Im Beispiel oben sind *a* und *b* verschieden.
Untersuche, was sich ändert, wenn $a=b$ ist.

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ Das Ergebnis ist immer gleich *a*.

Wenn der Radikand *a* der Wurzel eine natürliche Zahl ist, dann ist auch das Ergebnis eine natürliche Zahl, nämlich *a* (*a* ist außerdem rational).

Wenn der Radikand *a* eine rationale Zahl ist, dann ist das Ergebnis auch rational.

Nur wenn der Radikand *a* eine irrationale Zahl ist, dann ist das Ergebnis nicht rational.

b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ ist irrational:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$=2+2\cdot\sqrt{6}+3=5+2\cdot\sqrt{6}.$$

- **Gib** *mindestens zwei* weitere Beispiele mit irrationalem Ergebnis **an**.

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$=2+2\cdot\sqrt{10}+5=7+2\cdot\sqrt{10}$$
$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$=3+2\cdot\sqrt{21}+7=10+2\cdot\sqrt{21}$$

$\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^2$ ist rational:

$$\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^2=\left(\sqrt{18}\right)^2+2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}+\left(\sqrt{8}\right)^2$$
$$=18+2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}+8=26+2\cdot\sqrt{144}=26+24=50.$$

- **Gib** *mindestens zwei* weitere Beispiele mit rationalem Ergebnis **an**.

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}+\left(\sqrt{8}\right)^2$$
$$=2+2\cdot\sqrt{16}+8=10+8=18$$
$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}+\left(\sqrt{12}\right)^2$$
$$=3+2\cdot\sqrt{36}+12=15+12=27$$