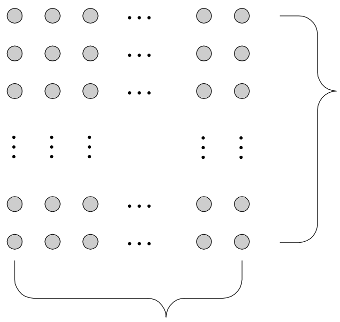
# MATHE 364

## 26.09. irrationale Zahlen

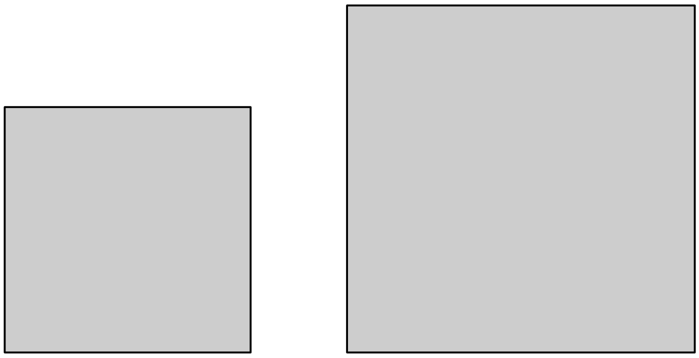
Im gestrigen Kalenderblatt haben wir quadratische Anordnungen von Punkten untersucht. Wenn die Anzahl der Punkte in einer Zeile $a$ ist, dann enthält das Quadrat insgesamt $a^2$ Punkte. Diese Anzahl wird verdoppelt.



$a$ Punkte in einer Spalte

$a$ Punkte in einer Zeile

**a) Das Problem der Quadratverdoppelung**



Quadrat mit der Seitenlänge $a$ und dem Flächeninhalt $a^2$

Quadrat mit der Seitenlänge $b$ und dem Flächeninhalt $2a^2$

Das linke Quadrat hat den Flächeninhalt $a^2$.

Das rechte Quadrat hat den Flächeninhalt $2a^2$.

**Begründe**: Dann muss das rechte Quadrat die Seitenlänge $b=\sqrt{2}\cdot a$ haben.

**b) Berechne**: **Führe** die Äquivalenzumformung $b=\sqrt{2}\cdot a \quad |:a$ **aus**.

**Erläutere**: Unter welchen Bedingungen wäre $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl?

**c) Berechne**: Potenziere auf beiden Seiten der Gleichung $b=\sqrt{2}\cdot a$ mit 2.

**d)** Im Kalenderblatt von vorgestern hast du Quadratzahlen in Primfaktoren zerlegt.

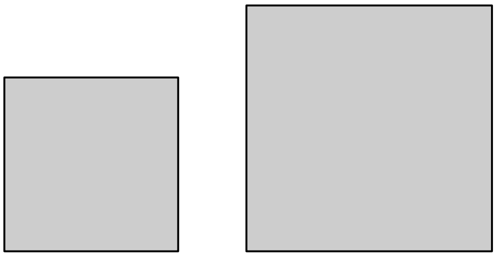
**Begründe**: Wenn $a$ und $b$ natürliche Zahlen sind,
dann ist die Gleichung $b^2=2\cdot a^2$ nicht erfüllbar.

**Hinweis**: Betrachte dazu die Anzahl der Primfaktoren im linken Term
und die Anzahl der Primfaktoren im rechten Term.

# MATHE 364

## Lösungen 26.09. irrationale Zahlen

**a) Das Problem der Quadratverdoppelung**



Quadrat mit der Seitenlänge $a$ und dem Flächeninhalt $a^2$

Quadrat mit der Seitenlänge $b$ und dem Flächeninhalt $2a^2$

Das linke Quadrat hat den Flächeninhalt $a^2$. Ich rechne $A = a \cdot a = a^2$.

Das rechte Quadrat hat den Flächeninhalt $2a^2$. Ich müsste $b \cdot b = b^2$ rechnen.

**Begründe**: Dann muss das rechte Quadrat die Seitenlänge $b = \sqrt{2} \cdot a$ haben.

Wenn das linke Quadrat den Flächeninhalt $a^2$ hat, dann ist $2a^2$ das Doppelte.
Wenn das rechte Quadrat die Seitenlänge $b$ hat, dann ist sein Flächeninhalt $b^2$.
Wenn der Flächeninhalt rechts doppelt so groß ist wie links, muss $b^2 = 2a^2$ sein.
Nur mit der Seitenlänge $b = \sqrt{2} \cdot a$ wird $b^2 = (\sqrt{2} \cdot a) \cdot (\sqrt{2} \cdot a) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot a = 2a^2$.

**b)** Äquivalenzumformung **ausführen**

$$b = \sqrt{2} \cdot a \quad |:a$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

**Erläuterung**:

Falls $a$ und $b$ beide natürliche Zahlen sind, wäre $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl.

**c) Berechne**: Potenziere auf beiden Seiten der Gleichung $b = \sqrt{2} \cdot a$ mit 2.

$$b = \sqrt{2} \cdot a \quad | \square^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = (\sqrt{2} \cdot a)^2$$

$$= (\sqrt{2})^2 \cdot a^2 = 2 \cdot a^2$$

**d) Begründe**: Wenn $a$ und $b$ natürliche Zahlen sind,
dann ist die Gleichung $b^2 = 2 \cdot a^2$ nicht erfüllbar.

**Hinweis**: Betrachte dazu die Anzahl der Primfaktoren.

Die Zahl $b$ ist unbekannt, also kennt man auch ihre Primfaktoren nicht.

Aber in der Primfaktorzerlegung von $b^2$ muss jeder Primfaktor von $b$ zweimal vorkommen. Auf der linken Seite der Gleichung kommt der Faktor 2 entweder gar nicht vor oder zweimal oder viermal, sechsmal usw.

Auch auf der rechten Seite der Gleichung sind die Anzahlen der Primfaktoren von $a^2$ jeweils gerade. Aber vor der Zahl $a^2$ steht noch der Faktor 2. Deshalb kommt der Faktor 2 insgesamt entweder einmal oder dreimal, fünfmal usw. vor.

Da das unmöglich ist, kann die Gleichung für natürliche Zahlen $a$ und $b$ niemals erfüllt sein.

**Zusammenfassung**: Damit ist bewiesen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Es gibt keine natürlichen Zahlen $a$ und $b$, so dass $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ ist.