MATHE 364

24.09. irrationale Zahlen

a) Die Wurzel aus 5 ist eine irrationale Zahl.

$\sqrt{5} \approx$ 2,23606797749849771405290411491976879308658219465970938963653817418777
12311434895388224013140567740465187277814864622267801416609961418931920378307313418235
33269049469550625692690881688666152825748804889873571484624009270636141506198877934832501835530057
0062424146653207904550287073675972777181163322938267066129606159211135943172204431286677007983883884852335523497472
18217917998299380058457466764274941440410040752529699037569510958893801552057567382496514374108437633364830276624860655587912483646851541
898996935229169824423353317230117957665098269388088565534604175871191476690649492770215286444812087946345548342433047495885510223606797749849771405290411491976879308658219
4659709389636538174187771231143489538822401314056774046518727781486462226780141660996141893192037830731341823533269049469550625692690881688666152825748804889873571484624009270636141506198877934832501835530057006242414665320790455
028707367597277718116332293826706612960615921113594317220443128667700798388388485233523497472182............................... . . .

Wahlaufgabe:

- **Begründe**, warum $\sqrt{5}$ keine natürliche Zahl (positive ganze Zahl) sein kann.

  oder

- **Begründe**, warum $\sqrt{5}$ kein abbrechender Dezimalbruch sein kann.

  oder

- $\sqrt{5}$ lässt sich doch als Bruch schreiben! **Begründe**: $\frac{\sqrt{5}}{1}$ ist keine rationale Zahl.

  oder

- **Vervollständige** den Satz: $\sqrt{5}$ hat in Ziffern geschrieben unendliche viele Stellen nach dem Komma, aber es gibt ________________________________ sich periodisch wiederholt. Deshalb ist $\sqrt{5}$ kein periodischer Dezimalbruch.

Morgen wird im Kalenderblatt ein Beweis vorgestellt, der nachweist, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Damit du den entscheidenden Beweisschritt gut nachvollziehen kannst, wird die Idee heute durch Aufgabe **b)** vorbereitet.

b) Die Abbildung zeigt die Zerlegung verschiedener Quadratzahlen in Primfaktoren.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad 49 = 7 \cdot 7$ $\quad 81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$25 =$ $\quad 121 =$ $\quad 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$625 =$ $\quad 169 =$ $\quad 196 =$ $\quad 961 =$ $\quad 729 =$

- **Gib** mindestens zwei weitere Quadratzahlen **an**, die in der Abbildung nicht vorkommen.
- **Gib** die Zerlegung von zwei Quadratzahlen in Primfaktoren **an**. *Dazu kannst du Quadratzahlen aus der Abbildung wählen oder deine eigenen Beispiele.*

Lösungen 24.09. irrationale Zahlen

a) Die Wurzel aus 5 ist eine irrationale Zahl.

$\sqrt{5} \approx$ 2,2360679774997896964091736687312762354406183596115257242708972454105209256378048994144144083787822749695081761507737835042532677244470738635863601215334527088667781731918791658112766453226398565805357613504175337850034233924140644420589380169209
(as printed:)

2,236067977498497714052904114919768793086582194659709389636538174187771231143489538822401314056774046518727781486462226780141660996141893192037830731341823533269049469550625692690881688666152825748804889873571484624009270636141506198877934832501835530057006242414665320790455028707367597277718116332293826706612960615921113594317220443128667700798388388485233523497472182179179982993800584574667642749414404100407525296990375695109588938015520575673824965143741084376333648302766248606555879124836468515418989969352291698244233533172301179576650982693880885655346041758711914766906494927702152864448120879463455483424330474958855102236067977498497714052904114919768793086582194659709389636538174187771231143489538822401314056774046518727781486462226780141660996141893192037830731341823533269049469550625692690881688666152825748804889873571484624009270636141506198877934832501835530057006242414665320790455028707367597277718116332293826706612960615921113594317220443128667700798388388485233523497472182...

Wahlaufgabe:

- **Begründe**, warum $\sqrt{5}$ keine natürliche Zahl (positive ganze Zahl) sein kann.

  $\sqrt{5}^2 = 5$. Da $2^2 = 4$ und $3^2 = 9$ sind, muss $\sqrt{5}$ zwischen 2 und 3 liegen. Da es zwischen 2 und 3 keine weitere natürliche Zahl gibt, kann $\sqrt{5}$ keine natürliche Zahl sein.

- **Begründe**, warum $\sqrt{5}$ kein abbrechender Dezimalbruch sein kann.

  Multipliziert man einen abbrechenden Dezimalbruch mit sich selbst, zum Beispiel $2{,}1^2 \cdot 2{,}1^2 = 4{,}41$, dann wird die Endziffer des Quadrats (des Ergebnisses) durch die Endziffer des abbrechenden Dezimalbruchs bestimmt, im Beispiel die Ziffer 1:

Endziffer des abbrechenden Dezimalbruchs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Endziffer des Quadrats	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

  Hat der Dezimalbruch eine Endziffer von 1 bis 9, kann das Ergebnis nicht 5,00000 sein, sondern hat eine andere Endziffer als 0, siehe Tabelle.

  Hat der Dezimalbruch die Endziffer 0, zum Beispiel 2,10, dann ist das gleich 2,1. Die Endziffer des Quadrats wird durch die letzte Ziffer des abbrechenden Dezimalbruchs bestimmt, die nicht 0 lautet.

- $\sqrt{5}$ lässt sich doch als Bruch schreiben! **Begründe**: $\frac{\sqrt{5}}{1}$ ist keine rationale Zahl.

  Eine rationale Zahl ist ein Bruch, bei dem der Zähler eine ganze Zahl und der Nenner eine natürlich Zahl ist. $\sqrt{5}$ ist aber keine ganze Zahl.

- **Vervollständige** den Satz: $\sqrt{5}$ hat in Ziffern geschrieben unendliche viele Stellen nach dem Komma, aber es gibt keine feste Ziffernfolge, die sich periodisch wiederholt. Deshalb ist $\sqrt{5}$ kein periodischer Dezimalbruch.

b) Die Abbildung zeigt die Zerlegung verschiedener Quadratzahlen in Primfaktoren.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$49 = 7 \cdot 7$

$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$25 = 5 \cdot 5$

$121 = 11 \cdot 11$

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$169 = 13 \cdot 13$

$196 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7$

$961 = 31 \cdot 31$

$729 = 36$

- **Gib** mindestens zwei weitere Quadratzahlen **an**, die in der Abbildung nicht vorkommen. z. B. 4, 64, 100, 225 usw. (individuelle Lösungen)
- **Gib** die Zerlegung von zwei Quadratzahlen in Primfaktoren **an** siehe oben