MATHE 364

27.09. irrationale Zahlen

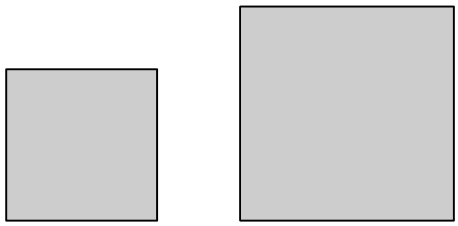
Behauptung: Wurzel aus 2 ist eine irrationale Zahl, kann also nicht in der Form $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ dargestellt werden, wobei *a* und *b* natürliche Zahlen sind.

Beweisgang: Wir zeigen, dass die Gleichung $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ zu einer falschen Aussage führt, wenn *a* und *b* beide zugleich natürliche Zahlen sind. Da alle Schlussfolgerungen richtig und nachvollziehbar sind, bleibt als Ausweg, dass *a* und *b* nicht beide zugleich natürliche Zahlen sein können.

Beweisidee: Zu einem Quadrat mit ganzzahliger Seitenlänge wird ein Quadrat mit exakt dem doppelten Flächeninhalt gesucht. Es wird nachgewiesen, dass dessen Seitenlänge keine ganze Zahl sein kann.

Beweisidee: In der Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl kommt der Faktor 2 entweder gar nicht vor oder zweimal, viermal, … .

Beweis: *Quadratverdoppelung* – zu einem Quadrat mit der ganzzahligen Seitenlänge *a* wird ein Quadrat mit genau dem doppelten Flächeninhalt gesucht. Die größere Seitenlänge soll *b* genannt werden.



Quadrat mit der Seitenlänge *a* und dem Flächeninhalt a^2

Quadrat mit der Seitenlänge *b* und dem Flächeninhalt $2a^2$

Dann gilt $b^2 = 2a^2$.

Wenn *a* und *b* beide zugleich natürliche Zahlen sind, ist diese Gleichung nicht erfüllbar, denn auf der linken Seite kommt der Primfaktor 2 in einer Potenz mit gerader Hochzahl vor, in der Primfaktorzerlegung der rechten Seite ist die Anzahl der Zweien ungerade.

Da die Gleichungen $b^2 = 2a^2$ und $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ für positive Zahlen *a* und *b* gleichwertig sind, kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein.

a) **Beweise** mit Hilfe der *Quadratverdreifachung*, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.
Nutze dazu den Beweis als Lückentext und **ergänze** notwendige Änderungen.

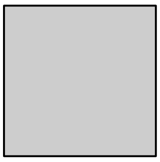
b) *Falscher Beweis*: Mit Hilfe der *Quadratvervierfachung* wird ähnlich wie im Beweis oben behauptet, dass $\sqrt{4}$ irrational sei. **Nenne** den entscheidenden Fehler.

Lösungen 27.09. irrationale Zahlen

a) **Beweise** mit Hilfe der *Quadratverdreifachung*, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.
Nutze dazu den Beweis als Lückentext und **ergänze** notwendige Änderungen.

Beweis: *Quadratverdreifachung* – zu einem Quadrat mit der ganzzahligen Seitenlänge a wird ein Quadrat mit genau dem dreifachen Flächeninhalt gesucht. Die größere Seitenlänge soll b genannt werden.

Quadrat mit der Seitenlänge a und dem Flächeninhalt a^2



Quadrat mit der Seitenlänge b und dem Flächeninhalt $3a^2$

Dann gilt $b^2 = 3a^2$.

Wenn a und b beide zugleich natürliche Zahlen sind, ist diese Gleichung nicht erfüllbar, denn auf der linken Seite kommt der Primfaktor 3 in einer Potenz mit gerader Hochzahl vor, in der Primfaktorzerlegung der rechten Seite ist die Anzahl der Dreien ungerade.

Da die Gleichungen $b^2 = 3a^2$ und $\sqrt{3} = \frac{b}{a}$ für positive Zahlen a und b gleichwertig sind, kann $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl sein.

b) *Falscher Beweis*: Mit Hilfe der *Quadratvervierfachung* wird ähnlich wie im Beweis oben behauptet, dass $\sqrt{4}$ irrational sei. **Nenne** den entscheidenden Fehler.

Im Text des Beweises wird vermutlich jeweils die Zahl 2 durch die Zahl 4 bzw. das entsprechende Zahlwort ersetzt:

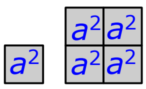
Beweis: *Quadratvervierfachung* – zu einem Quadrat mit der ganzzahligen Seitenlänge a wird ein Quadrat mit genau dem vierfachen Flächeninhalt gesucht. Die größere Seitenlänge soll b genannt werden.

Dann gilt $b^2 = 4a^2$.

Wenn a und b beide zugleich natürliche Zahlen sind, ist diese Gleichung nicht erfüllbar, denn auf der linken Seite kommt der Primfaktor 4 in einer Potenz mit gerader Hochzahl vor, in der Primfaktorzerlegung der rechten Seite ist die Anzahl der Vieren ungerade.

Da die Gleichungen $b^2 = 4a^2$ und $\sqrt{4} = \frac{b}{a}$ für positive Zahlen a und b gleichwertig sind, kann $\sqrt{4}$ keine rationale Zahl sein.

Die rot unterstrichenen Aussagen sind falsch. Die Gleichung $b^2 = 4a^2$ ist sehr wohl erfüllbar, wenn a und b beide zugleich natürliche Zahlen sind. Dazu muss lediglich b doppelt so groß sein wie a. Dann besteht das große Quadrat aus vier kleinen Quadraten.



Außerdem ist 4 keine Primzahl.