Modulbeschreibungen des Programms SINUS-Transfer Grundschule

Erforschen, Entdecken und Erklären im Mathematikunterricht der Grundschule

Christoph Selter

SINUS-Transfer

Grundschule

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

G2

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Christoph Selter
Erforschen, Entdecken und Erklären
im Mathematikunterricht der Grundschule

Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule
Programmträger: Leibniz-Institut für die
Pädagogik der Naturwissenschaften und
Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de

Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Dr. Kirstin Lobemeier
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-181-2

Nutzungsbedingungen

Christoph Selter, Oktober 2004

Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten

Basispapier zum Modul 2:

Erforschen, Entdecken und Erklären im Mathematikunterricht

der Grundschule

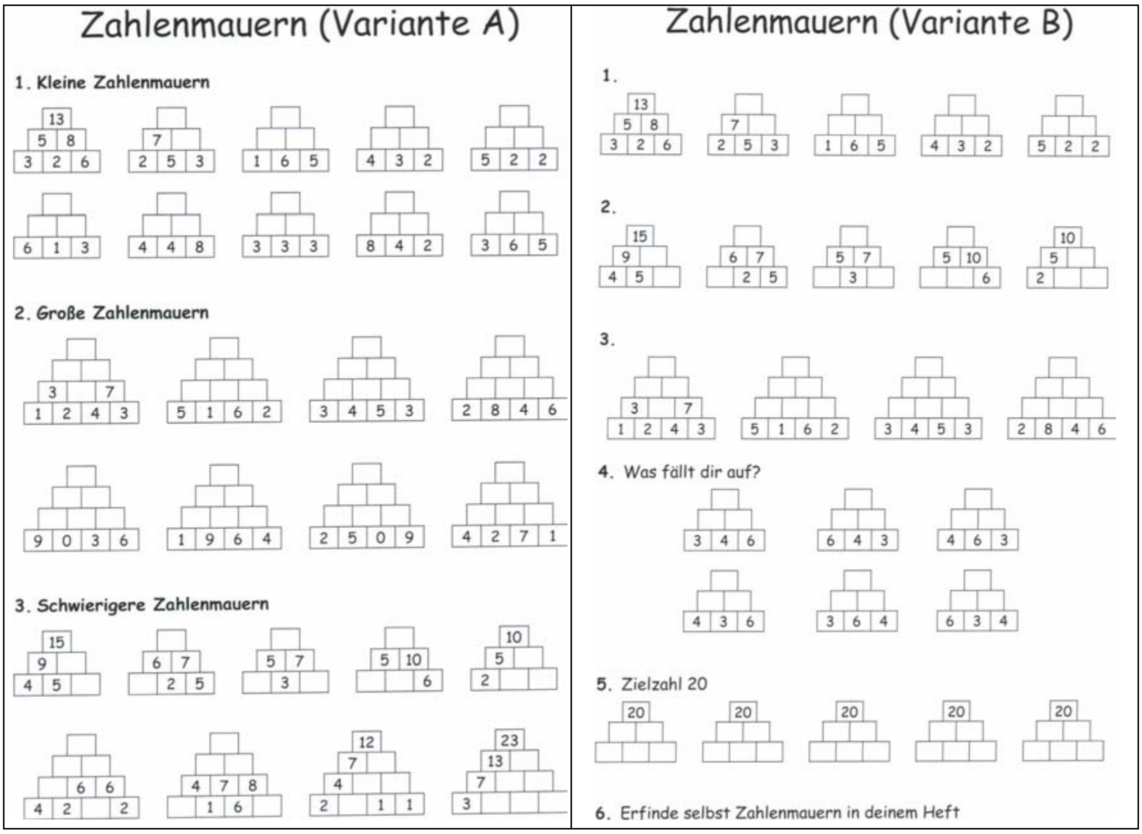
Im Herbst 2004 wurden von der Kultusministerkonferenz die *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich* verabschiedet (KM 2004). Diese beschreiben Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler in Deutschland bis zum Ende der Jahrgangsstufe 4 erwerben können sollen (vgl. auch das Modul 10 zu *Bildungsprofilen und Bildungsstandards im Mathematikunterricht*).

Wie auch die Lehr- bzw. Bildungspläne der einzelnen Bundesländer gehen die Bildungsstandards davon aus, dass Mathematiklernen in der Grundschule mehr umfasst als die Aneignung von *Kenntnissen,* wie die auswendige Verfügbarkeit der Resultate der Einmaleinsaufgaben, und von *Fertigkeiten,* wie die geläufige Beherrschung des Verfahrens der schriftlichen Addition.

Genauso wichtig wie der Erwerb solcher *inhaltsbezogener* Kompetenzen ist die Entwicklung *prozessbezogener* Kompetenzen, wie zum Beispiel dem Erforschen, dem Entdecken oder dem Erklären, um es mit dem Titel dieses Moduls zu sagen. In den Bildungsstandards wird in diesem Zusammenhang übrigens von *allgemeinen* mathematischen Kompetenzen gesprochen. Da der Begriff der *prozessbezogenen* Kompetenzen nach meinem Dafürhalten aussagekräftiger ist, werde ich ihn dessenungeachtet im Weiteren verwenden.

Dass es im Mathematikunterricht der Grundschule um *mehr* geht *als* um *Kenntnisse und Fertigkeiten*, kann anhand des Vergleichs zweier Arbeitsblätter zu den sog. Zahlenmauern deutlich werden. In die untere Steinreihe werden Zahlen eingetragen. In die versetzt darüber angeordneten Steine schreibt man jeweils die Summe der Zahlen in den darunter liegenden Steinen, so wie es die ausgefüllten Beispiele bei Aufgabe 1 zeigen.

Anregung 1: **Vergleichen Sie die beiden Arbeitsblätter: Was können die Kinder jeweils lernen? Worin bestehen Gemeinsamkeiten, worin Unterschiede?**



Die ersten drei Aufgaben der Variante B sind auch in der Variante A enthalten. Bei A finden sich darüber hinaus lediglich weitere Aufgaben desselben Typs. Im Vordergrund steht hier also die Übung der Addition und der Subtraktion.

Darum geht es auch bei der Variante B, aber eben nicht nur. Bei der Nummer 4 sollen sich die Kinder damit befassen, wie sich die unterschiedliche Anordnung der 3, der 4 und der 6 auf die anderen Zahlen in der Mauer auswirkt. Bei der Aufgabe 5 sollen sie Mauern mit Zielzahl 20 notieren. Und schließlich sollen sie Zahlenmauern frei erfinden. Hier werden also sowohl *inhalts*- als *auch prozessbezogene* Kompetenzen angesprochen.

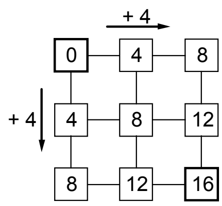
> **<u>Anregung 2:</u> Analysieren Sie die einzelnen Schuljahresbände Ihres Unterrichtswerks (und anderer Schulbücher) daraufhin, welche Aufgabenstellungen aus dem Kontext 'Zahlenmauern' dort zu finden sind. Inwieweit werden jeweils inhaltsbezogene bzw. prozessbezogene Kompetenzen angesprochen?**

Nicht zuletzt die internationalen Vergleichsuntersuchungen wie PISA oder IGLU haben gezeigt, dass in Deutschland prozessbezogene Kompetenzen – keineswegs nur der Grundschule, aber dort eben auch – in der Vergangenheit nicht die erforderliche Beachtung gefunden haben. Deren notwendig stärkere Berücksichtigung darf aber nun andererseits nicht zu einer Vernachlässigung der inhaltsbezogenen Kompetenzen führen. Wo möglich und sinnvoll, sollen beide Kompetenzfelder integriert angesprochen werden – dies auch, weil Unterrichtszeit knapp und kostbar ist.

Wie dieses praktisch möglich ist, soll in diesem Papier anhand von Beispielen und theoretischen Hintergrundüberlegungen dargestellt werden. Ich beginne mit einem Unterrichtsbeispiel, bei dem die Kinder – und auch Sie – das Rechnen üben, und sich zudem zahlreiche Möglichkeiten zum Erforschen, Entdecken und Erklären ergeben.

1 Zahlengitter – ein Unterrichtsbeispiel zum Entdecken, Erforschen und Erklären

Den Zahlengittern liegt folgende Aufgabenvorschrift zugrunde (vgl. de Moor 1980, 61 ff.): Zunächst wird die sog. *Startzahl* (hier: 0) in das linke obere Feld eingetragen. Dann schreibt man fortlaufend in die benachbarten Felder die um die *linke* bzw. um die *obere Pluszahl* vermehrte Zahl.



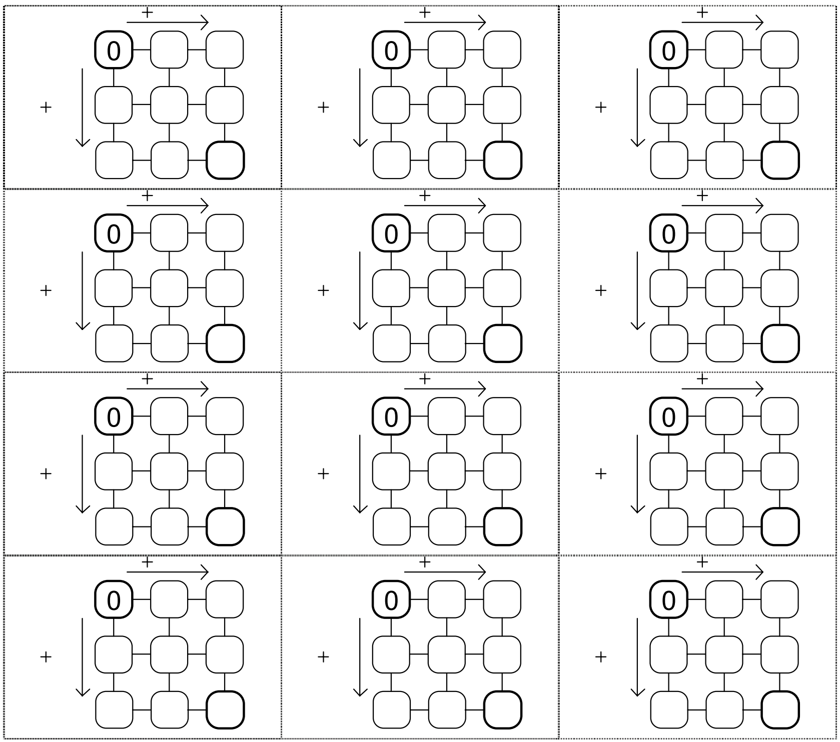
Die rechte untere Zahl heißt *Zielzahl*, die mittlere *Mittelzahl* und die anderen *Randzahlen*. Die Verwendung zweier gleicher Pluszahlen (+4; +4) ist ebenso möglich wie die der 0. Im Folgenden berichte ich über eine Unterrichtsreihe im 3. oder 4. Schuljahr, die bei entsprechenden Modifikationen auch schon in niedrigeren Klassenstufen durchführbar ist (Selter 2004).

Wie viele Zahlengitter findest du?

Eingangs wurden an einem Beispiel (+2; +5) auf einem an der Tafel hängenden Plakat die Aufgabenvorschrift sowie die oben genannten Begriffe eingeführt. Zwei Schüler haben dies daraufhin bei weiteren Beispielen (+8; +8) und (+5; +2) angewendet. An ihnen sollte deutlich werden, dass auch zwei gleiche Pluszahlen möglich waren und dass durch ein Pluszahl-Paar (+2; +5) sowie sein 'Tauschpaar' (+5; +2) zwei verschiedene Zahlengitter gebildet wurden.

Dann wurde die Aufgabe gestellt, möglichst viele Pluszahl-Paare zu finden, die zur *Zielzahl 20* führten. Einige Kinder äußerten erste Vermutungen, von denen die am häufigsten genannte (+5; +5) zur Verdeutlichung der Aufgabenstellung an der Tafel festgehalten wurde.

<u>Anregung 3:</u> Überlegen Sie selbst: Wie viele Paare finden Sie? Warum sind das alle? Vergleichen Sie die von Ihnen gefundenen Möglichkeiten: Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede fallen auf?



<u>Anregung 4:</u> Übertragen Sie die Aufgabenstellungen auf andere Zielzahlen (z. B. 21, 22 oder 100), auf andere Startzahlen (z. B. 1 oder 10) oder auf ein 4·4-Feld mit 16 Zahlen. Was fällt Ihnen auf? Wie können Sie es erklären?

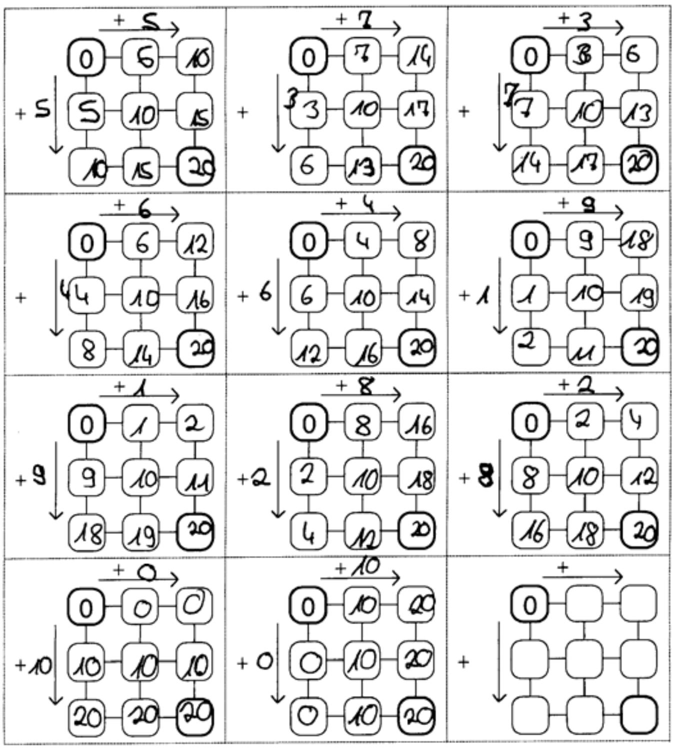
<u>Anregung 5:</u> Suchen Sie nach weiteren Variationen und Forscher-Aufgaben im Kontext der Zahlengitter und bearbeiten Sie diese.

Zurück zur Unterrichtsstunde: Die Kinder erhielten ein Arbeitsblatt, in dem sie alle von ihnen gefundenen Möglichkeiten notieren sollten, und wurden dazu angeregt, die Pluszahlen-Paare in einer Tabelle einzutragen. Zudem wurden sie gebeten, in einem zur besseren Unterscheidung auf gelbes Papier kopierten Forscherbericht festzuhalten, wie sie vorgingen und was ihnen auffiel. Des Weiteren wurde gesagt, dass für die Schüler, die das Arbeitsblatt mit der Zielzahl 20 bearbeitet hätten, ein eben solches für die Zielzahl 22 zur Verfügung stand und dass der Arbeitsphase eine Sammlungs- und Reflexionsphase folgen würde.

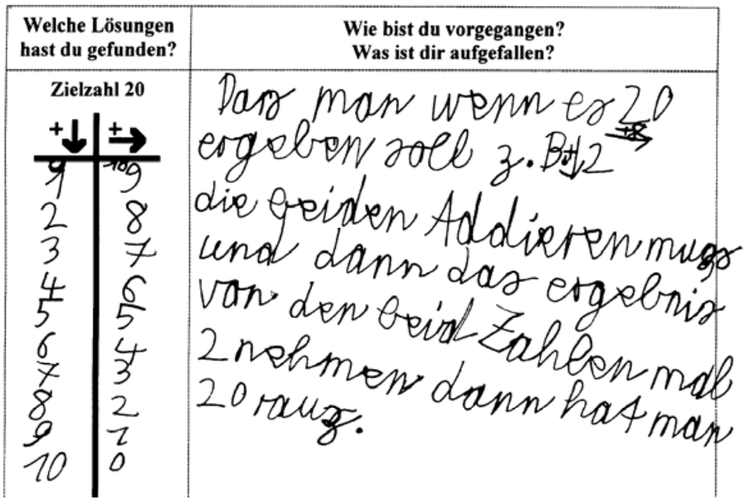
Es waren sicherlich nicht wenige Informationen, die den Schülern auf einmal gegeben wurden. Aber es erschien wichtig, dass diese sowohl über *Zieltransparenz* (z. B. Was sind die Ziele meiner Arbeit? Welche Produkte, hier: Aufstellung der Möglichkeiten bzw. beschreibender Text, werden erwartet?) als auch *Prozesstransparenz* verfügten (z. B. Was ist der ungefähre Zeitrahmen für einzelne Aufgaben? Welche Materialien, hier: Arbeitsblätter bzw. Tafelplakate, werden wozu verwendet?).

In der Arbeitsphase waren unterschiedliche Vorgehensweisen der Kinder zu beobachten:

- unsystematisches oder unsystematisch erscheinendes Probieren,
- Ableiten eines Pluszahlen-Paares aus seinem Tauschpaar (aus (+2; +8) wird (+8; +2) gewonnen),
- Zerlegen der Mittelzahl 10 in zwei Summanden, die dann als Pluszahlen dienen und
- operatives Variieren der Pluszahlen (z. B. linke Pluszahl um 1 erhöhen, obere um 1 vermindern).



Einige Schüler waren nach knapp fünf Minuten der Meinung, dass keine weiteren Möglichkeiten mehr existieren; bei anderen war dieses nach rund 20 Minuten der Fall. Alle Kinder arbeiteten anschließend an ihrem Forscherbericht zur Zielzahl 20.



Welche Lösungen hast du gefunden?	Wie bist du vorgegangen? Was ist dir aufgefallen?
Zielzahl 20 +↓ | +→ 1 | 9 2 | 8 3 | 7 4 | 6 5 | 5 6 | 4 7 | 3 8 | 2 9 | 1 10 | 0	Das man wenn es 20 ergeben soll z.B. +2 die beiden Addieren muss und dann das ergebnis von den beid Zahlen 2 nehmen dann hat man 20 raus.

Eine ganze Reihe von Schülern befasste sich dann noch mit der Übertragung der Aufgabenstellungen auf die Zielzahl 22. Drei Kinder setzten sich in dieser Einführungsstunde sogar damit auseinander, die Anzahl der Möglichkeiten zu einer selbst gewählten Zielzahl kleiner gleich 30 zu finden.

Zum Abschluss wurde durch das geordnete Anhängen aller elf Zahlengitter das Nachdenken über deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede angeregt. Diese waren zur Zeitersparnis bereits während der Arbeitsphase von zwei Schülern auf vorbereiteten Zahlengittern notiert worden, die an der Tafel mit Hilfe von Haftstreifen flexibel umgeordnet werden konnten.

Die Kinder begründeten, warum sie alle Möglichkeiten gefunden hatten und lasen aus ihren Forscherberichten vor, wie sie vorgegangen waren und was ihnen aufgefallen war. In der Zusammenschau der Zahlengitter wurden diverse Auffälligkeiten benannt, wie etwa …

- Als Mittelzahl kommt immer die 10 (bzw. die 11) heraus.
- Wenn die linke Pluszahl um 1 größer wird, wird die obere Pluszahl um 1 kleiner.
- Rechts oben (bzw. links unten bzw. rechts unten (Zielzahl)) steht immer eine gerade Zahl.
- Die da (die rechte mittlere) und die da (die untere Mittelzahl) sind zusammen immer 30.
- Bei der Zielzahl 20 sind es immer 30, wenn man die Zahlen von links oben nach rechts unten (bzw. von rechts oben nach links unten) zusammenzählt.

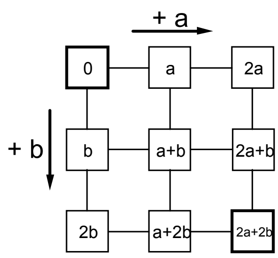
<u>Anregung 6:</u> Als Anhang 1 finden Sie einen ausführlichen Entwurf für eine Unterrichtsstunde zum Thema „Wie viele Zahlengitter findest du?". Diskutieren Sie diesen in der Gruppe und modifizieren Sie ihn individuell für Ihre Arbeitsbedingungen.

Führen Sie dann in ihrer eigenen Klasse eine „Unterrichtsstunde" durch, dokumentieren Sie deren Verlauf und deren Ergebnisse (zum Beispiel mit Hilfe der Eigenproduktionen der Kinder) und tauschen Sie sich anschließend über Ihre individuellen Erfahrungen aus.

Tragen Sie insbesondere zusammen, was gut und was weniger gut gelaufen ist. Welche Konsequenzen ziehen Sie für die nochmalige Durchführung dieser oder einer ähnlich angelegten Unterrichtsstunde?

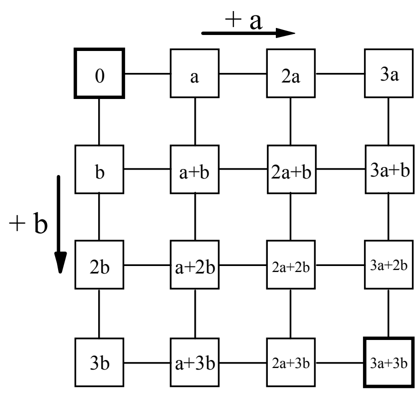
Wie ging es weiter?

Da die einzelnen Kinder natürlich unterschiedlich weit fortgeschritten waren, schloss sich eine Stunde an, in der sie individuell die Gelegenheit erhielten, die Aufgabenstellungen auf weitere Zielzahlen zu übertragen.



Dem „allgemeinen" 3·3-Gitter kann man die Auffälligkeiten entnehmen, die die Kinder speziell für die Zielzahl 20 formuliert haben. Zählt man zum Beispiel die Zahlen in den Diagonalen zusammen, so erhält man stets 3a+3b. Oder man sieht an der Bauart der rechten oberen (2a), der linken unteren (2b) sowie der Zielzahl (2a+2b), dass hier nur gerade Zahlen auftreten können.

Am darauffolgenden Tag stand die Aufgabenstellung im Vordergrund, bestimmte Zielzahlen (30 bzw. 33) in einem *4·4-Zahlengitter* zu erreichen. Dabei ergibt sich als Zielzahl nicht 2a+2b, sondern 3a+3b. Also können nur Vielfache von 3 als Zielzahlen auftreten.



Abschließend wurden einige Auffälligkeiten des 4·4-Gitters besprochen. Interessant ist beispielsweise, dass die Anzahl der Pluszahlen-Paare für eine bestimmte Zielzahl – wie im Übrigen bei quadratischen Gittern beliebiger Größe – um eines größer als Summe dessen beider Zahlen ist.

Variationen

Die folgende Auflistung weiterer Aufgabenvariationen für das 3·3-Gitter verdeutlicht dessen vielfältigen Einsatzmöglichkeiten.

Trage die fehlenden Zahlen ein, ...

a) gegeben sind die Startzahl und die beiden Pluszahlen

b) gegeben sind die Zielzahl und die beiden Pluszahlen

c) gegeben ist eine der beiden Diagonalen

d) gegeben sind jeweils zwei der drei folgenden Zahlen: Startzahl, Mittelzahl und Zielzahl

e) gegeben sind zwei (drei) beliebige Zahlen

f) keine Zahlen sind vorgegeben (Erfinden eigener Zahlengitter)

Forscheraufgaben

a) Was ändert sich wie, wenn eine der beiden Pluszahlen um 1 (2 etc.) erhöht bzw. vermindert wird?

b) Vergleiche die Mittelzahl mit der Start- und der Zielzahl!

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Zahlengitter auszufüllen, wenn jeweils zwei der drei folgenden Zahlen gegeben sind: Startzahl, Mittelzahl und Zielzahl?

d) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen Zahlengittern mit gleicher Start- und Zielzahl?

e) Welche Zahlen kann man als Zielzahlen erreichen, welche nicht?

f) Was ändert sich, wenn man die Startzahl verändert, aber die Zielzahl fix lässt?

g) Welche Zielzahlen ergeben sich, wenn als Pluszahlen nur bestimmte Zahlen zugelassen sind (z. B. Fünferzahlen)?

Addition im Zahlengitter

a) Addiere jeweils zwei gegenüberliegende Randzahlen

b) Addiere die Zahlen in den beiden Diagonalen

c) Addiere die Zahlen in jeder der drei Spalten (Zeilen)

d) Addiere alle acht Randzahlen und vergleiche sie mit der Mittelzahl, usw.

Sonderfälle wie beispielsweise gleiche Pluszahlen (a=b), benachbarte Pluszahlen (a=b+1) bzw. Vielfachen-Beziehungen wie a=2b oder die Beschränkung auf bestimmte Pluszahlen (z. B. nur Vielfache von 5) führen zu weiteren interessanten Auffälligkeiten.

Denkbar sind des weiteren Modifikationen wie die Verwendung anderer Startzahlen oder die Übertragung der Fragestellungen auf andere quadratische bzw. auf *rechteckige* Zahlengitter. Außerdem können auch die anderen Grundrechenarten bei der Auswahl der Operatoren berücksichtigt werden. In höheren Klassenstufen schließlich wäre eine Erweiterung auf Bruchzahlen oder negative Zahlen möglich.

2 Ein anderes Bild von Mathematik

Aufgabenfelder wie die Zahlengitter, die inhalts- und prozessbezogene Ziele gleichermaßen ansprechen, sind im Verlauf der letzten rund 15 Jahre vermehrt entwickelt bzw. wieder entdeckt worden. In ihnen kommt ein anderes Bild von Mathematik zum Ausdruck, das sich gegenüber der weitverbreiteten Sichtweise von *Mathematik als Geheimwissenschaft* abgrenzt und sich durch die Umschreibung *Mathematik als Tätigkeit und als Wissenschaft von den Mustern* fassen lässt (vgl. Wittmann 2003).

Was unter diesen beiden gegensätzlichen Extrempositionen verstanden wird, kann in einem ersten Anlauf durch die folgenden Erinnerungen von Erwachsenen an ihren eigenen Mathematikunterricht deutlich werden (vgl. Spiegel & Selter 2003, 44ff.):

- „Ich erinnere mich vorrangig an passives Aufnehmen des Stoffes durch lehrerzentrierten, nach „Schema F" verlaufenden Unterricht."
- „Bei uns gab es viel einsames Rechnen aufgrund mangelnder Hilfestellung und geringen Interesses des Lehrers an unseren Personen und Lösungswegen."
- „Der Unterrichtsstoff wurde nur für die Klassenarbeiten gelernt und dann schnell wieder vergessen."
- „Allein die Lösung zählte; *der* Lösungsweg wurde in unsere Köpfe gehämmert."
- „Wir haben unsere Unterrichtsinhalte selbstständig erarbeitet und konnten uns aktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligen; die Unterrichtsgestaltung war recht vielseitig."

- „Wir hatten offene Lehrer, an die wir uns wenden konnten und die uns verstanden."
- „Durch den Unterricht wurde bei mir das Interesse an der Mathematik über die Schule hinaus angeregt."
- „Der Weg zur Lösung war genauso wichtig wie das Ergebnis selbst; verschiedene Lösungswege wurden anerkannt."

Mathematik als Geheimwissenschaft

Für die meisten Menschen ist Mathematik wie bittere Medizin, hat der Mathematiker und Computerwissenschaftler Seymour Papert geschrieben, und damit hat er vermutlich recht. Aus zahlreichen Gesprächen mit den unterschiedlichsten Menschen kann man leicht den Eindruck gewinnen, dass viele von ihnen überwiegend schlechte Erfahrungen mit Mathematik gesammelt haben. Keineswegs wenige finden ihre eigenen Schulerfahrungen durch die ersten vier Statements repräsentiert.

Mathematik wird hier als ein Wissensbestand angesehen, der aus undurchschaubaren Begriffen, Sätzen und Verfahren besteht – zumindest ab einer bestimmten Klassenstufe. Die Techniken dieser Geheimwissenschaft gilt es, notfalls auch ohne Verständnis zu lernen, um sie bei der nächsten Klassenarbeit abzuspulen und dann wieder zu vergessen.

Mathematik und Kreativität – so eine weit verbreitete Meinung – haben wenig oder sogar nichts miteinander zu tun. Der Sinn von Beweisen ist unklar. Und wenn man etwas beweist, muss man ständig Schritte tun, die man nicht versteht und von denen man nicht weiß, warum man sie tut. Mathematiker werden häufig gleichermaßen geachtet (ihrer offensichtlichen intellektuellen Kapazitäten wegen) und bemitleidet (aufgrund ihrer scheinbaren Weltfremdheit).

Bei der Auseinandersetzung mit den Aktivitäten rund um Zahlengitter kann man selbst als „Mathematik-Geschädigter" erfahren, was Mathematik auch sein kann, nämlich nicht nur eine Ansammlung von Regelwissen und Rezepten.

Mathematik als Tätigkeit ...

So wie die Worte „Kunst" und „Musik" nicht nur für etwas schon Fertiges stehen – die Bilder oder die Musikstücke – sondern auch für das, was Künstler und Musiker tun, nämlich malen und musizieren, so steht „Mathematik" auch für eine *Tätigkeit*, bei der

- Intuition, Phantasie und schöpferisches Denken beteiligt sind,
- man durch eigenes und gemeinschaftliches Nachdenken Einsichten erwerben und Verständnis gewinnen kann und
- selbstständig Entdeckungen machen und dabei Vertrauen in die eigene Denkfähigkeit und Freude am Denken aufbauen kann (vgl. Spiegel & Selter 2003, S. 47).

Für viele Leserinnen und Leser ist das vermutlich eine neue und unvertraute Sichtweise. Dass Mathematik etwas mit Kreativität zu tun haben soll, ist für viele schwer vorstellbar. Wenn Sie aber das Buch „Der Zahlenteufel" von Hans Magnus Enzensberger (1997) gelesen haben, wird Ihnen das Obige nicht so fremd sein. Auch nicht, dass eigentlich jeder Mensch ein Mathematiker ist – auch jedes Kind.

> *Die Mathematik existiert nur im Intellekt. Jeder, der sie erlernt, muss sie daher nachempfinden bzw. neu gestalten. In diesem Sinn kann Mathematik nur erlernt werden, indem sie geschöpft wird. Wir glauben nicht, dass ein klarer Trennstrich gezogen werden kann zwischen der Tätigkeit des forschenden Mathematikers und der eines Kindes, das Mathematik lernt. Das Kind hat andere Hilfsmittel und andere Erfahrungen, aber beide sind in den gleichen schöpferischen Akt einbezogen. Wir möchten betonen, dass die Mathematik, die ein Kind beherrscht, tatsächlich sein Besitz ist, weil das Kind diese Mathematik durch persönliche Handlung entdeckt hat* (Wheeler 1970, S. 8).

Mathematik fängt schon da an, wo ein Kind für sich allein entdeckt, dass es „gerechte" und „ungerechte" Zahlen gibt (wir Erwachsenen nennen sie „gerade" und „ungerade"). Oder wo es für die Zahl 101, die wir „hunderteins" nennen, „einhundert" sagt, weil es das Prinzip der Zahlwortbildung für zweistellige Zahlen auf dreistellige überträgt. Was im letzten Satz des obigen Zitats als Folgerung für den Unterricht angedeutet ist, wird in der folgenden Äußerung von Freudenthal (1982) noch pointierter ausgedrückt.

> *Mathematik ist keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung. …*
>
> *Immer gilt: Der Schüler erwirbt Mathematik als Geistesverfassung nur über Vertrauen auf seine eigenen Erfahrungen und seinen eigenen Verstand. Viele Schüler haben im Mathematikunterricht erfahren, daß sie mit ihrem Verstand nichts anfangen können, daß es ihnen am rechten Verstand fehlt, daß der Lehrer und das Buch doch alles besser wissen, als sie es sich selber ausdenken können. …*
>
> *Eine Geisteshaltung lernt man aber nicht, indem einer einem schnell erzählt, wie er sich zu benehmen hat. Man lernt sie im Tätigsein, indem man Probleme löst, allein oder in seiner Gruppe - Probleme, in denen Mathematik steckt.*

Wenn Sie zu denjenigen gehören, die mit Mathematik in der Schule überwiegend weniger gute Erfahrungen gemacht haben, dann werden Sie mit dieser Sichtweise vermutlich Schwierigkeiten haben. Auch wenn Sie zu dem Kreis von Personen gehören, die sich zwar gern an ihren Mathematikunterricht erinnern, sich aber dort im Wesentlichen von „reduzierter Mathematikkost" ernähren mussten, also dem Ausführen und Anwenden vorgegebener Verfahren, wird Ihnen dieser Standpunkt gewöhnungsbedürftig vorkommen. Aber Mathematik ist voll von Entdeckungsmöglichkeiten.

… und als Wissenschaft von den Mustern

Denn auf die Frage, was Mathematik ist, geben heutige Mathematiker häufig die Antwort: *Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern* (vgl. Devlin 1998). Diese Aussage ist kurz und voraussetzungsvoll und daher potenziell missverständlich. Man muss wissen, dass der Begriff Muster sich keineswegs nur auf sichtbare Muster wie Zahlenfolgen oder Parkette beschränkt. Weit darüber hinausgehend steht das Wort Muster stellvertretend für Begriffe wie Ordnungen, Strukturen, Beziehungen, Zusammenhänge, Auffälligkeiten, Abhängigkeiten oder Regelmäßigkeiten. Durch Beschäftigung mit Mathematik lernt man, die Welt zu ordnen. Denn

> *Mathematische Muster dürfen nicht als fest Gegebenes angesehen werden, das man nur betrachten und reproduzieren kann. Ganz im Gegenteil: Es gehört zu ihrem Wesen, dass man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann* (Wittmann 2003, 26).

Natürlich darf man die Formulierung „Wissenschaft von den Mustern" nicht so verstehen, dass es in der Grundschule nicht mehr um das Erlernen des Einmaleins oder der schriftlichen Addition geht. Dieses ist – wie in den einleitenden Bemerkungen schon ausgeführt – nach wie vor von essenzieller Bedeutung. Aber es sollte im Unterricht wesentlich auch um die Schulung prozessbezogener Kompetenzen gehen, d. h. um das Sehen, Beschreiben, Erfinden, Untersuchen, Fortsetzen, Abwandeln, … von Mustern gehen.

Anregung 7: Erinnern Sie sich an Ihre eigene Schulzeit und – sofern Sie Mathematik als Fach studierten – an Ihre Ausbildung: Inwieweit haben Sie dort die in diesem Abschnitt beschriebenen Sichtweisen von Mathematik kennengelernt?

Anregung 8: Arbeiten Sie den Beitrag „Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohl verstandene Fach auch für den Mathematikunterricht an Grundschulen" von Wittmann (2003) durch. Stellen Sie dann in Ergänzung zu den von Wittmann auf den Seiten 30ff. gegebenen eigene Beispiele aus Ihrem Unterricht zusammen, die dem „neuen Mathematikbild" entsprechen, und stellen Sie diese Ihren Kolleginnen und Kollegen vor.

3 Schöne Päckchen – schon Erstklässler erforschen, entdecken und erklären

Die allgemein gehaltenen Ausführungen des vorangehenden Kapitels über Mathematik als Tätigkeit und als Wissenschaft von den Mustern sind keineswegs nur für Erwachsene oder für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufen relevant, sondern auch schon für die Unterrichtspraxis in der Grundschule – und im Übrigen auch für die mathematische Früherziehung in der Vorschulzeit (Wittmann & Müller 2002/2004).

Dabei zeigt die Erfahrung, dass es nicht immer sinnvoll ist, direkt mit komplexer angelegten Unterrichtsbeispielen wie Zahlengittern zu beginnen, sondern es bisweilen durchaus angezeigt ist, zunächst einmal überschaubare Zugänge zu wählen. Diese bietet die Grundidee der sog. *schönen Päckchen*, aber darüber hinaus auch genügend

Anregungen für erfahrene Zahlenforscher. Die zahlreichen Variationen und Einsatzmöglichkeiten sollen im Folgenden am Beispiel des Einspluseins vorgestellt werden.

Eigentlich in jedem Schulbuch für das 1. Schuljahr findet man schöne Päckchen zur Übung des Einspluseins. Darunter versteht man operative Aufgabenserien, die die Kinder zum Entdecken, zum Erforschen, zum Erklären anregen (z. B. 4+1, 5+2, 6+3, usw.). Wenn die Kinder diesen Aufgabentyp noch nicht kennen, sollten sie zunächst einmal eine Reihe von schönen Päckchen ausrechnen. Dabei gibt es immer einige Schüler(innen), die die existierenden Zusammenhänge bereits sehen oder gar nutzen, und andere, die die einzelnen Aufgaben getrennt voneinander berechnen.

Sind einige Päckchen bearbeitet worden, sollten deren Aufbauprinzipien mit den Kindern besprochen werden. Wenn dann die Grundidee „klar" geworden ist, können sich Aufgabenstellungen der folgenden Art anschließen, die die Kinder zum Nachdenken über die Aufgaben und ihre Ergebnisse anregen.

Wie geht es weiter?

Hierbei sollen die Kinder den vorgegebenen Anfang einer Aufgabenserie ausrechnen und diese fortsetzen, also das hinein gelegte oder ein anderes von ihnen selbst gefundenes Konstruktionsprinzip nutzen. Man sollte keine Scheu haben, auch vergleichsweise simpel erscheinende Aufgabenserien einzusetzen – etwa solche mit einem konstanten Summanden –, denn manche Kinder brauchen verständlicher Weise einige Zeit, um komplexere Aufbauprinzipien zu durchschauen.

Wie geht es weiter?

2 + 3 = …	8 + 8 = …	5 + 2 = …	7 + 9 = …	9 + 1 = …
3 + 3 = …	7 + 7 = …	5 + 4 = …	6 + 8 = …	8 + 3 = …
4 + 3 = …	6 + 6 = …	5 + 6 = …	5 + 7 = …	7 + 5 = …
5 + 3 = …	… … … … …	… … … … …	… … … … …	… … … … …
… … … … …	… … … … …	… … … … …	… … … … …	… … … … …

Um wie viele Aufgaben die Serie jeweils fortgesetzt werden soll bzw. wie viele Aufgaben jeweils vorgegeben werden, sollte individuell entschieden werden. Häufig ergibt es sich auf „natürliche Weise", dass dabei der Rahmen des kleinen Einspluseins oder sogar der Zwanzigerraum verlassen wird.

Erfinde selbst!

Wenn die Kinder das Grundprinzip der schönen Päckchen verstanden haben, sollten sie solche auch selbst erfinden. Hierbei sind verschiedene Variationen denkbar, z. B.:

- Erfinde ein schönes Päckchen! (ganz frei)
- Die erste (zweite) Zahl soll bei jeder Aufgabe die 3 sein!
- Die erste Aufgabe soll 2+2 lauten!
- Das erste Ergebnis soll 10 sein!
- Bei jeder Aufgabe soll das gleiche Ergebnis herauskommen!

Hierbei werden vermutlich einige Kinder innerhalb eines Päckchens nicht durchgängig ein Aufbauprinzip verwenden. Auch ist zu erwarten, dass Aufgaben zur Subtraktion oder solche mit mehr als 2 Summanden erfunden werden.

4+2	7+8	5+3	2+2+5	1+2−1
4+3	8+9	3+5	2+3+6	1+3−1
5+3	9+10	5+5	2+4+7	1+4−1
5+4	10+1	3+3	2+5+8	1+5−1
6+4	10+2		2+6+9	1+6−1
6+5	10+3			1+7−1

Es kommt nun nicht darauf an, solche Eigenproduktionen auszusondern und auf schöne Päckchen hinzusteuern, die aus jeweils zwei Summanden bestehen und ein einziges, klar definiertes Konstruktionsprinzip aufweisen. Wichtig ist es statt dessen, die Erfindungen der Kinder anzuerkennen und deren 'Regeln' verstehen zu wollen. Inwieweit man dann im Unterricht behutsam auf das Einhalten bestimmter Konventionen drängt, muss im Einzelfall entschieden werden.

Was passt nicht?

Auch bei dieser Variation müssen die Kinder über die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Aufgaben reflektieren. Ihnen wird eine Aufgabenserie aus etwa fünf Aufgaben vorgegeben, von denen eine das Muster stört. Die Kinder müssen die „falsche" Aufgabe finden und durch die richtige ersetzen, also die Störung beseitigen. Es ist auch möglich, unter der Überschrift „Schöne Päckchen?" verschiedene Aufgabenserien abzudrucken und die Kinder diese nicht nur ausrechnen, sondern auch entscheiden zu lassen, ob ein schönes oder ein gestörtes Päckchen vorliegt (vgl. Wittmann & Müller

2000). Wie das letzte der angeführten Beispiele andeutet, ist es bisweilen durchaus auch möglich, mehr als eine Störung einzubauen.

1 + 2 = 3	8 + 1 = …	1 + 1 = …	5 + 7 = …	9 + 2 = …
2 + 3 = 5	8 + 2 = …	2 + 2 = …	4 + 7 = …	8 + 3 = …
3 + 4 = 7	8 + 3 = …	3 + 5 = …	2 + 7 = …	7 + 5 = …
4 + 4 = 8	8 + 4 = …	4 + 4 = …	2 + 7 = …	6 + 4 = …
5 + 6 = 11	8 + 6 = …	5 + 5 = …	1 + 7 = …	5 + 6 = …

Auch hier ist „kein Lehrer vor der Kreativität seiner Schüler sicher", wie es Bauersfeld einmal ausgedrückt hat. Steinweg (2001, 230) etwa berichtet von einem Erstklässler, der zu der links abgedruckten Serie sagt, die letzte Aufgabe würde nicht in das Muster passen, weil das Ergebnis größer als 10 sei und die Klasse zu dem Zeitpunkt nur bis 10 gerechnet habe.

Ordne!

Beim Ordnen werden den Kindern die durcheinander geratenen Aufgaben einer Serie vorgegeben. Sie werden gebeten, diese auszurechnen – wobei es einige Schüler geben mag, die von sich aus die vorgegebene Reihenfolge beim Rechnen nicht einhalten – und im Nachhinein zu sagen, wie man die Aufgaben anders anordnen könnte (links). Oder sie schreiben die Aufgaben geordnet ab und rechnen dieses schöne Päckchen dann aus (mittig). Etwas anspruchsvoller ist die Aufgabe, beispielsweise acht Aufgaben vorzugeben, aus denen die Kinder zwei schöne Päckchen zusammenstellen sollen (rechts).

	Ein schönes Päckchen	*Zwei schöne Päckchen*
5 + 6 = …	2 + 2 5 + 5	9 + 1 3 + 8
5 + 2 = …	4 + 4	1 + 6 6 + 4
5 + 5 = …	1 + 1	4 + 9 7 + 3
5 + 4 = …	3 + 3	8 + 2 2 + 7
5 + 3 = …		

Geschult wird bei diesen Variationen nicht nur die Einsicht in die operative Struktur schöner Päckchen, sondern auch das Beachten von Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen, Fähigkeiten, die beim sog. flexiblen Rechnen von entscheidender Bedeutung sind.

Was fällt dir auf?

Eine weitere Anregung zur Reflexion über Zusammenhänge besteht in der Frage „Was fällt dir auf?", die je nach Situation in unterschiedlich offener Form gestellt werden kann, beispielsweise:

- Was fällt dir auf? (ganz frei)
- Schaue dir die erste Zahl (die zweite Zahl) in jeder Aufgabe an. Was fällt dir auf?
- Schaue dir die Ergebnisse an. Was fällt dir auf?
- Vergleiche die erste und die zweite Aufgabe. Was ist gleich? Was ist anders?
- Wie verändert sich die erste Zahl (die zweite Zahl; das Ergebnis) von Aufgabe zu Aufgabe?

Wenn Kinder ihre Auffälligkeiten verbalisieren oder in Form von Zeichnungen bzw. kurzen Texten verschriftlichen, dann werden erfahrungsgemäß auch unerwartete Auffälligkeiten benannt, z. B.

- Alle Ergebnisse sind kleiner als 10.
- Die linke Zahl (1. Summand) ist immer größer als die rechte (2. Summand).
- Die linke Zahl ist immer kleiner als das Ergebnis. (!)
- Zuerst stehen 5 Zahlen untereinander, dann fünfmal plus, dann wieder fünf Zahlen, dann fünfmal gleich und dann wieder fünf Zahlen.
- Die letzten beiden Aufgaben waren schwerer als die anderen.

Auch hier gilt es zunächst wieder, solche ggf. unerwarteten Äußerungen zu würdigen. Schließlich ist es ganz normal, dass nicht allen Kindern auf Anhieb klar sein kann, was im Kontext des Mathematikunterrichts eher als interessante Auffälligkeit gilt und was eher nicht.

Erkläre!

Die vermutlich schwierigste Aufgabe für die Kinder besteht darin, die von ihnen beobachteten Auffälligkeiten anhand von repräsentativen Beispielen zu erklären. Inwieweit die Kinder hier Plättchen zur Erläuterung heranziehen, hängt davon ab, ob sie diese als Hilfsmittel oder als eine weitere Darstellung kennengelernt haben, die zur Erhellung des Sachverhalts nichts oder wenig beiträgt. Dabei lassen sich aber häufig schon erstaunliche Einsichten in Beziehungen und Wirkungen von Rechenoperationen beobachten, etwa:

- Die erste Zahl wird um 1 größer, die zweite bleibt gleich. Das Ergebnis wird auch um 1 größer.
- Beide Zahlen werden um 1 kleiner. Das Ergebnis wird um zwei kleiner.
- Wenn ich bei der ersten Zahl eins dazu tue und bei der zweiten Zahl eins wegnehme, dann habe ich wieder das gleiche Ergebnis.

Anregung 9: Als Anhang 2 finden Sie eine Zusammenstellung von arithmetischen Aufgaben, die im 1. Schuljahr eingesetzt werden können und andererseits auch noch Erwachsene herausfordern können. Bilden Sie kleinere Gruppen, die sich anhand des dort angegebenen Leitfadens jeweils mit einer der Aufgaben auseinandersetzen und die Ergebnisse Ihrer mathematischen und Ihrer didaktischen Analysen vorstellen.

4 Prozessbezogene Kompetenzen

Was genau sind nun prozessbezogene Kompetenzen? Ausgehend von den Ausführungen des Kapitels 2 beziehen sie sich auf *Prozesse* mathematischer Aktivität, auf die eigene mathematische *Tätigkeit* und grenzen sich damit gegenüber den *Produkten* der mathematischen Aktivität, den *Resultaten* der Lernanstrengungen ab.

In den verschiedenen Lehrplänen und der Literatur gibt es nun – bei allen Übereinstimmungen in den Grundintentionen – leicht unterschiedliche Nuancierungen bei dem Versuch, die in der Unterrichtsrealität häufig nur schwer voneinander abzugrenzenden prozessbezogenen Kompetenzen zu klassifizieren (vgl. Winter 1975; Wittmann 1981; Krauthausen 1998; Selter 2002).

Ich folge im Weiteren den fünf von der KMK (2004) verwendeten Oberbegriffen, die ausschnitthaft anhand von Beispielen illustriert werden sollen (vgl. auch das Modul 10 zu *Bildungsprofilen und Bildungsstandards im Mathematikunterricht* und das Modul 3 zu *Mathematikunterricht zwischen Offenheit und Zielorientierung*). Die Standards formulieren folgende prozessbezogenen Kompetenzen, die Kinder bis zum Ende der Grundschulzeit im Fach Mathematik erwerben können sollen …

Problemlösen

- *mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden,*
- *Lösungsstrategien entwickeln und nutzen, z.B. systematisch probieren,*
- *Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.*

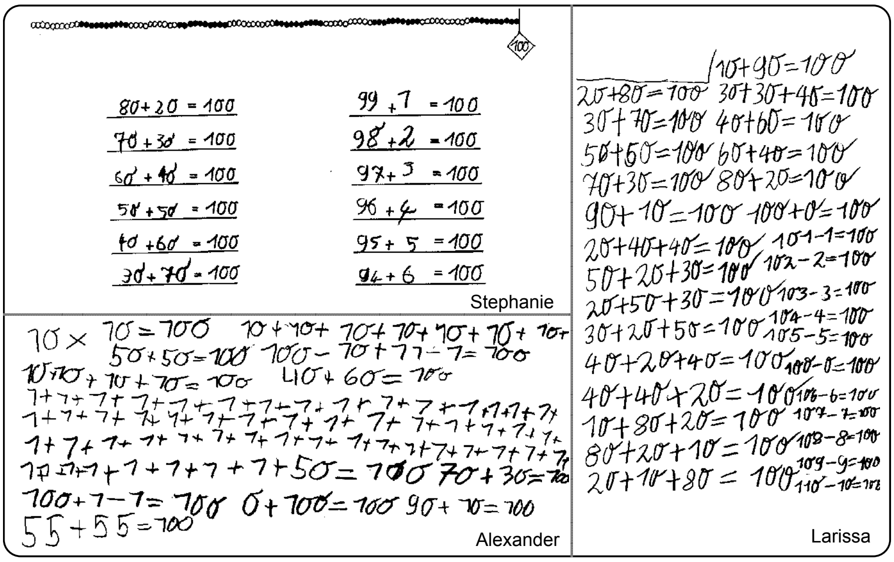
Gemeint ist damit u. a., Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen zu erkennen und zu nutzen. So setzten sich Zweitklässler mit einem (von einer Mitschülerin erfundenen) Rechenpäckchen auseinander, bei dem die einzelnen Aufgaben nicht willkürlich ausgewählt wurden, sondern auf mehrfache Weise miteinander verbunden waren (Kästner 1997).

So besprachen die Kinder z. B. das folgende Päckchen:

$1 - 1 + 50 - 5 = 45$
$2 - 2 + 50 - 4 = 46$
$3 - 3 + 50 - 3 = 47$
$4 - 4 + 50 - 2 = 48$
$5 - 5 + 50 - 1 = 49$
$6 - 6 + 50 - 0 = 50$
$7 - 7 + 50 - 1 = 49$

Mandana: „Das Ergebnis wird immer einer mehr.“
Viktor: „Nein, stimmt gar nicht, nur zuerst. Dann wird es wieder einer weniger.“
Jessica: „In der Mitte ist immer 50.“
Florian: „Mir ist auch was aufgefallen. Hier (Florian steht auf und zeigt auf die vorderen Zahlen) ist immer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.“
Stefan C.: „Die werden immer um 1 größer.“
Jonathan: „Da kommt immer 0 raus.“
Lehrerin: „Wo?“
Jonathan: (steht auf und zeigt auf die erste Differenz) „Hier. 1 – 1 ist 0, 2 – 2 ist 0. Das braucht man gar nicht zu rechnen.“

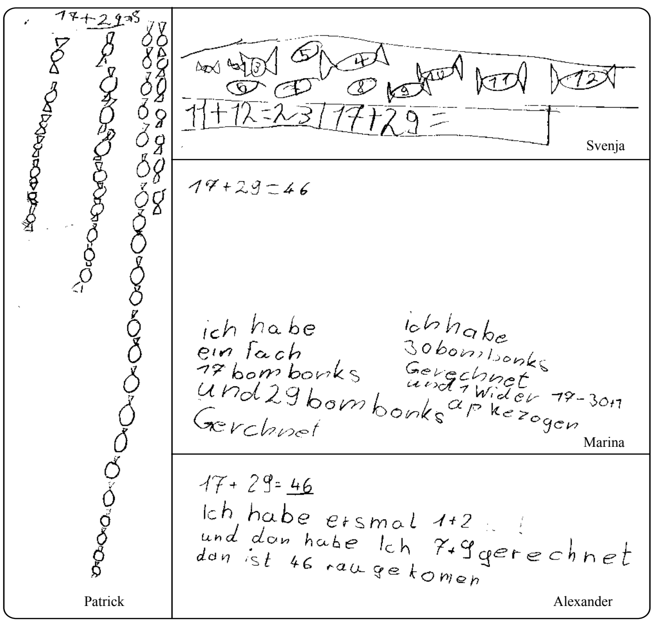
Zum Problemlösen gehört auch, eigene Aufgaben (ggf. in Anlehnung an bekannte) zu entwerfen. Im folgenden Beispiel erfanden Erstklässler am Ende des Schuljahres Aufgaben, deren Ergebnis 100 sein sollte (vgl. Höhtker & Selter 1995, 134). Drei Beispiele geben einen Eindruck davon, wie diese Schüler die Aufgabe bearbeiteten.



Kommunizieren

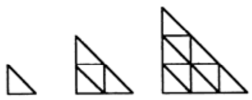
- *eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren,*
- *mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden,*
- *Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.*

Dieser Oberbegriff kann illustriert werden durch unterschiedliche Lösungen von Kindern eines zweiten Schuljahres, die die Aufgabe 17+29 gestellt bekamen, bevor im Unterricht das Rechnen im Zahlenraum bis 100 thematisiert worden war.



Wie schwierig eine trennscharfe Zuweisung von Aufgaben zu Kompetenzen ist, kann an diesem Beispiel deutlich werden, das auch als dem Oberbegriff Problemlösen zugehörig angesehen werden könnte (*Lösungsstrategien entwickeln und nutzen*). Letztlich werden durch gute Aufgaben immer mehrere Kompetenzen angesprochen.

Zurück zum Kommunizieren: Die Kinder sollen auch lernen können, gemeinsam komplexere Aufgaben zu bearbeiten, dabei Verabredungen zu treffen und einzuhalten sowie eigene und fremde Standpunkte zueinander in Beziehung zu setzen. Ausgangspunkt des folgenden illustrierenden Beispiels aus einem dritten Schuljahr war die folgende Aufgabenstellung (aus Röhr 1999, 160 ff.).



Aus wie vielen kleinen Dreiecken besteht das 8. Dreieck?

Benni: Warte mal! Mir ist was aufgefallen. $3 \cdot 3$ ist 9, $2 \cdot 2$ ist 4, $1 \cdot 1$ ist 1. Jetzt können wir ausrechnen, was das achte ist.
(Lehrerin verlässt den Raum.)

Markus: Ja, das ist die Achterreihe, das ist die Achterreihe.

Benni: Nein, nicht die Achterreihe.

Markus: Dreierreihe?

Benni: Nein, $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$.

Markus: $4 \cdot 4$ kommt jetzt.

Benni: Ja, wir müssen uns nur noch ausrechnen, was $4 \cdot 4$ ist, dann können wir $8 \cdot 8$ rechnen.

M. u. J.: $4 \cdot 4$ ist 16.

Benni: Aber ich möchte das gern noch mal überprüfen. Vielleicht kommt ja hier was anderes. Das kannst du nicht wissen. Wenn das vierte genauso ist, können wir einfach $8 \cdot 8$ rechnen.

Markus: Jau, $4 \cdot 4$, – das sind doch 64.

Benni: Nein, $4 \cdot 4$ sind 16.

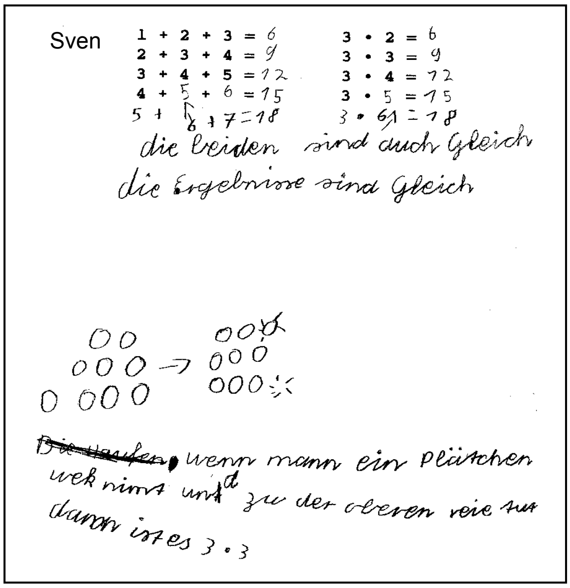
Jennifer: Sollen wir das jetzt noch aufmalen?

Benni: Ja.

Markus: Ja, wir malen das lieber jetzt noch auf!

Benni will seine Vermutung an der vierten Figur überprüfen. Seiner Meinung nach muss diese Figur aus 16 Dreiecken bestehen, um seine Hypothese zu untermauern. Deshalb versuchen die Kinder gemeinsam, die Figur zu zeichnen. Das bereitet ihnen zwar anfangs große Mühe, sie kommen aber zu dem vorausgesagten Ergebnis. Benni ist sich jetzt sicher, dass das achte Dreieck aus 64 kleinen Dreiecken bestehen muss. Da Jennifer noch zweifelt, zeichnen die Kinder die achte Figur auf und sehen Bennis Hypothese bestätigt.

Argumentieren



- *mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen,*
- *mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln,*
- *Begründungen suchen und nachvollziehen*

Bis zum Ende von Klasse 4 sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, Vermutungen über mathematische Sachverhalte (Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen, Ausnahmen) aufzustellen und anhand von repräsentativen Beispielen oder von allgemeinen Überlegungen zu bestätigen oder zu widerlegen.

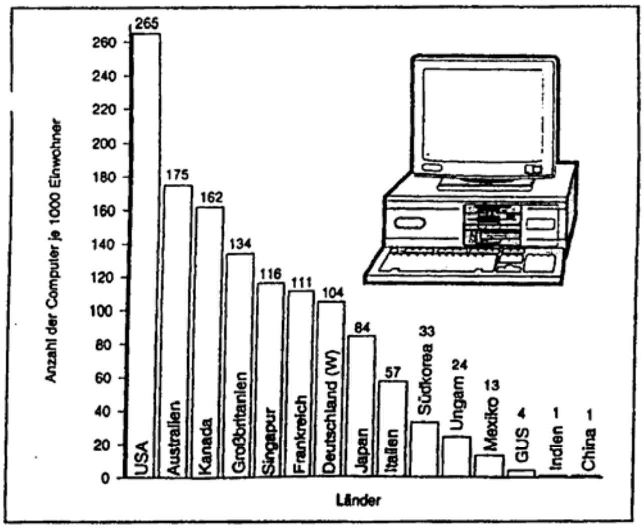
Das Beispiel von Sven zeigt, dass Vermutungen und Begründungen zumindest in den schriftlichen Dokumenten der Kinder häufig kaum zu trennen sind. Er rechnete die jeweils links (z. B. 1+2+3) und die jeweils rechts (z. B. 3·2) stehende Aufgabe aus, vermutete, dass sich dort jeweils dasselbe Resultat ergeben würde, und begründete außergewöhnlich elegant, warum das so sein muss.

Die Beispiele zu den schönen Päckchen im Kapitel 3 zeigen auf, dass Begründen auch bei einfacher strukturierten Aufgaben angeregt werden kann und sollte. Dabei wird auch deutlich, dass Vermutungen und Begründungen der Schülerinnen und Schüler nicht immer schriftlich fixiert werden müssen. Die Schulung der mündlichen Begründungsfähigkeiten ist ebenso wichtig wie die der schriftlichen und geht dieser in der Regel voraus.

Modellieren

- *Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen,*
- *Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen,*
- *zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren*

Im Verlauf der Grundschulzeit sollen die Kinder des weiteren lernen, lebensweltlichen Situationen relevante Informationen zu entnehmen, die Situationen zu modellieren und die Ergebnisse auf die Ausgangssituation zurück zu beziehen (vgl. hierzu auch Aktivitäten aus dem Modul 2 „Erforschen, Entdecken und Erklären im Sachunterricht", Schreier 2004). Illustriert werden soll dieses an einem Beispiel aus Dröge (1995, 418f.).



Bewohner	Erwachsen	Kinder	Ältere	Anzahl der Computer
124	54	26	44	11
31	15	11	5	6
11	10	1	0	10
46	15	12	19	3
73	42	21	10	3
6	5	1	0	6
53	34	13	6	5
82	38	27	15	7
24	10	9	5	9
45	17	17	11	11
31	16	11	4	10
17	6	6	5	2

Im Rahmen des Sachunterrichtsthemas „Wo wir leben – Unser Dorf, unsere Gemeinde" setzte ich den von mir veränderten Zeitungsausschnitt ein, um die Aussagekraft von Statistiken auf Grundschulniveau zu untersuchen.

Unterrichtsgespräch:

S: Da sind verschiedene Länder drauf.
S: Da sind in Prozent wieviel Computer es sind.
S: Das bedeutet, glaube ich, wieviel Computer im Land sind.
S: Bei uns in Deutschland sind es auf 1000 Einwohner 104 Computer.
S: Das kann doch nicht sein, in Gittelde sind wir doch schon mehr als 1000 Einwohner.
M:Mensch kapierste das nicht? Wir haben ungefähr 60 Mio. Einwohner, (Das war einmal) und davon kommen auf 1000 Einwohner 104 Computer.
S: Nur 104?
S: Nur? 104 sind ganz schön viele, überleg' mal, bei China, wo nur einer ist, kann man sagen „nur".
S: Von den 104 Computern haben wir einen.
S: Wir haben sogar 6 davon, bei meinem Vater im Steuerbüro.
Ln: Wie viele Kinder haben einen eigenen PC?
8 Kinder melden sich.
Der folgende Tafelanschrieb sollte provozieren:
22 Kinder 8 PCs
100 Kinder 40 PCs
1000 Kinder 400 PCs
Er provozierte auch.
S: Dann sind ja 104 doch wenig.
S: Man muß aber auch bedenken, daß Alte, Blinde, Behinderte, Babys auch als Einwohner zählen.
Ln: Was könnten wir tun, um die Werte zu überprüfen?

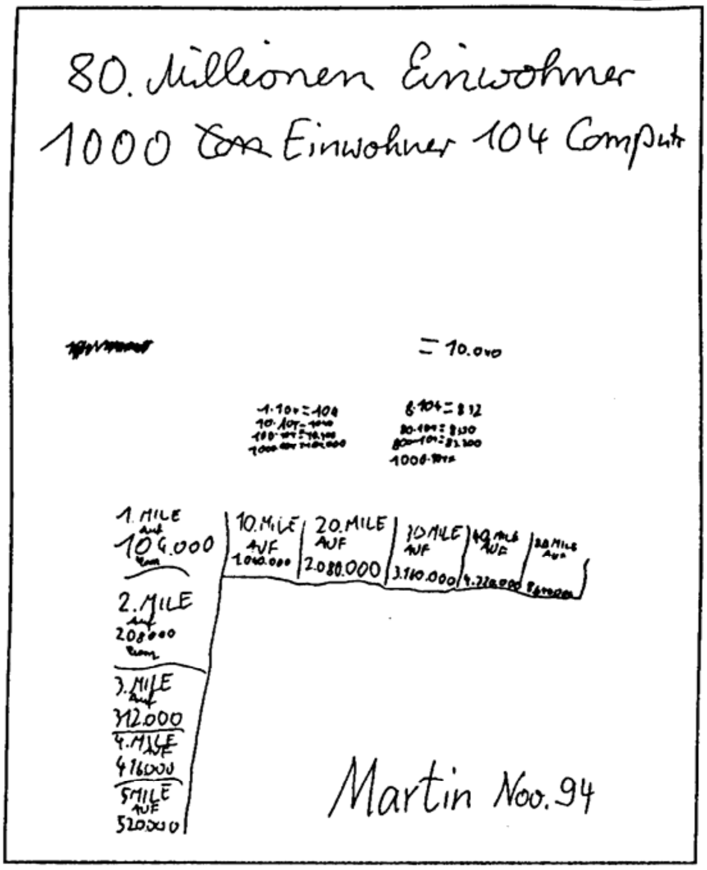
Die Schülerinnen wollten eine Befragung in ihrer Wohngegend durchführen und entwickelten folgende Tabelle für eine spätere Auswertung.

Je zwei Schülerinnen führten die Befragung in einer Straße durch. Die Ergebnisse wurden zusammengetragen und interpretiert.

Unterrichtsgespräch:

S: 11 Bewohner und 10 Computer, das kann doch nicht wahr sein. Doch da sind ja auch 10 Erwachsene und nur 1 Kind.
L: Wir haben ungefähr 600 Bewohner befragt. Die hatten 93 Computer. Wenn wir das Doppelte nähmen, hätten wir 1200 Einwohner und 180 Computer.
S: Das ist doch viel mehr.
S: Wir haben ja auch nicht genau untersucht.

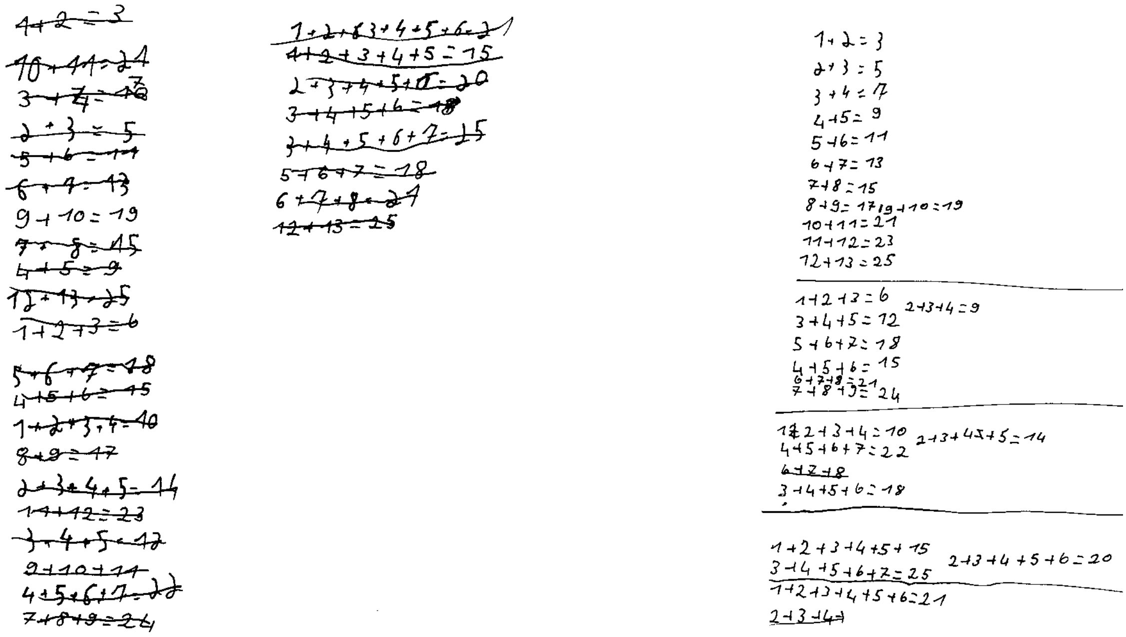
S: Experten untersuchen genauer, die nehmen von jedem Alter gleich viele.
S: Man müßte eigentlich wissen, wie genau alt die Älteren sind.
S: Oder wie klein die Kinder sind.
S: Und ob die den auch brauchen.
S: Ob die sich das leisten können.
Das Gesprächsprotokoll spricht für sich und die Echt-Situation.
Zwei leistungsstarke Kinder waren so motiviert, daß sie die Anzahl der Computer in Relation zur Geamtbevölkerung ermitteln wollten. Ich nannte diesen Kindern die Einwohnerzahl Deutschlands. Martin war fassungslos, als er sein mühsam errechnetes Ergebnis sah: „Mein Gott, was das kostet!"



Darstellen

- *für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen,*
- *eine Darstellung in eine andere übertragen,*
- *Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten.*

Dazu gehört u. a., sich die Aufgabenbedingungen oder erste Ergebnisse so aufzuschreiben oder mündlich zu vergegenwärtigen, dass die geordnete Notation die Weiterarbeit erleichtert. Im Beispiel setzten sich zwei Viertklässler mit der Aufgabe auseinander, die Zahlen von 1 bis 25 auf möglichst viele verschiedene Weisen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darzustellen (also z. B.: 15=4+5+6, aber auch 15=7+8 oder 15=1+2+3+4+5; vgl. Schwätzer & Selter 1998).



Die linke Hälfte der Abbildung dokumentiert die Möglichkeiten, die sie der Reihe nach fanden und aufschrieben. Um jedoch prüfen bzw. zeigen zu können, ob bzw. dass sie alle Möglichkeiten gefunden hatten, schrieben sie *für sich selbst* alles nochmals geordnet ab.

Darstellen meint u. a. auch, Beobachtungen, Überlegungen, Begründungen oder Einschätzungen mündlich oder schriftlich so auszudrücken, dass diese *für andere* verständlich sind (vgl. die Beispiele zu den Zahlengittern oder den Schönen Päckchen).

Anregung 10: **Stellen Sie aus Ihrem eigenen oder einem anderen Schulbuch oder sonstigen Quellen weitere Aufgaben zusammen, die prozessbezogene Kompetenzen ansprechen! Geben Sie jeweils an, um welche prozessbezogenen Kompetenzen es geht.**

Anregung 11: **Als Anhang 3 finden Sie eine Reihe von Aufgabenvariationen zum sog. Zauberdreieck. Arbeiten Sie diese durch und übertragen Sie die dort bzw. bei den Zahlengittern erkennbaren Möglichkeiten der Aufgabenvariation auf die von Ihnen zusammengetragenen Aufgaben.**

Anregung 12: **Über welche Erfahrungen mit solchen Aufgaben verfügen Sie aus Ihrem eigenen Unterricht? Welche Schwierigkeiten und welche**

positiven Auswirkungen erwarten Sie bzw. haben Sie bislang festgestellt?

<u>Anregung 13:</u> Vergleichen Sie die Ausführungen der Bildungsstandards (Download unter www.kmk.org**) zu den prozessbezogenen Kompetenzen mit den Aussagen des Lehr-/Bildungs-/bzw. Rahmenplans Ihres Bundeslandes, z. B. unter Fragestellungen wie den folgenden: Kommt ihnen ein vergleichbarer Stellenwert zu? Werden für sie Standards formuliert? Inwieweit sind die Auflistungen in den KMK-Standards und in Ihrem Bundesland kompatibel? ...**

<u>Anregung 14:</u> Als Anhang 4 finden Sie eine Beispielkopie aus *Zahlen untersuchen* von Verboom (2004, Materialteil, S. 15). Entwickeln Sie ausgehend von diesem Heft (16 Seiten) und ihren eigenen Erfahrungen Materialien zu ausgewählten Aufgabenstellungen, die sie im Unterricht für diejenigen Schüler einsetzen können, für die das Erforschen, Entdecken und Erklären (noch) ungewohnt ist. Erproben Sie diese Anregungen, tauschen Sie sich über Ihre Erfahrungen aus und entwickeln Sie Ihr Material weiter.

5 Nicht nur in der Arithmetik ...

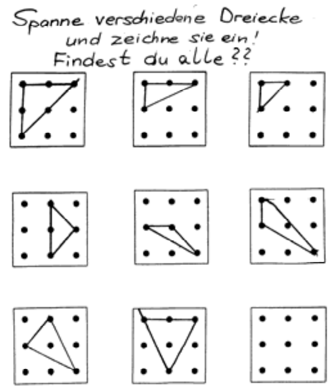
Prozessbezogene Kompetenzen sollten natürlich nicht nur in arithmetischen Sachzusammenhängen angesprochen werden, sondern auch im Rahmen von Aufgaben, die anderen Inhaltsbereichen bzw. Leitideen (vgl. Modul 10 zu Bildungsprofilen und -standards) zuzuordnen sind. Zur Illustration sollen hier Aktivitäten rund um das Geobrett sowie zur Zeitungsmathematik kurz vorgestellt werden.

Aktivitäten am Geobrett

Als Geobretter werden quadratische Holzbretter mit 3x3 oder 4x4, bisweilen auch mit 5x5, in gleichem Abstand zueinander eingeschlagenen Nägeln bezeichnet, an denen mit Hilfe von Gummibändern verschiedene Figuren oder Streckenzüge gespannt werden können.

Damit der Vergleich von Vorgehensweisen und Strategien, der Austausch gegenseitiger Anregungen und Impulse sowie die Reflexion über die durchgeführten Aktivitäten erleichtert wird, sollten die Kinder die auf dem Geobrett gespannten Figuren zeichnerisch auf Gitterpunktpapier dokumentieren. Darüber hinaus verbindet die zeichnerische Dokumentation die Operationen auf der Handlungsebene mit denjenigen auf der Vorstellungsebene.

Eine mögliche Aufgabe für Erst- oder Zweitklässler besteht darin, auf dem 3x3-Geobrett verschiedene Dreiecke zu spannen und diese auf einem Arbeitsblatt zu dokumentieren. Zwei Dreiecke werden als gleich angesehen, wenn man sie durch Drehen ineinander überführen kann. Nach der Entdeckungs- und Erforschungsphase der Kinder werden die von den Kindern gefundenen Möglichkeiten zusammengetragen und geordnet (vgl. Rickmeyer 2000). Dabei ergeben sich viele Situationen, in denen prozessbezogene Kompetenzen gefordert sind und gefördert werden.



Um die Reichhaltigkeit dieses Arbeitsmittels anzudeuten, soll im Weiteren eine Reihe von Aktivitäten angegeben werden, die mit dem Geobrett durchgeführt werden und die zur Förderung der prozessbezogenen Lernziele beitragen können (vgl. auch Keller 2002; Steibl 1976).

Elementare Übungen

a) Spanne ein Haus (einen Baum etc.). Denke dir selbst Figuren aus. Zeichne sie auf dein Arbeitsblatt.

b) Spanne Buchstaben. Spanne den größten Buchstaben. Findest du auch den kleinsten? Zeichne sie auf dein Arbeitsblatt.

c) Spanne eine Figur auf deinem Geobrett. Dein Partner darf sie nicht sehen. Beschreibe deinem Partner, wie die Figur aussieht und wo genau sie liegt. Dein

Partner spannt die Figur nach. Vergleicht eure Figuren. Sehen sie gleich aus? Wo gibt es Unterschiede? Wechselt euch ab!

d) Spanne eine Figur auf deinem Geobrett. Dein Partner darf sich deine Figur 15 Sekunden ansehen. Verdecke deine Figur. Dein Partner kann nun versuchen, deine Figur aus dem Gedächtnis nach zu spannen. Vergleicht eure Figuren. Sehen sie gleich aus? Wo gibt es Unterschiede? Wechselt euch ab!

e) Spanne viele verschiedene Vierecke. Zeichne sie auf dein Arbeitsblatt.

Symmetrie

a) Spanne eine Figur. Dein Partner spannt nun auf seinem Geobrett das Spiegelbild.

b) Spanne eine Figur mit genau zwei Spiegelachsen.

c) Spanne eine Figur mit einer senkrechten und keiner sonstigen Spiegelachse.

d) Wie viele Figuren mit vier Spiegelachsen findest du?

e) Spanne mit zwei Bändern zwei Strecken. Spanne, ohne das Brett zu drehen, zwei weitere Bänder, die zeigen sollen, wohin sich die ersten beiden Bänder bewegen, wenn das Brett halb herum gedreht wird.

Flächeninhalt und Umfang

a) Spanne Figuren mit dem Umfang 8, 10, 14. Vergleiche sie mit den Figuren deines Partners. Hat er die gleichen?

b) Spanne sechs verschiedene Figuren mit dem Umfang 12. Welche Figur ist die größte?

c) Spanne ein Viereck und bestimme seine Flächengröße in Einheitsquadraten. Zeichne dein Viereck auf. Bitte nun deinen Partner, ein gleich großes Viereck zu spannen, ohne dass du ihm dein Viereck zeigst. Vergleicht eure Lösungen!

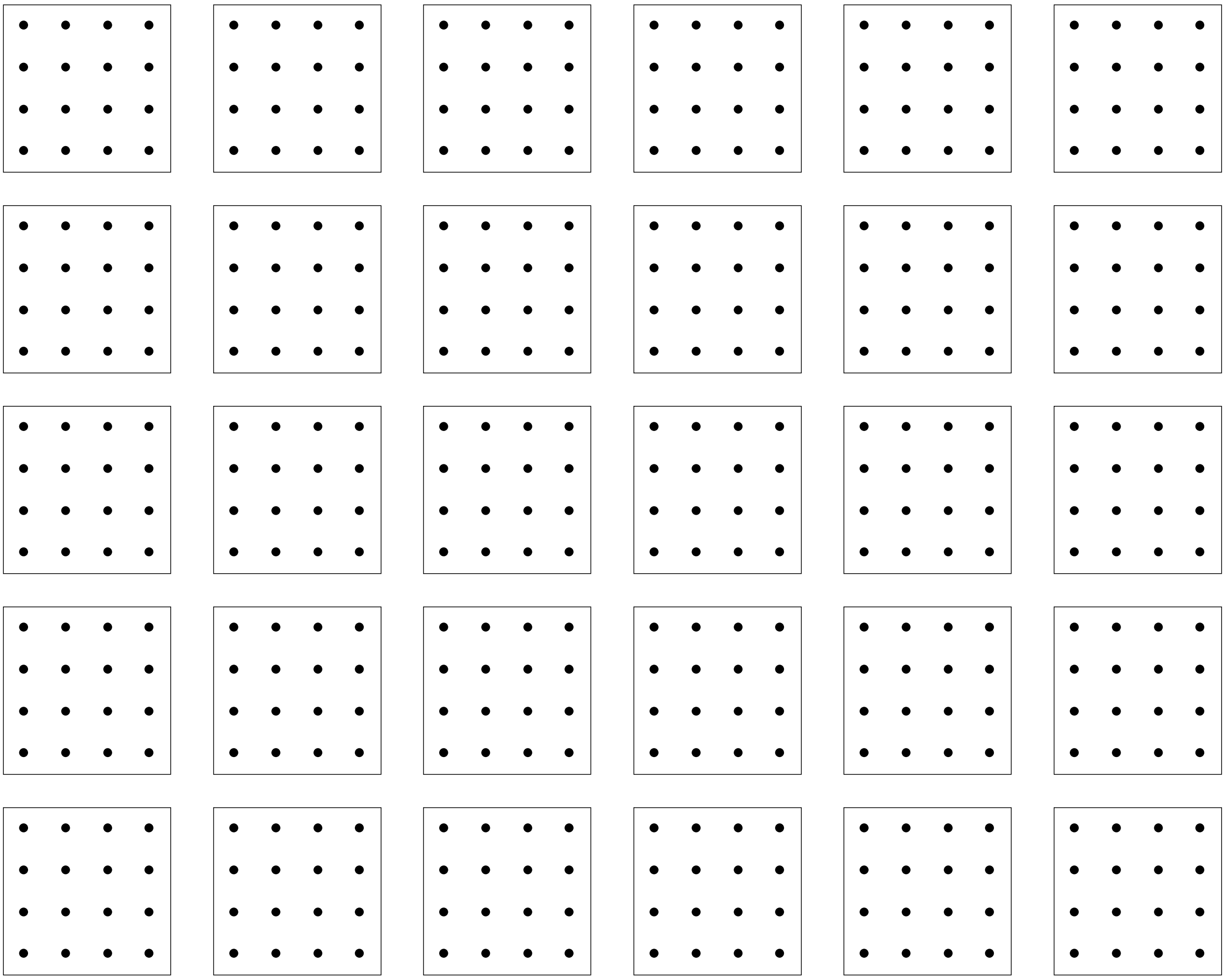
Problemaufgaben

a) Spanne eine Figur, die genau 2 (3,4,...) Nägel einschließt. Suche verschiedene Lösungen.

b) Spanne eine Figur über 5 (6,7...) Nägel, die keinen Nagel einschließt.

c) Spanne das größte Dreieck, das keinen Nagel einschließt.

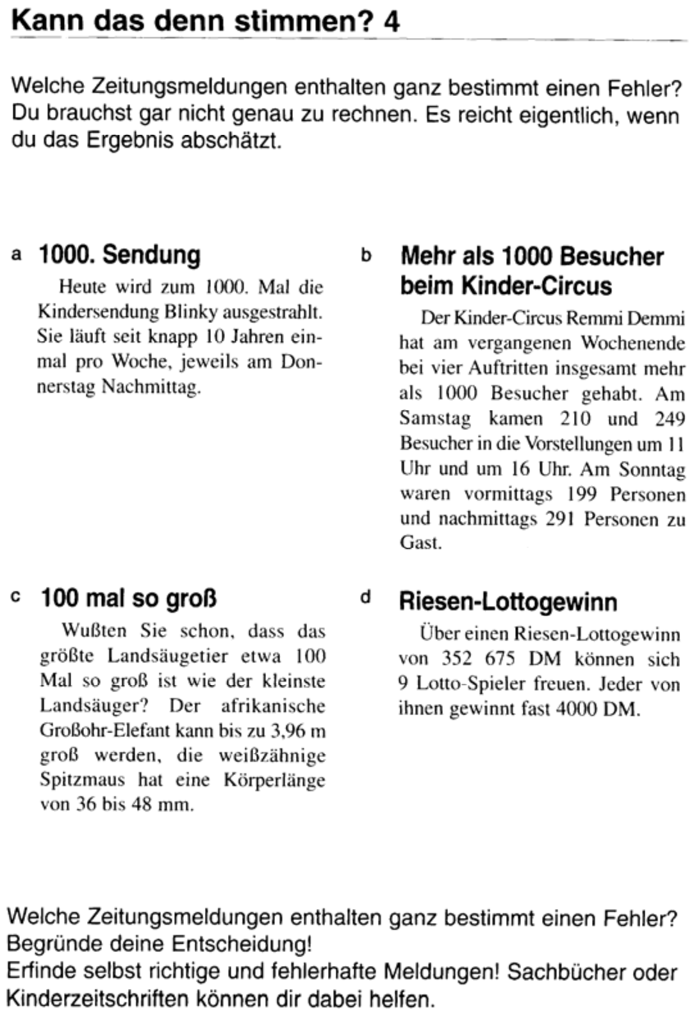
Aktivität 15: Suchen Sie sich selbst Aufgaben aus der Liste heraus. Bearbeiten Sie sie mit Hilfe eines Geobretts (sofern vorhanden) oder zeichnerisch.



Anregung 16: Planen Sie auf dieser Grundlage und mit Hilfe der angegebenen Literaturhinweise Unterrichtssequenzen zum Geobrett, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen angesprochen werden, und tauschen Sie Ihre Erfahrungen aus. Alternativ: Suchen Sie in den Handbüchern zum Mathematikunterricht (Radatz u. a. 1996; 1998; 1999 bzw. Schipper u. a. 2000) oder in Schulbüchern nach anderen geometrischen Problemfeldern, die zum Erforschen, Entdecken und Erklären anregen.

Zeitungsmeldungen im Mathe-Unterricht

Eine Möglichkeit, insbesondere Prozesse des Modellierens anzuregen, besteht in der Auseinandersetzung mit Texten, die sowohl zum Lesen als auch zum Rechnen „verlocken". Solche sind z.B. Gebrauchstexte wie Rezepte, Prospekte, Kassenzettel, Fernsehprogramme, Sachtexte, Lexika, Witze (vgl. dazu Erichson 2003 oder Stadler 1994) oder auch Zeitungsartikel (vgl. Herget & Scholz 1998 oder Katzenbach & Sylvester 1996). Im Rahmen einer „Zeitungsmathematik" sind vielfältige Aktivitäten denkbar, etwa Aufgaben des Typs „Kann das denn stimmen?" (vgl. Selter 1999).



Kann das denn stimmen? 4

Welche Zeitungsmeldungen enthalten ganz bestimmt einen Fehler? Du brauchst gar nicht genau zu rechnen. Es reicht eigentlich, wenn du das Ergebnis abschätzt.

a **1000. Sendung**
Heute wird zum 1000. Mal die Kindersendung Blinky ausgestrahlt. Sie läuft seit knapp 10 Jahren einmal pro Woche, jeweils am Donnerstag Nachmittag.

b **Mehr als 1000 Besucher beim Kinder-Circus**
Der Kinder-Circus Remmi Demmi hat am vergangenen Wochenende bei vier Auftritten insgesamt mehr als 1000 Besucher gehabt. Am Samstag kamen 210 und 249 Besucher in die Vorstellungen um 11 Uhr und um 16 Uhr. Am Sonntag waren vormittags 199 Personen und nachmittags 291 Personen zu Gast.

c **100 mal so groß**
Wußten Sie schon, dass das größte Landsäugetier etwa 100 Mal so groß ist wie der kleinste Landsäuger? Der afrikanische Großohr-Elefant kann bis zu 3,96 m groß werden, die weißzähnige Spitzmaus hat eine Körperlänge von 36 bis 48 mm.

d **Riesen-Lottogewinn**
Über einen Riesen-Lottogewinn von 352 675 DM können sich 9 Lotto-Spieler freuen. Jeder von ihnen gewinnt fast 4000 DM.

Welche Zeitungsmeldungen enthalten ganz bestimmt einen Fehler? Begründe deine Entscheidung!
Erfinde selbst richtige und fehlerhafte Meldungen! Sachbücher oder Kinderzeitschriften können dir dabei helfen.

Eventuell bietet es sich auch an, selbst analoge Texte zu verfassen oder Zeitungsausschnitte als Datenlieferant und als Anlass zum Anfertigen grafischer Darstellungen zu nutzen. Eine weitere Möglichkeit der Auseinandersetzung stellt der Einbezug von lückenhaften Zeitungsmeldungen dar, bei denen die unterhalb des Textes stehenden Zahlenangaben geeignet eingetragen werden müssen.

Hier geht es darum, das Bewusstsein für eine realistische Größenordnung von Zahlenangaben zu schärfen sowie neues Sachwissen zu erwerben. Darüber hinaus können die Kinder dabei mit den verschiedenen Schreib- und Sprachweisen vertraut werden, die zu den unterschiedlichen Verwendungssituationen von Zahlen gehören, und sie korrekt verwenden lernen (vgl. Spiegel & Wenning 1991).

Arbeitskarte 7

Fast __________ **Kinder sehen nach** __________ **Uhr fern.** __________ wurde festgestellt, daß jeden Werktag nach __________ Uhr noch ungefähr __________ Kinder zwischen __________ und __________ Jahren vor dem Fernsehschirm sitzen, an Samstagen sind es sogar __________ . Die Kinder saßen durchschnittlich rund __________ Stunden (__________ Minuten) täglich vor dem Fernsehgerät.

(eineinhalb, sechs, 13, 22, 22, 88, 1987, 200000, 200000, 650000)

<u>Anregung 17:</u> Planen Sie auf dieser Grundlage und mit Hilfe der angegebenen Literaturhinweise Unterrichtssequenzen zu Zeitungsmeldungen, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen angesprochen werden, und tauschen Sie Ihre Erfahrungen aus. Alternativ: Suchen Sie in den Handbüchern zum Mathematikunterricht (Radatz u. a. 1996; 1998; 1999 bzw. Schipper u. a. 2000) oder in Schulbüchern nach anderen Problemfeldern zum Bereich des Sachrechnens, die zum Erforschen, Entdecken und Erklären anregen.

6 Schlussbemerkungen

Ich schließe mit Anmerkungen zu fünf aus meiner Sicht wichtigen Punkten.

Anwendungs- und Strukturorientierung – oder: Zahlen sind interessant

Vermehrt wird in letzter Zeit gefordert, auch in etwas fragwürdigem Bezug auf die Ergebnisse der PISA-Studie, der Mathematikunterricht müsse primär anwendungsorientiert ausgerichtet werden. Mathematik solle vorrangig „Mathematik in *realen* Kontexten“ sein. „Rettet die Mathematik, macht Sachunterricht“, formulierte beispielsweise Jürgen Reichen vor einigen Jahren.

So überbetont die Realitätsferne des Unterrichts – insbesondere wohl in den Sekundarstufen – ausgeprägt (gewesen) sein mag, eine verstärkte lebensweltliche Orientierung wäre nur die halbe Wahrheit: Denn Mathematik ist strukturorientiert und anwendungsorientiert. Der reine und der angewandte Aspekt der Mathematik sind zwei Seiten ein- und derselben Medaille.

Sicherlich sollte Mathematik *Mathematik in Kontexten* sein. Dies sollten aber nicht nur Kontexte *mit*, sondern auch solche *ohne* Wirklichkeitsbezug sein (vgl. Zahlengitter oder schöne Päckchen). Innerhalb solcher substanzieller Kontexte „lassen sich vielfältige Aufgaben zur Erforschung innermathematischer und außermathematischer Muster formulieren. Diese Aufgaben können von unterschiedlichen Voraussetzungen aus und auf verschiedenen Wegen bearbeitet werden, so dass individueller Spielraum für Eigentätigkeit besteht“ (Wittmann 2003, 29).

Aufgaben- und Methodenorientierung – oder: Die Einbettung ist bedeutsam

Man sollte nicht voraussetzen, dass jede gute Aufgabe (vgl. auch Modul 1) zum *Erforschen, Entdecken* und *Erklären* automatisch verständlich ist und alle Schüler(innen) „aus der Sache heraus“ kontinuierlich motiviert an deren Lösung arbeiten. Der methodische Rahmen mathematisch substanzieller Aufgaben muss erst aufgespannt werden.

Hinweise zum Einsatz von Aufgaben zum Entdecken, Erforschen und Erklären im Rahmen eines individualisierenden Unterrichts finden Sie im Modul 8: *Eigenständig lernen – gemeinsam lernen: Heterogene Lerngruppen im Mathematikunterricht* (vgl. auch Verboom 2004).

Besondere Beachtung bedürfen dabei etwa die schlüssige und verständliche Einführung der Aufgabenstellung bzw. der Aufgabenvorschrift anhand wirklich exemplarischer Beispiele mit sinnvoll ausgewähltem Zahlenmaterial, das Bereitstellen von Differenzierungsangeboten, das Vorsehen von Tipps (wenn Schüler(innen) auch nach längerem Nachdenken nicht weiter wissen), die ausreichende Vorbereitung auf mögliche Schwierigkeiten in der Durchführung, das Schaffen von Zieltransparenz für die Schüler(innen) oder die Zurverfügungstellung von angemessen viel Zeit, um die Fragestellungen anhand hinreichend vieler selbst bearbeiteter Beispiele und durch das Nachdenken über deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede wirklich zu durchdringen.

Evident ist, dass dieses umso besser gelingt, je mehr sich auch im Mathematikunterricht eine „Kultur" des Erforschens, Entdeckens und Erklärens entwickeln konnte, je mehr das Beschreiben und Begründen zu einem natürlichen Bestandteil des Unterrichts geworden ist bzw. diese Grundhaltung der Kinder (s. u.) erhalten werden konnte. Förderlich dabei ist sicherlich eine gewisse eigene Begeisterung der Lehrerin für solche Aktivitäten und deren Kompetenz, herausfordernde und ergiebige Aufgaben auszuwählen und aufzubereiten.

Kompetenz- und Defizitorientierung – oder: Kinder sind kompetent

Hilfreich ist zweifelsohne ebenfalls eine positiv-optimistische Grundeinstellung gegenüber dem Denken und Lernen der Kinder. Denn deren sinnvolle Vorgehensweisen, viel versprechende Denkansätze und erstaunliche Arbeitsergebnisse werden oft nicht erkannt, weil die Lehrperson das Vorgehen der Schüler(innen) und deren Äußerungen nicht sensibel genug beobachtet (bzw. dieses in der Hektik des Alltagsgeschäfts nur schwerlich kann) und sie zudem unfertiges oder ihr nicht auf Anhieb verständliches Denken als fehlerhaft oder defizitär ansieht.

Ich denke, es ist gut sich zu vergegenwärtigen, dass man die Äußerungen und das Verhalten von Kindern idealtypischer Weise auf zweierlei Arten wahrnehmen, interpretieren und bewerten kann (vgl. Selter & Spiegel 2003):

- *einerseits defizitorientiert*, also vorrangig auf der Suche nach Fehlern und Unzulänglichkeiten oder
- *andererseits kompentenzorientiert*, also primär mit Blick auf vorhandene Fähigkeiten und Entwicklungs-Potenziale.

Es zahlt sich für Erwachsene wie für Kinder – oder allgemein für Wissende und für Lernende – aus, wenn sich die Wissenden um eine kompetenzorientierte Sichtweise bemühen und auch die kleinen Erfolge und Fortschritte der Lernenden sehen und anerkennen, statt von ihnen mit Blick auf Idealzielsetzungen zu schnell zu viel zu verlangen.

Produkt- und Prozessorientierung –
oder: Leistung ist mehr als richtig oder falsch

Mathematikaufgaben, durch die Leistungen von Schülerinnen und Schülern festgestellt und beurteilt werden sollen, sind vorwiegend produktorientiert: Vor allem richtige Lösungen sind gefragt. Damit gehen zwei große Nachteile einher.

Erstens werden lediglich Resultate erhoben, und es wird kaum etwas über die Lösungsstrategien ausgesagt, so dass es vielfach nicht möglich ist, Stärken und Schwächen der einzelnen Kinder differenziert zu beurteilen. Zweitens sind das Einsatzgebiet und die Aussagekraft solcher Aufgaben stark eingeschränkt, denn sie sind begrenzt auf solche Inhalte, die leicht abgeprüft werden können, und daher nicht geeignet, um prozessbezogene Kompetenzen zu erheben.

Insofern müssen in nächster Zukunft offenere Formen der Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung den Mathematikunterricht in der Grundschule bereichern, die dem in diesem Papier zum Ausdruck kommenden Verständnis von Mathematik und Mathematikunterricht besser nachkommen, als es etwa die klassische Mathematikarbeit leisten kann (vgl. auch Sundermann & Selter i. V.). Näheres hierzu können Sie im Modul 9 nachlesen: *Lernen begleiten – Lernerfolg beurteilen: Leistung im Mathematikunterricht*.

Fach- und Kindorientierung –
oder: Kinder sind Entdecker

Beim Studium dieses Beitrags könnte der Eindruck entstehen, als ob der aktive Zugang zur Mathematik vorrangig aufgrund eines anderen Verständnisses dessen favorisiert wird, was Mathematik ist. Nicht explizit erwähnt, aber nicht minder relevant ist selbstverständlich auch das gewandelte Verständnis des lernenden Kindes.

Denn es kann als grundlegende Erkenntnis fachdidaktischer, psychologischer und pädagogischer Forschung gelten, dass Lernen nicht als Übernahme von fertigem Wissen, sondern als ein stets aktiver, konstruktiver, individueller Prozess stattfindet. Kinder sind Entdecker – auch in Mathematik. Eine verstärkte Berücksichtigung prozessbezogener Kompetenzen ist somit nicht nur aus fach-, sondern auch aus kindorientierter Perspektive erforderlich.

<u>Anregung 18:</u> Senden Sie mir Ihre Erfahrungen aus der Arbeit mit dieser Modulbeschreibung und Anregungen zu deren Weiterentwicklung (christoph.selter@t-online.de). Herzlichen Dank.

Verwendete Literatur

Devlin, Keith (1998). *Muster der Mathematik*. Heidelberg: Springer.

Dröge, Rotraud (1995). Zehn Gebote für einen schülerorientierten Sachrechenunterricht. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe* (9), 413-423.

Enzensberger, Hans Magnus (1997). *Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben*. München-Wien: Hanser.

Erichson, Christa (2003). *Von Giganten, Medaillen und einem regen Wurm. Geschichten, mit denen man rechnen muss*. Hamburg: Verlag für Pädagogische Medien.

Freudenthal, Hans (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. *Grundschule* (4), 140-142.

Herget, Wilfried & Dietmar Scholz (1998). *Die etwas andere Aufgabe - aus der Zeitung*. Seelze: Kallmeyer.

Höhtker, Barbara & Christoph Selter (1995). Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl. In: Gerhard N. Müller & Erich Ch. Wittmann (Hg.): *Mit Kindern rechnen*. Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule, 122-134.

Kästner, Anja (1997). Schüler als Schulbuchautoren. *Die Grundschulzeitschrift* (110), 16-18.

Katzenbach, Michael & Thomas Sylvester (Mod., 1996). Mathematik aus der Zeitung. *mathematik lehren* (74)

Keller, Karl-Heinz (2002). *Am Geo-Brett Geometrie entdecken. Ein Grundkurs in Geometrie*. Offenburg: Mildenberger.

KMK (Kultusminister-Konferenz; 2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik (Klasse 4). Fassung vom Juli 2004, vgl. Modul 3.

Krauthausen, Günter (1998). Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht der Grundschule. *Die Grundschulzeitschrift* (119), 54 - 61.

Metzner, Werner (1991). Das Zauberdreieck. Düsseldorf: Klett.

Moor, Ed de (1980). *Wiskobas bulletin. Leerplanpublikatie 11*. Utrecht: IOWO.

Radatz, Hendrik, Wilhelm Schipper, Rotraut Dröge & Astrid Ebeling (1996; 1998; 1999). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. *1. (2., 3.) Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Rickmeyer, Knut (2000). Dreiecke auf dem Geobrett. *Mathematische Unterrichtspraxis* (1), 20-30.

Röhr, Martina (1999). Kooperation im Mathematikunterricht - Erfahrungen mit einem Konzept nach drei Jahren Erprobung. In: Christoph Selter & Gerd Walther (Hg.): *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann*. Leipzig: Klett, 159 - 169.

Schipper, Wilhelm, Rotraud Dröge & Astrid Ebeling (2000). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. 4. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Schreier, Helmut (2004). Erforschen, Entdecken, Erklären. Modul 2 des Programms Sinus-Transfer-Grundschule für die Naturwissenschaften. Kiel: IPN.

Schwätzer, Ulrich & Christoph Selter (1998). Summen von Reihenfolgezahlen - Vorgehensweisen von Viertkläßlern bei einem arithmetisch substantiellen Problemfeld. *Journal für Mathematikdidaktik* 19 (2/3), 123-148.

Selter, Christoph (1999). Geschickt rechnen – schätzend rechnen. *Die Grundschulzeitschrift* (125), 23-38 (Materialteil).

Selter, Christoph (2002). Was heißt eigentlich 'rechnen lernen'? Ein Diskussionsbeitrag zum Thema 'Tragfähige Grundlagen Arithmetik'. In: Böttcher, Wolfgang & Peter E. Kalb (Hg.): *Kerncurriculum. Was Kinder in der Grundschule lernen sollen*. Weinheim: Beltz, S. 169 – 197.

Selter, Christoph (2004). Zahlengitter – eine Ausgangsaufgabe, viele Variationen. *Die Grundschulzeitschrift* (177), S. 42-45.

Spiegel, Hartmut & Andrea Wenning (1991). Lückenhafte Zeitungsmeldungen – Sachmathematik einmal anders. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe* (3), 114-116 und 125-129.

Spiegel, Hartmut & Christoph Selter (2003). *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.

Stadler, Christine (1994). Rekorde, Höchstleistungen, Kurioses. *Die Grundschulzeitschrift* (74), 47-54 (Materialteil)

Steibl, Horst (1976). *Geo-Brett im Unterricht*. Göttingen: Kallmeyer.

Sundermann, Beate & Christoph Selter (i. V.). *Mathematikarbeiten*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Verboom, Lilo (2004, Mod.). Üben und Entdecken (Themenheft). *Grundschulzeitschrift* (177).

Wheeler, David (1970, Hrsg.). *Modelle für den Mathematikunterricht in der Grundschule*. Stuttgart: Klett.

Winter, Heinrich (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (3), 106-116.

Wittmann, Erich (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, Erich Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht in der Grundschule? In: Monika Baum & Hans Wielpütz (Hg.): *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch*. Seelze: Kallmeyer, 18-46.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (2000). *Das Zahlenbuch*. 1. Schuljahr. Lehrerband. Stuttgart: Klett.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (2002/2004). *Das kleine Zahlenbuch* (2 Bände). Seelze: Kallmeyer.

Lese- und Arbeits-Empfehlungen zum Thema

- Spiegel & Selter (2003), Kapitel 5
- Verboom (2004)
- www.mathe-projekt.ch (eine Fülle von Praxisberichten)

Weitere Literaturhinweise zum Mathematikmodul G2 „Entdecken, Erforschen, Erklären“

• Spiegel, H. & Selter, CH. (2003). Mathematik ist keine bittere Medizin. Was eine Münzreihe und Lotto miteinander zu tun haben. In: H. Spiegel & Ch. Selter, Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten (S.44-59) Seelze: Kallmeyer.

• Wittmann, E. CH. (2004). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule. In: M. Baum & H. Wielpütz, Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch (S.18-46). Seelze: Kallmeyer.

Anhang 1: Aufbau einer möglichen Unterrichtsstunde

Thema:

„Wie viele 3·3-Zahlengitter findest du?" – Kennenlernen des 3·3-Zahlengitters sowie Anbahnung erster Einsichten in Strukturzusammenhänge im Rahmen der übergeordneten Zielsetzung, die Zielzahlen 20 bzw. 22 zu erreichen

Zielsetzung:

Die Schüler(innen) sollen alle Zahlengitter finden, die die Zielzahlen 20 bzw. 22 aufweisen, und deren Vollständigkeit begründen sowie erste Einsichten in Auffälligkeiten formulieren.

Dabei ergeben sich folgende **übergeordnete Aufgaben:**

Die Schüler(innen) …

- lernen die Aufgabenvorschrift für das Zahlengitter kennen und wenden diese bei ausgewählten Beispielaufgaben an *(TA 1),*
- erfassen die Problemstellung, indem sie erste Lösungsansätze erproben (*TA 2),*
- nähern sich Lösungen, indem sie Vermutungen über mögliche Pluszahlen äußern *(TA 3),*
- wenden ihre Kopfrechenfertigkeiten im Bereich der Addition im Zahlenraum bis 20 (und ggf. darüber hinaus) an und wiederholen diese *(TA 4),*
- entwickeln zumindest ansatzweise Vorgehensweisen (operative Variation der Pluszahlen oder rückwärtiges Vorgehen) bzw. Darstellungsmöglichkeiten (Ordnen nach der Größe der Pluszahlen), die es ermöglichen, *alle* Lösungen zu ermitteln und deren Vollständigkeit zu begründen *(TA 5),*
- setzen sich kreativ mit der Aufgabe auseinander, indem sie auf differenzierten Anspruchsniveaus eigene Lösungs*wege* entwickeln und dazu ggf. das Differenzierungsmaterial nutzen (*TA 6),*
- kooperieren ggf. mit ihrem Partner, indem sie sich über gefundene Möglichkeiten, gegangene Lösungswege oder beobachtete Auffälligkeiten austauschen *(TA 7),*
- üben sich im Argumentieren, Verbalisieren und Darstellen mathematischer Strukturzusammenhänge, indem sie ihre Lösungswege präsentieren und diskutieren *(TA 8).*

Stundenverlaufsplan

1. Einführung	
Handlungsschritte	Kurzkommentar
1.1 L. stellt am Beispiel (+2; +5) die Aufgabenvorschrift vor und führt die Begriffe Startzahl, Zielzahl, linke bzw. obere Pluszahl ein.	Sitzhalbkreis vor der Tafel Mat.: vorbereitetes Plakat (vgl. Tafelbild 1)
1.2 Zwei Sch. wenden diese bei den Beispielen (+8; +8) und (+5; +2) an der Tafel an. Mitsch. achten auf Einhalten der Regeln und richtiges Rechnen.	Werte der Pluszahlen wurden so gewählt, dass deutlich werden kann, dass auch zwei gleiche Pluszahlen möglich sind und dass die Pluszahl-Paare (+a; +b) bzw. (+b; +a) zu verschiedenen Zahlengittern gehören. Mat.: vorbereitete Zahlengitter (vgl. Tafelbild 1)

Ergebnis

Die Rechenvorschrift wurde eingeführt, die Sch. haben sie an ausgewählten Beispielen nachvollzogen *(TA 1).*

2. Problemstellung	
Handlungsschritte	Kurzkommentar
2.1 L. formuliert die Aufgabenstellung, möglichst viele Pluszahl-Paare zu finden, die zur Zielzahl 20 führen. Sch. äußern erste Vermutungen, mit welchen Pluszahlen dieses möglicher Weise funktioniert.	Sitzhalbkreis vor der Tafel Mat.: Plakat „Zielzahl 20" Ein oder zwei der hier geäußerten Beispiele dienen der besseren Verständlichkeit der Problemstellung und werden in eine Tabelle (vgl. Tafelbild 1) eingetragen.
2.2 L. regt im Rahmen des 'Forscherauftrages' zu systematischem Vorgehen an, stellt die Arbeitsblätter (AB 1, 2) sowie das Differenzierungsangebot (AB 3, 4) vor und verweist auf abschließende Sammlungs- und Reflexionsphase.	Die Sch. sollen sowohl über *Zieltransparenz* (z. B. Was sind die Ziele meiner Arbeit? Welche Produkte (hier: Aufstellung der Möglichkeiten, beschreibender Text) werden erwartet?) und *Prozesstransparenz* verfügen können (z. B. Was ist der ungefähre Zeitrahmen für einzelne Aufgaben? Welche Materialien (hier: Arbeitsblätter, Tafelplakate) werden verwendet?)

Ergebnis

Die Schüler haben die Problemstellung verstanden und formulieren erste Vermutungen über mögliche Pluszahlen für die Zielzahl 20. Der Inhalt ist in für die Kinder einsichtige, miteinander verknüpfte Unterrichtsschritte strukturiert worden. Das Problembewusstsein wurde geweckt und die Kinder sind motiviert, die Aufgabe zu lösen *(TA 2, 3).*

3. Problembearbeitung	
Handlungsschritte	Kurzkommentar
3.1 Sch. suchen Zahlengitter mit Zielzahl 20 (AB 1).	Partnerarbeit wird empfohlen, es ist aber auch Einzelarbeit möglich. L. leistet – falls nötig - gezielt Hilfestellung und macht ggf. auf die Differenzierungsangebote aufmerksam.
3.2 Sch. entwickeln ggf. Begründungen dafür, dass es keine weiteren als die von ihnen gefundenen Möglichkeiten gibt.	Von den Sch. möglicherweise eingeschlagene andere Wege (Verwendung von Brüchen, negativen Zahlen, Subtraktion von Zahlen, ...) werden gewürdigt. Es wird aber auch herausgestellt, dass nur natürliche Zahlen (inklusive 0) als Pluszahlen zugelassen sind.

3.3 Im Rahmen des Differenzierungsangebots befassen sich Schüler(innen) mit der Übertragung der Aufgabenstellung auf die Zielzahl 22 (AB 2) sowie ggf. auf eine selbst gewählte Zielzahl kleiner gleich 30 (AB 3).	Damit die Schüler zum Einen leichter Beziehungen zu der Anzahl der Möglichkeiten bei den Zielzahlen 20 und 22 herstellen können und sich zum Anderen in dieser Stunde nicht mit Zielzahlen wie 1000 oder 1000000 auseinandersetzen, sondern überschaubare Anzahlen von Pluszahl-Paaren erhalten, erfolgt eine Eingrenzung des Zahlenraums.

Ergebnis

Die Sch. haben Lösungsmöglichkeiten gefunden, sich dabei kreativ mit der Aufgabenstellung auseinandergesetzt und sich über ihre Vorgehensweisen ausgetauscht *(TA 4, 5, 6, i. d. R. 7).*

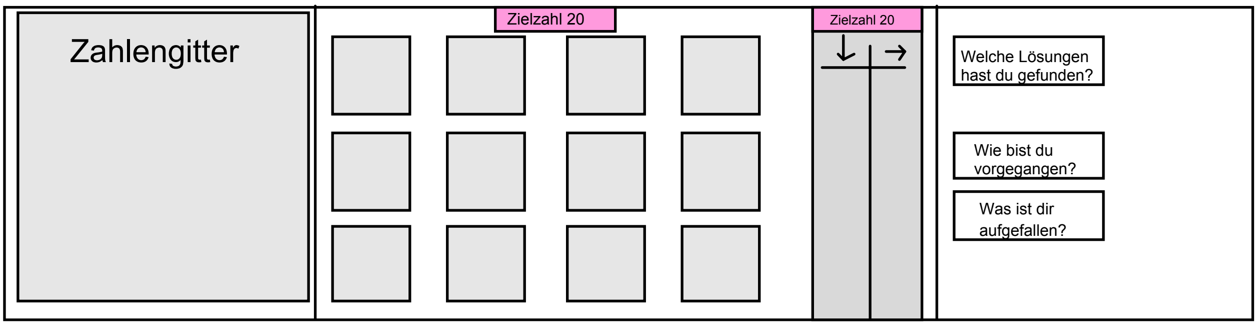
4. Reflexion	
Handlungsschritte	Kurzkommentar
4.1 Sch. tragen alle Lösungen zur Zielzahl 20 an der Tafel zusammen. Bevor ein Kind seine Lösung notiert, wird im Klassenverband geklärt, ob es sich um eine neue Lösung handelt.	Sitzhalbkreis vor der Tafel Mat.: vorbereitete Zahlengitter, Tabelle für Zielzahl 20 (vgl. Tafelbild 2)
4.2 Sch. geben ihre Begründungen dafür an, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt. Hierzu ordnen sie die gefundenen Zahlengitter und tragen sie in die tabellarische Übersicht auf variabel umzuordnenden Kärtchen ein. Hierbei benennen sie auch Unterschiede und Gemeinsamkeiten im Vergleich der verschiedenen Zahlengitter mit der Zielzahl 20. Die entsprechenden Passagen der Forscherberichte werden herangezogen und gewürdigt.	Für den Fall, dass die Sch. die Idee des Ordnens nicht ins Spiel bringen, regt L. sie dazu an. Die Kinder fahren dann analog fort und erhalten somit die Gelegenheit, selbsttätig weitere Zusammenhänge zwischen den einzelnen Zahlengittern zu entdecken. Mat.: Plakat mit Forscherfragen (vgl. Tafelbild 2)
4.3 Sch., die sich mit Zahlengittern mit der Zielzahl 22 befasst haben, tragen die entsprechenden Pluszahl-Paare analog in einer tabellarischen Übersicht ein. Auch hier werden (mit Hilfe der Forscherberichte) Auffälligkeiten formuliert. Ggf. werden noch Entdeckungen thematisiert oder allgemeinere Einsichten formuliert, die die Sch. mit Hilfe von Zahlengittern mit anderen Zielzahlen herausgefunden haben.	Auch wenn sich vermutlich nicht alle Sch. mit diesen Problemstellungen befasst haben, sollen diese am Ende der Stunde thematisiert werden. Die schneller arbeitenden Sch. erhalten die Gelegenheit, ihre Arbeit vorzustellen und können als „Experten" den anderen Kindern Anregungen zum Weiterdenken geben. Dabei erweist es sich als hilfreich, dass das Differenzierungsangebot in engem Zusammenhang mit der eigentlichen Aufgabenstellung (Zielzahl 20) steht. Mat.: Tabelle für Zielzahl 22 (vgl. Tafelbild 2) Aufgrund des Zeitfaktors kann die Reflexion über diese Fragestellung auch entfallen und dann den Einstieg für die Folgestunde darstellen.

Ergebnis

Der Lernerfolg wurde durch die Würdigung und Sicherung der Ergebnisse erfahrbar gemacht. Die Kinder haben sich in ihrer Argumentations- und Darstellungsfähigkeit geschult und die Struktur der Zahlengitter durch das Erarbeiten von Beziehungen zwischen Zahlen zunehmend systematischer reflektiert *(TA 8).*

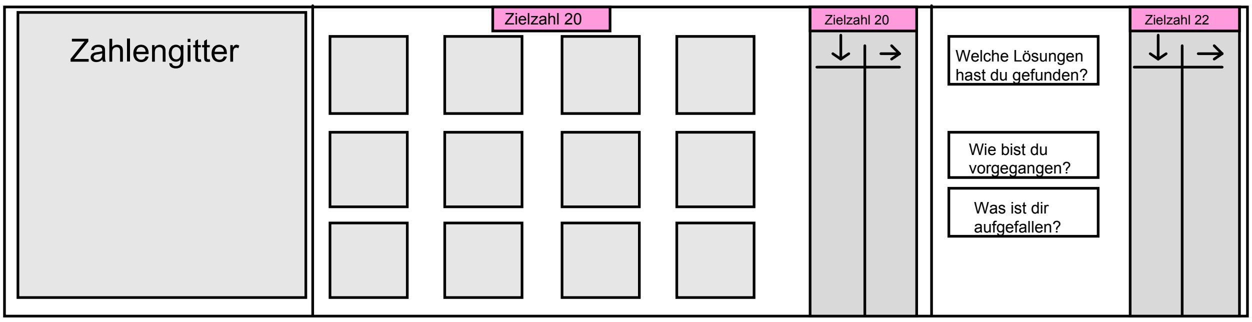
Tafelbilder

- Tafelbild nach Einführung und Problemstellung



((Plakat zur Einführung)) ((Zahlengitter zum Eintragen, einige ausgefüllt)) ((Tabelle 20, mit ein oder zwei Beispielen)) ((Forscher-fragen))

- Tafelbild am Ende der Reflexionsphase



((Plakat zur Einführung)) ((Zahlengitter zum Eintragen, ausgefüllt und geordnet)) ((Tabelle 20, ausgefüllt und geordnet)) ((Forscher-fragen)) ((ggf. Tabelle 22, ausgefüllt und geordnet))

Anhang 2: Aufgabenbeispiele – für Kinder und für Lehrpersonen

A Entscheiden Sie sich für eine der folgenden fünf Aufgabenstellungen. Bearbeiten Sie die jeweils unter 1. genannte(n) Aufgabe(n). Welche Maßnahmen der Individualisierung könnten im Unterricht sinnvoll sein (Materialeinsatz, Variation der Aufgabendarbietung bzw. Problemstellung, …)?

B Bearbeiten Sie die jeweils unter 2. genannte(n) Aufgabe(n) und erarbeiten Sie sich den mathematischen Hintergrund, indem Sie selbst weitere Probleme stellen, Auffälligkeiten entdecken, Zusammenhänge beschreiben und begründen. Dabei erweisen sich (verfrüht verwendete) Variablen und Formeln häufig als Verständniskiller.

C Erfinden Sie Variationen / Erweiterungen der o. a. Aufgabenstellungen für Kinder, auch für die Klassen 3/4. Wie könnte man die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen „auffangen"? Welche Schwierigkeiten könnten sich ergeben? Wie könnte man damit umgehen?

D Bereiten Sie eine etwa 10minütige Präsentation Ihrer Ergebnisse vor.

Zahlenketten

Es werden zwei Zahlen („Startzahlen") nebeneinander geschrieben und rechts daneben deren Summe. Daneben notiert man die Summe aus der 2. und der 3. Zahl als vierte Zahl („Zielzahl"), also z.B.

1 10 11 **21** oder 8 4 12 **16**

1 Beispiele für Aufgaben für Kinder

1.1 Die fehlenden Zahlen ergänzen.

2 3 5 __ /// 3 __ 7 11

1.2 Zahlenketten mit der Zielzahl 20 finden.

2 Beispiele für Aufgaben für Erwachsene

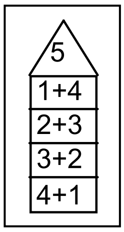
2.1 Welche Zahl fehlt in den Fünferketten?

12 33 45 78 __ /// 22 __ 35 48 83

2.2 Finden Sie alle Fünferketten mit der Zielzahl 100! Warum haben Sie alle gefunden? Was fällt Ihnen auf?

Zahlzerlegungen

Die Grundaufgabe der Zahlenhäuser dürfte bekannt sein (siehe rechts). Die Null wird als Summand nicht zugelassen. Die Reihenfolge spielt eine Rolle; 1+4 ist also etwas anderes als 4+1.



1 Beispiele für Aufgaben für Kinder

1.1 Alle Stockwerke des Sechserhauses finden.

1.2 Das Vierer-, das Fünfer- und das Sechserhaus nebeneinander betrachten und Auffälligkeiten beschreiben.

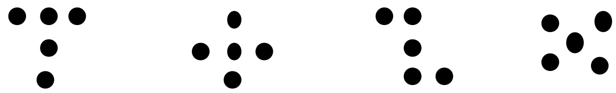
2 Beispiele für Aufgaben für Erwachsene

2.1 Wie viele Stockwerke gibt es im Tausenderhaus? Warum?

6. Für die 4 gibt es drei Zweiersummen, drei Dreiersummen (2+1+1; 1+2+1; 1+1+2) sowie eine Viersumme (1+1+1+1), insgesamt also sieben Zerlegungen. Betrachten Sie andere Zahlen aus dem Zahlenraum bis 10. Was fällt Ihnen auf?

Plättchenmuster

Mit Hilfe von Plättchen kann man durch Muster Zahlen darstellen. Hier sind vier verschiedene Darstellungen für die Zahl 5.



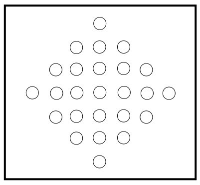
Man kann aber auch Aufgaben legen, wie am Beispiel von Zahlzerlegungen der 7 deutlich wird.

1 Beispiele für Aufgaben für Kinder

1.1 Für die 6 verschiedene Muster finden.

1.2 Auf verschiedene Arten die Zahl 9 additiv zerlegen.

2 Beispiele für Aufgaben für Erwachsene



7. Aus wie vielen Plättchen besteht diese Figur? Bestimmen Sie die Anzahl auf möglichst viele verschiedene Weisen!
8. Aus wie vielen Plättchen besteht die nächstkleinere bzw. die -größere Figur dieser Bauart?

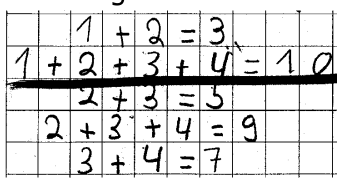
Reihenfolgezahlen

Reihenfolgezahlen sind aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, also etwa 1, 2, 3 oder 77, 78, 79, 80 oder 12, 13. Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen sind demzufolge Summen aufeinanderfolgender Zahlen, also etwa 1+2+3 oder 77+78+79+80 oder 12+13. Die Null ist als Summand hier nicht zugelassen; die Ordnung der Summanden erfolgt von klein nach groß.

1 Beispiele für Aufgaben für Kinder

1.1 Summen von Reihenfolgezahlen finden mit Ergebnis kleiner 20.

1.2 Einzelne Aufgaben miteinander vergleichen.



2 Beispiele für Aufgaben für Erwachsene

2.1 Finden Sie alle Summen von Reihenfolgezahlen für die Zahlen von 1 bis 30.

2.2 Was fällt Ihnen auf?

Päckchen zum Weiterrechnen

Die Aufgabenform dürfte wohl auch bekannt sein. Es wird ein Päckchen mit beispielsweise sechs Aufgaben vorgegeben. Die erste Aufgabe wird ausgerechnet. Das Ergebnis ist die erste Zahl einer weiteren Aufgabe usw. Die Zielzahl wird zur Kontrolle vorgegeben.

1 Beispiele für Aufgaben für Kinder

1.1 Päckchen ausrechnen (hier aus Platzgründen nebeneinander):

1. 70-20=____; 2. 38+13=____; 3. 88+12=____; 4. 5. 50+38=___; 5. 100-62=____ Zielzahl

1.2 Selbst ein Päckchen zum Weiterrechnen erfinden

2 Beispiele für Aufgaben für Erwachsene

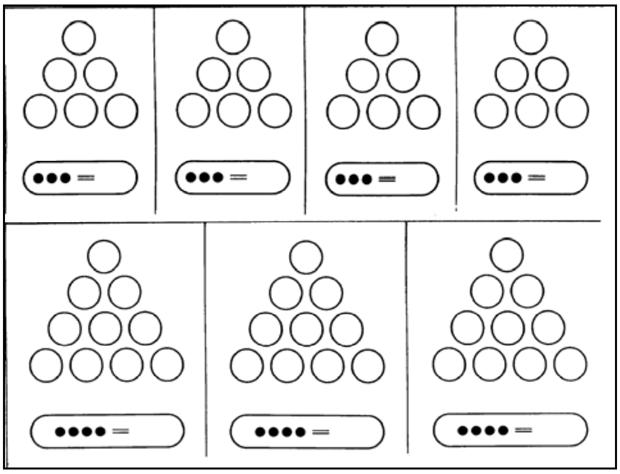
2.1 Geordnete Päckchen zum Weiterrechnen. Subtrahieren Sie von einer Zahl des Tausenderraums (Startzahl) zunächst die 10, vom Ergebnis die 30, von dem Resultat die 50 usw., also z. B. 420-10=410; 410-30=380; 380-50=330; 330-70=260; 260-90=170; 170-110=60 (60-130=-70, daher Abbruch). Die 420 ist hier die Start-, die 60 die Zielzahl. Rechen Sie einige Beispiele.

2.2 Bei welchen Startzahlen erreichen Sie genau die 0 als Zielzahl? Was ist die größte Zielzahl, die sie mit einer Startzahl des Tausenderraums erreichen können?

Anhang 3: Variationen rund um das Zauberdreieck

Zum Zauberdreieck (Metzner 1991) gehören ein Spielbrett, zehn Spielsteine mit den Zahlen von 1 bis 10 sowie diverse Aufgabenkarten. Die Regel lautet: „Mache alle Seiten gleich!"

Beim Mini-Zauberdreieck sind von den zehn Spielsteinen sechs so in das Mini-Zauberdreieck, dass die Summe aus den drei Zahlen jeder Seite gleich groß ist. Beim großen Zauberdreieck sollen alle zehn Spielsteine so in das große Zauberdreieck gesetzt werden, dass die Summe aus den vier Zahlen jeder Seite gleich groß ist. Der Stein in der Mitte bleibt bei den Rechnungen unberücksichtigt und kann zur Seite gelegt werden.



Variationen von Aufgabenstellungen für das Mini-Zauberdreieck

1. Drei Eckzahlen und die Seitensumme sind vorgegeben (s.o.)

- Wie viele Lösungen findest du?
- Welche Seitensummen sind möglich?
- Welche ist die kleinste/größte Seitensumme?

- Warum ist die 8 nicht möglich?
- Warum ist die 14 nicht möglich?

  Setze die drei Ecksteine auf die Mitte der Seiten:
- Welche Seitensummen sind möglich?
- Welche ist die kleinste/größte Seitensumme?
- Warum ist die Seitensumme 10 nicht möglich?
- Warum wachsen die Seitensummen immer um 2?

2. Drei Zahlen und die Seitensumme sind vorgegeben.
3. Vier Zahlen, davon drei an einer Seite sind vorgegeben.
4. Zwei Zahlen und die Seitensumme sind vorgegeben.
5. Von jeder Seite ist nur die mittlere Zahl und die Seitensumme vorgegeben.
9. Von zwei Seiten sind zwei Zahlen und von der 3. Seite eine Zahl vorgegeben.
10.

Analog lassen sich vielfältige Aufgabenstellungen für das große Zauberdreieck entwickeln.

Anhang 4: Zahlen untersuchen lernen – ein Beispiel (Verboom 2004)

Spiegelaufgaben

Das sind besondere Minusaufgaben.
Man nennt sie Spiegelaufgaben.

853	691	716
-358	-196	-617

a) Was fällt dir auf, wenn du die beiden Zahlen in einer Aufgabe miteinander vergleichst.

b) Bilde selbst noch einige Spiegelaufgaben in deinem Heft und rechne sie aus. Vielleicht stellst du schon etwas bei den Ergebnissen fest.

a) Rechne diese Spielaufgaben aus.

642	781	382	941	613	843	634	970	871
-246	-187	-283	-149	-316	-348	-436	- 79	-178

b) Sortiere die Ergebnisse nach der Größe.

c) Vergleiche die Ergebnisse miteinander.
Versuche die Sätze in der Beschreibung zu vervollständigen.

Besonderes bei den Ergebnissen von Spiegelaufgaben:

1 An der Zehnerstelle ______
2 Die Hunderter werden immer ______
3 Die Einer ______
4 Die Quersumme ______
5 Die Ergebnisse werden immer um __ größer.
6

Partner des Programms SINUS-Transfer Grundschule

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS-Transfer Grundschule
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-grundschule.de

Programmkoordination für die Länder durch das Ministerium für Bildung und Frauen des Landes Schleswig-Holstein (MBF)
MR Werner Klein (SINUS-Transfer Grundschule)
http://landesregierung.schleswig-holstein.de

Landeskoordinatorenausbildung durch das Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
StD Christoph Hammer; gemeinsam mit dem IPN
www.isb.bayern.de

Serverbetreuung: Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts der Universität Bayreuth (Z-MNU)
Leitung: Prof. Dr. Peter Baptist
http://zmnu.uni-bayreuth.de

Hinweis: Die Modulbeschreibungen sind während der Laufzeit des Programms SINUS-Transfer Grundschule (2004-2009) entstanden.
Die Liste der Kooperationspartner galt für diesen Zeitraum. Im Nachfolgeprogramm *SINUS an Grundschulen* sind die Kooperationen anders strukturiert.

ISBN für diese Modulbeschreibung (Mathematik G2)
978-3-89088-181-2