MATHE 364

23.09. irrationale Zahlen

Information: rationale und irrationale Zahlen

Bis jetzt hast du mit rationalen Zahlen gerechnet. Das sind Zahlen, die sich als Bruch schreiben lassen; der Zähler muss eine ganze Zahl sein, der Nenner eine natürliche Zahl (eine positive ganze Zahl größer als 0).

$\mathbb{Q}$ = Menge aller Zahlen q mit $q = \frac{z}{n}$,
wobei z eine ganze Zahl und n eine natürliche Zahl ist.

Beispiele für rationale Zahlen: $\frac{3}{4}$; $0{,}3$; $-\frac{2}{3}$; $0{,}\overline{3}$; $3{,}5 \cdot 10^3$; $3{,}5 \cdot 10^{-3}$

-42; $-3{,}5 \cdot 10^3$; $-3{,}5 \cdot 10^{-3}$; $0{,}1\overline{6}$; $0{,}\overline{16}$; $0{,}16$; $0{,}\overline{142857}$; $\frac{15}{8}$

Eine rationale Zahl kann als Bruch, als Dezimalbruch (‚Kommazahl') oder in Exponentialform (‚wissenschaftliche Schreibweise') angegeben werden.
Die zugehörigen Dezimalbrüche können abbrechend, periodisch oder gemischt-periodisch sein. Die Schreibweise ändert nichts an der Eigenschaft. eine rationale Zahl zu sein.

Eine *irrationale Zahl* kann nicht als Bruch geschrieben werden, bei dem der Zähler eine ganze und der Nenner eine natürliche Zahl ist.
In Ziffernschreibweise stehen nach dem Dezimalkomma unendlich viele Ziffern, bei denen sich aber keine feste Ziffernfolge periodisch wiederholt.

Beispiel: 0,101001000100001 ... ist nicht abbrechend und hat keine Periode

Gegenbeispiel: 0,142857142857142857142857 ... periodische Wiederholung

Im Beispiel 0,101001000100001 ... gibt es zwar ein Muster, aber keine feste Ziffernfolge, die sich unendlich oft wiederholt. Bei der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ treten die Ziffern von 0 bis 9 unregelmäßig auf.

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623715001869770836681149255771134042294366508124116739780463372766$
$224579752108936303140163728848686730033625838580956571756398145547767763949316444822236606358422303888072 \ldots$

a) **Lies** den Informationstext.

b) Im Informationstext stehen Beispiele für rationale Zahlen in drei Darstellungen: als Bruch, als Dezimalbruch (‚Kommazahl') sowie in Exponentialform.

Gib je ein Beispiel für eine Darstellung in einer anderen Darstellung **an**, z. B. einen Bruch in Exponentialform, einen Dezimalbruch als Bruch usw.

c) 0,101001000100001 ... ist keine rationale Zahl.

Gib zwei andere Beispiele dieser Art **an**.

d) $\sqrt{5} \approx 2{,}2$

Gib *mindestens eine* weitere Ziffer **an**.

© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht

MATHE 364

Lösungen 23.09. irrationale Zahlen

Information: rationale und irrationale Zahlen

Bis jetzt hast du mit rationalen Zahlen gerechnet. Das sind Zahlen, die sich als Bruch schreiben lassen; der Zähler muss eine ganze Zahl sein, der Nenner eine natürliche Zahl (eine positive ganze Zahl größer als 0).

$\mathbb{Q}$ = Menge aller Zahlen q mit $q = \frac{z}{n}$,
wobei z eine ganze Zahl und n eine natürliche Zahl ist.

Beispiele für rationale Zahlen: $\frac{3}{4}$; $0{,}3$; $-\frac{2}{3}$; $0{,}\overline{3}$; $3{,}5\cdot10^{3}$; $3{,}5\cdot10^{-3}$

-42; $-3{,}5\cdot10^{3}$; $-3{,}5\cdot10^{-3}$; $0{,}1\overline{6}$; $0{,}\overline{16}$; $0{,}16$; $0{,}\overline{142857}$; $\frac{15}{8}$

Eine rationale Zahl kann als Bruch, als Dezimalbruch (‚Kommazahl') oder in Exponentialform (‚wissenschaftliche Schreibweise') angegeben werden.
Die zugehörigen Dezimalbrüche können abbrechend, periodisch oder gemischt-periodisch sein. Die Schreibweise ändert nichts an der Eigenschaft. eine rationale Zahl zu sein.

Eine *irrationale Zahl* kann nicht als Bruch geschrieben werden, bei dem der Zähler eine ganze und der Nenner eine natürliche Zahl ist.
In Ziffernschreibweise stehen nach dem Dezimalkomma unendlich viele Ziffern, bei denen sich aber keine feste Ziffernfolge periodisch wiederholt.

Beispiel: 0,101001000100001 ... ist nicht abbrechend und hat keine Periode

Gegenbeispiel: 0,142857142857142857142857 ... periodische Wiederholung

Im Beispiel 0,101001000100001 ... gibt es zwar ein Muster, aber keine feste Ziffernfolge, die sich unendlich oft wiederholt. Bei der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ treten die Ziffern von 0 bis 9 unregelmäßig auf.

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237150018697708366811492557711340422943665081241167397804633727662245797521089363031401637288486867300336258385809565717563981455477677639493164448222366063584223038880072\ ...$

a) **Lies** den Informationstext. √

b) Im Informationstext stehen Beispiele für rationale Zahlen in drei Darstellungen.
Gib je ein Beispiel für eine Darstellung in einer anderen Darstellung **an**, z. B. einen Bruch in Exponentialform, einen Dezimalbruch als Bruch usw.

$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 7{,}5\cdot10^{-1}$ $\quad 0{,}3 = \frac{3}{10} = 3\cdot10^{-1}$ $\quad -\frac{2}{3} = -0{,}\overline{6} = -6{,}\overline{6}\cdot10^{-1}$

$3{,}5\cdot10^{3} = 3500 = \frac{3500}{1}$ $\quad 3{,}5\cdot10^{-3} = 0{,}0035 = \frac{35}{10000}$ $\quad -42 = -4{,}2\cdot10^{1} = \frac{-42}{1}$

$-3{,}5\cdot10^{3} = -3500 = -\frac{3500}{1}$ $\quad -3{,}5\cdot10^{-3} = -0{,}0035 = -\frac{35}{10000}$ $\quad 0{,}1\overline{6} = \frac{1}{6} = 1{,}\overline{6}\cdot10^{-1}$

$0{,}\overline{16} = \frac{16}{99} = 16{,}\overline{16}\cdot10^{-2}$ $\quad 0{,}16 = \frac{16}{100} = 1{,}6\cdot10^{-1}$ $\quad 0{,}\overline{142857} = \frac{1}{7}$ $\quad \frac{15}{8} = 1{,}875$

c) 0,101001000100001 ... ist keine rationale Zahl; eigene Beispiele **angeben**
0,707007000700007 ... oder 0,171771777177771 ... (individuelle Lösungen)

d) **Gib** *mindestens eine* weitere Ziffer **an**: $\sqrt{5} \approx 2{,}2\mathbf{3}$ *Lösungsweg zum Beispiel*
$2{,}2\mathbf{1}^2 = 4{,}8841 < 5$; $2{,}2\mathbf{2}^2 = 4{,}9284 < 5$; $2{,}2\mathbf{3}^2 = 4{,}9729 < 5$; $2{,}2\mathbf{4}^2 = 5{,}0176 > 5$

© Helmut Mallas; Nutzungsrechte übertragen an das IQSH ausschließlich zu nichtkommerziellen Zwecken im Rahmen von Aus- und Fortbildung; darf zu Unterrichts- und Lernzwecken unentgeltlich genutzt werden unter Hinweis auf das Urheberrecht