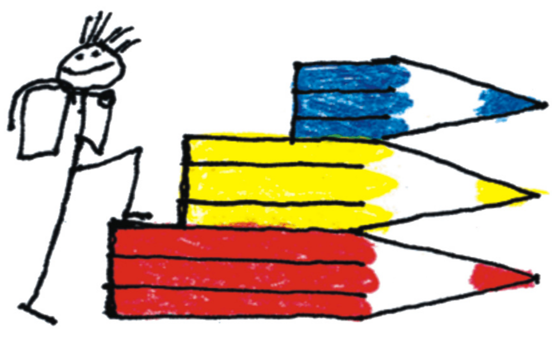
Modulbeschreibungen des Programms SINUS-Transfer Grundschule

SINUS-Transfer

Übergänge gestalten

Andrea Peter-Koop
Klaus Hasemann
Joost Klep



Grundschule

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

G10

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Impressum

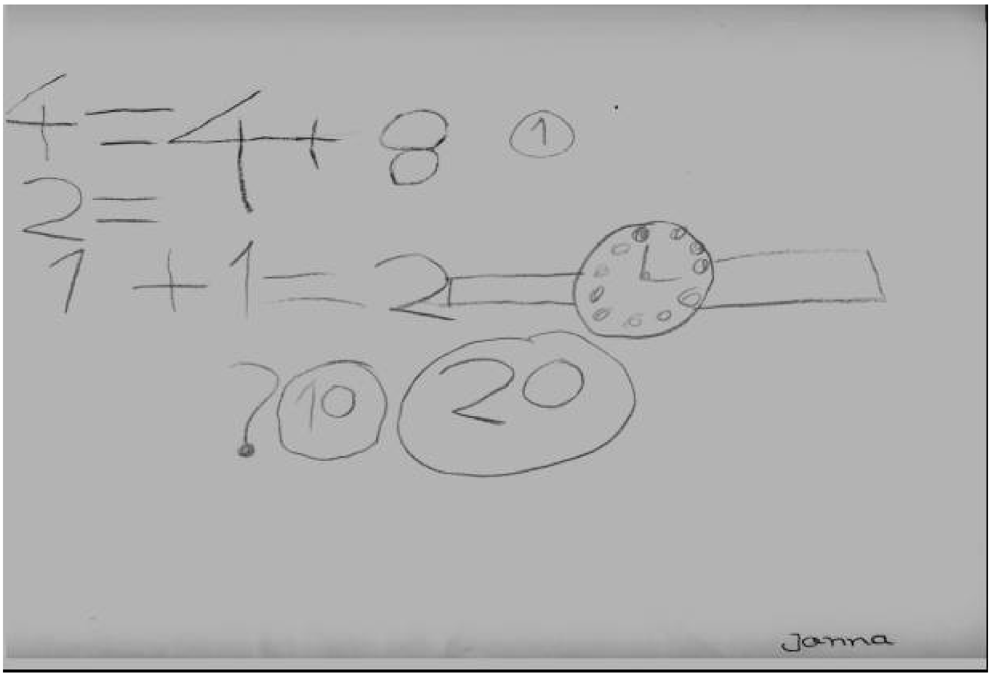
Andrea Peter-Koop, Klaus Hasemann, Joost Klep
Übergänge gestalten

Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de

Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation: Dr. Kirstin Lobemeier
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-189-8

Nutzungsbedingungen



Janna (5 Jahre) zeichnet ein Bild zum Thema Mathematik und kommentiert:

„Fragezeichen, 10 Cent, 20 Cent, Rechensachen und eine Uhr, weil man mit Geld ganz toll rechnen kann, Armbanduhr 3 Uhr, zum Zeit ablesen nicht zum rechnen.“

„Ob Kindergarten, Grundschule oder Gymnasium,
die Übergänge zwischen den Bildungsstationen sind
in Deutschland eher Bruchstellen als Brücken."

(Die ZEIT Nr. 24 vom 9. Juni 2005, S. 79)

1. Einleitung

Die Grundschule hat die Aufgabe zwei wesentliche Übergänge zu gestalten, nämlich den der Aufnahme (Einschulung) aus dem Elternhaus oder einer Kindertageseinrichtung und den der Abgabe an eine weiterführende Schule. Diese Übergänge betreffen alle Kinder. Daneben gibt es weitere Übergänge in Einzelfällen, wie z.B. bei der Überleitung in eine Fördereinrichtung oder bei einer Klassenwiederholung, die besondere Aufmerksamkeit verdienen.

Für die Kinder sind die Übergänge „kritische" Lebensereignisse, die mit einem Wechsel des Lebensumfelds, neuen Aufgaben und Erwartungen und einem Rollenwechsel verbunden sind und bewältigt werden müssen. Aus der Sicht des Bildungssystems markieren Übergänge „kritische" Entscheidungssituationen. Die Kinder werden pädagogischen Einrichtungen zugeordnet bzw. bestimmten Entscheidungen (z.B. auf Rückstellung von der Einschulung, sonderpädagogischen Förderbedarf oder Klassenwiederholung) ausgesetzt. Bemerkenswert ist, dass die Einrichtungen an den Schnittstellen häufig nicht in notwendigem und erwünschten Maß kooperieren und dass es kaum systematische Ansätze für die gemeinsame Gestaltung der Übergänge gibt. So werden aus den Übergängen vielfach eher „Bruchstellen als Brücken", wie in dem Eingangszitat kritisch konstatiert. Erstrebenswert ist in diesem Zusammenhang die verstärkte Zusammenarbeit von Eltern, Erzieher/-innen, Lehrer/-innen und ggf. auch Schulpsychologen, mit dem Ziel, Kinder bei der Bewältigung dieser bedeutsamen Lebensereignisse zu unterstützen.

Lehrkräfte an Grundschulen sind sensibilisiert für Übergangssituationen und für mehr oder minder risikobehaftete Entscheidungen. Mit dem vorliegenden Modul sollen Möglichkeiten erarbeitet werden, die Übergänge so zu gestalten, dass die Kinder positive Entwicklungsimpulse bekommen und auf die Übergänge gezielt vorbereitet werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Übergängen im fachlichen Rahmen des mathematischen

Unterrichts. Dies führt zum einen zu der Frage nach der Kontinuität und Kohärenz einer Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten zwischen Kindergarten und Grundschule einerseits und zwischen Grundschule und weiterführenden Schulen andererseits. Darüber hinaus stellt sich die Frage, wie Kinder bei der Vorbereitung auf die Übergänge und in der z.T. schwierigen Phase des Schulanfangs in der Grundschule und später in der weiterführenden Schule unterstützt werden können. Neben der fachlichen und inhaltsbezogenen Vorbereitung gehört dazu aber auch, sich mit Erwartungen und Hoffnungen sowie evtl. Ängsten und Bedenken der Kinder auseinander zu setzen. Diese Aspekte greift die Modulbeschreibung schwerpunktmäßig auf und ist entsprechend in drei zentrale Abschnitte gegliedert:

1. Grundideen der Entwicklung mathematischen Denkens vom Kindergartenalter bis in die Sekundarstufe
2. Vom Kindergartenkind zum Schulkind – Möglichkeiten der Unterstützung und Begleitung
3. Was kommt nach der Grundschule? Vorbereitung auf den Übergang zur weiterführenden Schule

2. Grundideen der Entwicklung mathematischen Denkens vom Kindergartenalter bis in die Sekundarstufe

Die Entwicklung mathematischen Denkens und mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten ist zum einen ***inhaltsorientiert***, d.h. sie bezieht sich auf

- Zahlbegriff und Operationsverständnis,
- die Entwicklung räumlicher Kompetenzen und das Unterscheiden von Formen,
- das Erkennen von Mustern und Strukturen,
- die Entwicklung von Größenvorstellungen und Kompetenzen beim Vergleichen und Messen sowie auch auf
- die Erfassung von Daten und Häufigkeiten und elementare Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit.

Diese Inhaltsbereiche bilden auch die ***Bildungsstandards im Fach Mathematik*** für den Primarbereich und den Hauptschulabschluss bzw. den Mittleren Bildungsabschluss ab.

Zudem finden sich auch in den Orientierungsplänen der einzelnen Bundesländer für Bildung und Erziehung in Tageseinrichtungen für Kinder mehr oder weniger dezidierte Hinweise auf mathematische Inhaltsbereiche im Rahmen der mathematischen Frühförderung.

Alle Inhaltsbereiche werden dabei in der Regel von Kindern zunächst auf ***konkreter Ebene*** selbst motiviert oder angeleitet von Erwachsenen erkundet. So werden in unterschiedlichsten Situationen konkrete Gegenstände gezählt und dabei berührt und ggf. auch bewegt, unterschiedliche Formen werden erfühlt und visuell verglichen, beim Versteckenspielen werden mögliche Verstecke daraufhin geprüft, ob man hinein, darunter oder dahinter passt, ohne gesehen zu werden, Muster werden bewusst oder unbewusst erzeugt (z.B. bei der Anordnung von Bausteinen), Größen werden direkt miteinander verglichen und spielerisch erkundet sowie Daten erfasst (Wie viele Kinder sind in unserer Gruppe? Wie viele davon sind Jungen bzw. Mädchen?), Häufigkeiten empirisch erkundet (Wie oft kommt die 6, wenn ich zehnmal würfle? Wie oft kommt Zahl, wenn ich zehnmal eine Münze werfe?) und in Spielsituationen mit Wahrscheinlichkeiten umgegangen. Aus der Situation heraus ergeben sich dann Versuche der Kinder, erlebte Situationen festzuhalten, zu dokumentieren oder mental zu repräsentieren. Sie sind dann im ***Übergang von der konkreten zur abstrakten Phase*** und versuchen Zeichnungen einer erlebten bzw. fiktiven Situation anzufertigen oder erfinden bzw. imitieren Symbole zur Darstellung von Mengen, Zahlen, Größen oder Formen. Ziel des Mathematikunterrichts ist ultimativ die Fähigkeit zum ***abstrakten Umgang*** mit Zahlen, Operationen, Formen, Größen, Mustern/Strukturen und Wahrscheinlichkeiten.

Allerdings entwickeln sich inhaltsbezogene Fähigkeiten nicht gleichförmig parallel von der konkreten zur abstrakten Phase. Ein Kind kann z.B. in Bezug auf den Umgang mit Formen durchaus zu abstrakten Leistungen fähig sein (z.B. die Form Rechteck in verschiedensten Gegenständen seiner Umwelt zielsicher erkennen, unabhängig von Lage, Größe und Material) während es sich in Bezug auf die Entwicklung des Zahlbegriffs noch auf der konkreten Ebene befindet (z.B. noch nicht fähig ist, die Zahl 4 als Repräsentant für alle Mengen mit 4 Elementen zu erkennen und diesbezüglich noch keine tragfähigen inneren Vorstellungsbilder entwickelt hat).

Die folgende grafische Darstellung illustriert die Entwicklung mathematischen Denkens in Bezug auf die fünf zentralen mathematischen Inhaltsbereiche der Grundschule (Peter-Koop & Grüßing 2006).

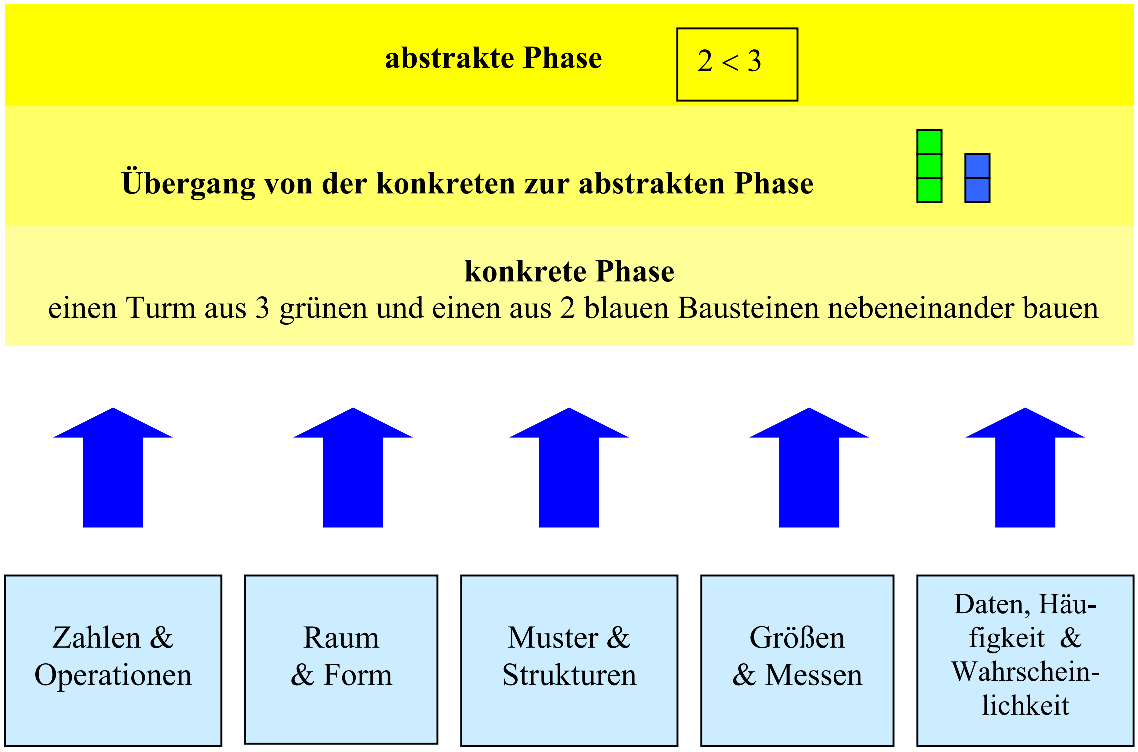


Abb.1: Entwicklung inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen

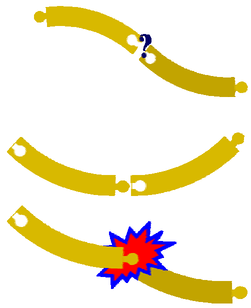
Die Entwicklung mathematischen Denkens ist jedoch nicht allein inhaltsorientiert, sondern in Bezug auf alle Teilbereiche zugleich auch ***prozessbezogen***. Die Entwicklung inhaltsbezogener Fähigkeiten ist untrennbar von der Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik (vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Primarstufe 2005, S. 9). Diese prozessbezogenen Fähigkeiten betreffen die Bereiche Kommunizieren, Argumentieren, Darstellen, Problemlösen und Modellieren.

Bereits im Kindergartenalter ***kommunizieren*** Kinder in ihrer tätigen Auseinandersetzung mit Mathematik natürlicherweise mit anderen Kindern und auch mit den sie begleitenden Erwachsenen wie Eltern, Verwandten und Erzieherinnen. Die zunächst schwerpunktmäßig verbalen und über ihre Zeichnungen und Bilder auch ikonischen Kommunikationsformen werden dann in der Grundschule ausgebaut, so dass zuneh-

mend mathematische Fachbegriffe und Zeichen verstanden und für die Dokumentation und Mitteilung eigener Lösungswege verwendet werden können.
Auch ***mathematisches Argumentieren*** setzt bereits deutlich vor dem Schulanfang ein, wenn Kinder versuchen, Begründungen für beobachtete/erfahrene Sachverhalte zu suchen oder diese nachzuvollziehen. Im Übergang von der Grundschule zur weiterführenden Schule sollen Kinder zunehmend befähigt werden, mathematische Aussagen zu hinterfragen und zu überprüfen und auch auf abstrakter Ebene mathematische Zusammenhänge zu erkennen, Vermutungen zu entwickeln und Begründungen zu finden. Dies sind zum einen wichtige Vorerfahrungen für das spätere Verständnis formaler Beweise, zum anderen wird ein „natürliches Beweisbedürfnis" angebahnt, wenn im Mathematikunterricht der Grundschule immer wieder Begründungen für mathematische Aussagen und Vermutungen eingefordert, generiert und nachvollzogen werden.
Im Übergang von der konkreten zur abstrakten Ebene kommt dem Umgang mit ***Darstellungen*** eine zunehmend bedeutende Rolle zu. Während Kinder im Kindergartenalter eigene Darstellungsformen „erfinden", begegnen ihnen in der Schule vermehrt konventionelle Darstellungen (in Form von Rechensätzen, Skizzen, Tabellen, Diagrammen, Graphiken und Ähnlichem). Mathematische Aufgabenstellungen erfordern das Übertragen von einer Darstellungsform in eine andere, das Vergleichen und Bewerten von verschiedenen Darstellungen sowie das Entwickeln, Auswählen und Nutzen von geeigneten Darstellungen.
Das Entwickeln und Nutzen von mathematischen Lösungsstrategien ist keineswegs auf den Mathematikunterricht in höheren Klassenstufen beschränkt. Bereits jüngere Kinder üben in ihrem Spiel ***Problemlösen***, wie die Beobachtung von Kindern beim Spielen mit Holzgleisen und Zügen in einem holländischen Kindergarten zeigt (siehe **„Kleine Kinder als Gleisbauer"**, S. 6). In der Schule werden anknüpfend an diesen spielerischen Vorerfahrungen die erlernten mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben aus verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen angewandt und dabei heuristische Strategien bewusst gemacht. Auch das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen sowie die Übertragung auf ähnliche Aufgaben und Probleme wird verstärkt im Übergang von der Grundschule zur weiterführenden Schule verlangt und an unterschiedlichsten Inhalten und Kontexten geübt.

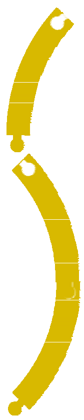
Kleine Kinder als Gleisbauer

Im Spielraum steht eine Kiste mit hölzernen Gleisen und Zügen. Die Kinder spielen oft damit. Ihr Spiel ist ganz unterschiedlich. Oft verbinden sie die Gleise „willkürlich“ und lassen einen Zug darauf fahren. Einige Kinder sind geschickte Gleisbauer und legen rasch eine schöne Strecke mit einer Brücke. Anderen Kindern gelingt es nicht, zwei Gleisteile miteinander zu verbinden.



Verbinden von Gleisteilen

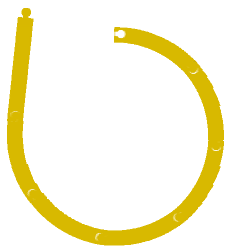
Einige Kinder verstehen das Prinzip der Verbindungen nicht. Sie fragen sich, wie sie zwei Gleisteile miteinander verbinden können. Gelegentlich wird vergeblich mit Gewalt versucht, zwei Teile zu verbinden, was die Kinder dann frustriert und erbost aufgeben und weglaufen lässt. Sie verlieren somit ihr Interesse, denn ihnen stehen nicht die notwendigen Fähigkeiten zur Verfügung. Hilfreich kann dann ein zeitiges Intervenieren oder Demonstrieren einer Lösung sein.



Kurven links- oder rechtsherum?

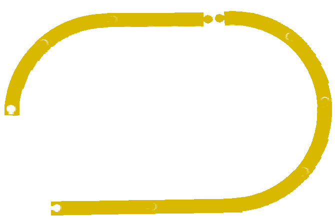
Es liegt schon eine Strecke auf dem Boden und Bernd sucht sich eine geeignete Kurve. Die nächste, die aus der Kiste kommt, liegt so:
Es sieht aus, als ob das Teil nicht der Biegung auf dem Boden folgt. Deshalb wird gedreht und geschoben, aber es gelingt nicht, den Teil der Biegung einzuordnen. Enttäuscht legt Bernd die Kurve zurück „diese passt nicht“. Er nimmt eine nächste Kurve. Wieder nicht passend. Dann kommt der Augenblick an dem das gewählte Stück passt.

Wir haben verschiedene kleine Kinder beobachtet, die schöne Strecken bauen konnten, bis Folgendes geschieht:



Die Kurve will nicht

Bisweilen sucht ein Kind ein passendes „letztes Gleisteil“. Eine ganz schwierige Situationen ist zum Beispiel rechts zu sehen.
Diese Kurve ist nicht einfach zu schließen. Es gibt es nur zwei Lösungen: Einen Teil der Kurve abreißen oder eine Brücke bauen.



Es gibt kein passendes Stück

Wenn zwei Kinder von unterschiedlichen Punkten aus anfangen zu bauen, kann es passieren, dass sie ihre Gleisstrecken nicht miteinander verbinden können. In dieser Situation gibt es keine einfache Lösung. Die Kinder finden kein Gleisteil mit zwei Löchern, denn ein derartiges Teil gibt es nicht. Beratung ist notwendig!

Eine Strecke umdenken

Gert kam zu der Matte, worauf ein Haufen Kurventeile und gerade Teile lagen. Außerdem gab es eine Brücke mit einem geraden Gleisteil darunter. Gert überblickte die Lage und baute sofort mit geraden Gleisen eine Bahn bis an den Rand der Matte. Dort stoppte er und entschied, eine Kurve zu bauen. Während des Kurvebauens hatte er eine Idee. Er brach das lange Gleis ab und baute schnell eine Achterfigur. Seine Kreativität wurde nicht von der soeben gebauten geraden Strecke behindert.

Ein Bild haben von dem, was man macht

Maria ist eingeladen worden, mit den Gleisen zu spielen. Normalerweise macht sie das nie. Jetzt ist sie in einer ungewohnten Lage: sie darf ganz alleine mit den Gleisen spielen: Auf der Matte steht eine Brücke mit einem geraden Gleisteil darunter. Maria nähert sich der Matte, beobachtet die Lage, und setzt sich. Sie nimmt einen Zug und lässt ihn über eine imaginäre Achterfigur fahren. Sie baut die Gleisbahn nicht, hat sie jedoch in Gedanken. Es ist klar, dass Maria ein ganz genaues Bild einer Gleisbahn hat und sich vorstellt, wie der Zug darüber fährt. Obwohl sie eine Gleisstrecke bauen könnte, macht sie das jetzt nicht.

Die Mathematik des Gleisbauens

Kinder, die in Gedanken eine Bahnstrecke vor Augen haben, die sie bauen wollen, suchen immer wieder ein Teil, das zu ihren Vorstellungen passt. Dazu sollten sie ein Verständnis für das Verbinden von Gleisen, für das Bauen von Links- und Rechtskurven, sowie notfalls für das Umdrehen von Kurven haben. Zudem sollten sie wissen, wie das Aufeinandertreffen zweier „Kopf-“ oder „Schwanzteile“ zu verhindern ist. Der erfahrene Gleisbauer hat von dem, was er bauen möchte, ein Schema im Kopf, kennt sowohl die Möglichkeiten als auch die Eigenschaften der Gleisteile und kann deswegen bauen, was er sich vorgenommen hat.

Um welche Kenntnisse handelt es sich?

1. Gleise werden mit Kopf und Schwanz verbunden.
2. Es gibt gerade und gebogene Schienen.
3. Rechtskurven kann man umdrehen (oben unten), um eine Linkskurve zu bekommen und andersherum.
4. Es gibt immer Spielraum in den Verbindungen: gelegentlich kann man das Gleis ein bisschen verformen.
5. Eine Kreuzung gibt es nicht. Es muss also ein Umweg oder eine Brücke gebaut werden.
6. Gibt es eine existierende Gleisstrecke, dann kann sie durch Entfernen einer oder mehrerer Teile und Hinzufügen einer Kurve erweitert werden.
7. Wenn man zwei längere Strecken an einer Seite verbinden kann, kann man das in Prinzip an der anderen Seite auch. Man kann also zwei Strecken miteinander verbinden.

Wenn diese Regeln aus der Erfahrung bekannt sind, stellen sie eine gute Grundlage für kreatives Denken als Gleisbauer dar. Man kann sich Strecken denken und sich gleichzeitig vorstellen, wie die Gleise gebaut werden können. Vielleicht ein bisschen außergewöhnlich: diese Regeln sind die Grundlage einer „Gleisgeometrie“ oder „Gleismathematik“. Das heißt, dass ein Kind eine Gleisstrecke vorstellen, ihre Konstruktion denken und die Strecke Teil für Teil bauen kann.
Je mehr Gleismathematik und Regeln einem Gleisbauer vertraut sind, um so kreativer kann er beim Entwurf und Bau einer Gleisbahn sein.

Wie erringt ein junger Gleisbauer seine Kenntnisse?

- Versuchslösungen,
- Reflektion bei Konflikten,
- Erklärungen von Kindern und Erzieherin,
- Andere Kinder beobachten,
- Transfer aus ähnlichen Lagen.

Sprache ist ein wichtiges Hilfsmittel, um über (noch nicht oder nicht mehr) konkrete Gleise nachzudenken. Sprachlich bereicherte Darstellungen von Gleisen auf Grund von Charakterisierungen und Regeln, geben eine weitere verbreiterte Grundlage für Kreativität im Gleisentwurf und Gleisumbau. Und je mehr man weiß, um so schneller kann man lernen, denn neue Erfahrungen können besser im Denken eingeordnet werden.

Mathematisches ***Modellieren*** hingegen ist eindeutig eine Kompetenz, die in der Regel erst in der Grundschule angebahnt und im Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen weiter ausgebaut wird. Dazu gehören laut Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Grundschule die Fähigkeiten

- Sachtexten und anderen Darstellungen relevante Informationen zu entnehmen,
- zu Termen, Gleichungen und ikonischen Darstellungen selbstständig Sachaufgaben zu formulieren und
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, innermathematisch zu lösen und die Lösung wieder auf die Ausgangssituation beziehen zu können.

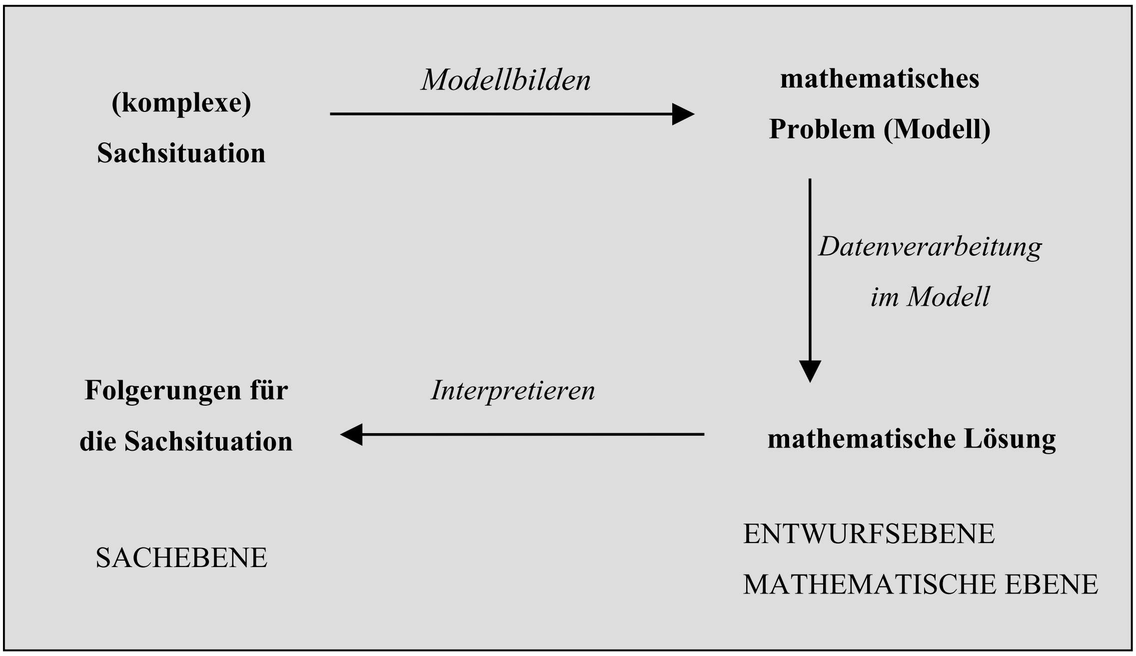


Abb. 2: Schema des mathematischen Modellierens nach Müller & Wittmann (1984)

Mathematische Modelle betreffen in der Grundschule in erster Linie Gleichungen mit natürlichen Zahlen und bekannten gängigen Größen wie Längen, Gewichten, Geldwerten oder Zeitspannen. Geometrische Modelle wie Graphiken, Situationsskizzen oder Tabellen werden hingegen laut Winter (1994, S. 13) meist „sträflich vernachlässigt“. In diesem Zusammenhang ergibt sich allerdings die Frage, mit welcher Substanz Kinder Modelle bilden. Denkt man an den mathematischen Anfangsunterricht, so erfahren die Schülerinnen und Schüler Mathematik im Unterricht nicht in erster Linie als Werkzeug. Mathematik wird vielmehr selbst gegenständlich modelliert, indem zuerst Gegenstände durch Zahlen präsentiert werden und nicht umgekehrt. So wird die Aufgabe 3 + 4 = 7 zur Veranschaulichung in eine kleine Geschichte eingekleidet: *Uta hat 3 Murmeln und Peter hat 4 Murmeln. Wie viele Murmeln haben beide zusammen?* Im Unterricht werden nun häufig drei Murmeln abgezählt und auf den Tisch gelegt. Anschließend werden vier Murmeln abgezählt und ebenfalls hingelegt. Das Zusammenschieben der beiden Mengen zu einer Menge, d.h. das Manipulieren einer Sachsituation zur Herbeiführung einer neuen bzw. modifizierten Sachsituation, soll den Prozess der Addition veranschaulichen. Mathematisches Modellieren ist somit die *Umkehrung* eines den Kindern bereits seit den ersten Schultagen (unbewusst) vertrauten Vorgehens (vgl. Peter-Koop, 2003).

Nach dieser zusammenfassenden Darstellung der Entwicklung mathematischen Denkens in Bezug auf inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen soll im folgenden Teil der Übergang vom Kindergartenkind zum Schulkind in den Blick genommen werden.

3. Vom Kindergartenkind zum Schulkind: Möglichkeiten der Unterstützung und Begleitung mathematischer Lernprozesse

In den Ausführungen oben ist bereits angeklungen, dass sich bereits im Kindergartenalter „entscheidende Vorläuferfähigkeiten für die schulischen Lernprozesse“ (Faust-Siehl, 2001a, S. 74) entwickeln. Pädagogische Fachkräfte in den Tageseinrichtungen und Lehrkräfte an Grundschulen müssen daher wissen, welche mathematischen Vorläuferfähigkeiten möglichst bereits vor Schuleintritt entwickelt werden sollten, wie man Kinder dabei sinnvoll unterstützen und dabei Lernausgangslage und Lernfortschritte systematisch beobachten und dokumentieren kann. Darüber hinaus ist es sinnvoll, wenn beide Institutionen in der Phase des Übergangs eng zusammenarbeiten.

Die konkrete Gestaltung des Übergangs vom Kindergarten zur Grundschule seitens der beteiligten Einrichtungen und die Begleitung der kognitiven Prozesse bei der Entwicklung mathematischen Denkens ist unbestreitbar wichtig, doch auch der affektive Bereich sollte nicht übersehen werden. Kinder (und ihre Eltern) haben Erwartungen, Wünsche, Hoffnungen in Bezug auf das schulische Lernen und das Schulleben und diese sollten ebenfalls bei der Vorbereitung, Begleitung und Gestaltung des Übergangs berücksichtigt werden. Daher sollen in den folgenden Abschnitten bezüglich folgender Themenbereiche

- Entwicklung mathematischer Vorläuferfähigkeiten,
- Befunde zu den mathematischen Vorkenntnissen von Schulanfängern,
- Lernstandsdiagnosen im mathematischen Anfangsunterricht,
- Subjektive Theorien von Mathematik und Erwartungen an den Unterricht,
- Gestaltung des Übergangs vom Kindergarten zur Grundschule,

konkrete (gemeinsame) Handlungsperspektiven für Erzieher/-innen und Grundschullehrkräfte aufgezeigt werden.

3.1 Mathematische Aktivitäten in der Vorschulzeit

Im Alter von etwa zwei Jahren beginnen die Kinder, sich mit der Zahlwortreihe auseinander zu setzen. Sie können die ersten Zahlwörter aufsagen und lernen bald, dass mit Zahlwörtern eine Anzahl bezeichnet wird: „zwei Bonbons", „drei Blumen" usw. Die Kinder unterscheiden bei der Anzahl zunächst meist nur zwischen „eins" und „zwei" und „viele". Im Laufe der Zeit differenzieren sich die Zahlen immer mehr. Auch wenn der Unterschied zwischen Zahlwörtern und Eigenschaftswörtern zunächst noch nicht immer ganz klar zu sein braucht (d.h. wenn es für die jüngeren Kinder noch keinen bedeutsamen Unterschied zwischen Aussagen wie „drei Blumen" und „rote Blumen" zu geben braucht), so lässt sich doch zeigen, dass sie diesen Unterschied sehr schnell erfassen. Zur Beherrschung der Zahlwortreihe kommt die korrekte Eins-zu-Eins-Zuordnung hinzu, also die Fähigkeit, jedem der abzuzählenden Objekte genau ein Zahlwort zuzuordnen. Dies lernen die Kinder zunächst in einem begrenzten Bereich, der auch durch „Hinsehen" (simultane Zahlerfassung) überschaubar ist, später darüber hinausgehend.

Beobachtungen bei Kindern zeigen, dass die Lernprozesse durchaus nicht „logisch" ablaufen müssen, sondern dass sich gewisse Fähigkeiten und Einsichten, die aufeinander aufbauen, parallel entwickeln. So gibt es z.B. Kinder, die bei der Aufforderung, die Zahlwortreihe aufzusagen, nur bis zur 13 sicher sind, aber unmittelbar danach problemlos 20 Holzwürfel abzählen und dabei auch die Zahlwortreihe bis 20 verwenden können. Für dieses Verhalten gibt es eine durchaus plausible Erklärung: Manchen Kindern fällt offenbar das „konkrete“ (Ab-)Zählen unter Verwendung von Material leichter als das Aufsagen der Zahlwortreihe, das ein rein mentaler Prozess ist. So gibt es auch Kinder, die bei der Zahlwortreihe zunächst unter Verwendung ihrer Finger nur bis 10 kommen, und andere, die zur Unterstützung rhythmisch auf den Tisch klopfen.

Mathematische Bildung im Kindergarten kann nur gelingen, wenn sie nicht im Widerspruch zu den elementarpädagogischen Ansätzen steht, sondern sie ergänzt und erweitert. Vieles, mit dem die Kinder spielen und was sie bearbeiten, beinhaltet nämlich mathematische Vorerfahrungen, die möglicherweise nicht als solche wahrgenommen werden; angestrebt wird also ein bewussterer Umgang mit den einzelnen Situationen. Dem Alter der Kinder entsprechend, sollten sich die mathematischen Inhalte den Kindern praktisch und konkret darbieten, d.h. es besteht die Notwendigkeit, die Mathematik für Kinder sinnlich erfahrbar zu gestalten. Spiele sollen die Kinder zur aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Gegenständen anregen. Grundsätzlich gilt, dass die Kinder die Welt der Zahlen mit guten Gefühlen verbinden, aber auch lernen sollen, sich ihr gezielt und mit Ausdauer zuzuwenden (vgl. Friedrich & de Galcóczy, 2004 sowie Müller & Wittmann, 2002).

Ziele der mathematischen Bildung im Kindergarten

Bei Kindern im Alter bis etwa drei Jahren geht es im wesentlichen darum, dass sie eigene, sinnliche Erfahrungen sammeln können

- in Bezug auf den eigenen Körper, z.B. im Hinblick auf die Reichweite der Arme („Körperschema“) bzw. auf die Position im Raum (z.B. auf den Stuhl klettern und die Welt „von oben“ anschauen) sowie bei Bewegungsspielen,
- mit Gegenständen sowohl im Raum als in Bezug auf deren Eigenschaften (z.B. dass der Ball wegrollt),
- mit geometrischen Formen von Spielmaterialien,
- mit Zahlen in Spielen und in sprachlicher Form, z.B. in Abzählreimen.

Für Kinder im Kindergartenalter ist es wichtig, dass ihnen entsprechende Möglichkeiten gegeben werden, um die angesprochenen Erfahrungsbereiche zu erweitern und zu vertiefen, so dass ihre natürliche Entwicklung gefördert wird im Hinblick auf

- den ***Umgang mit Raum- und Lagebeziehungen*** (lang, kurz, oben, unten, vorn, hinten, dazwischen, daneben, innen, außen, rechts, links),
- das ***Kennen und Benennen von räumlichen Körpern*** (Kugeln, Würfel, Quader, Säulen) und ebene Figuren (Kreise, Quadrate, Rechtecke, Dreiecke) anhand von konkreten Gegenständen oder geeignetem Material,
- das ***Erkennen von Figuren und Körpern*** nicht nur an ihrer äußeren Gestalt, sondern zunehmend auch ***an ihren Merkmalen und Eigenschaften*** (rund, eckig, Anzahl der Ecken und Kanten),
- das ***Vergleichen, Klassifizieren und Ordnen*** von Objekten und Materialien nach unterschiedlichen Kriterien,
- die ***Einsicht in die Invarianz*** von Größen und Mengen,
- das ***Erfassen der Anzahl von Objekten*** (von Gegenständen, aber z.B. auch von Tönen) „mit allen Sinnen",
- den **Gebrauch von Zahlwörtern** und das Abzählen von Objekten,
- das ***Erkennen von Zahlen*** in der alltäglichen Umwelt der Kinder,
- das ***Zusammenfassen und Gliedern von Mengen*** von Objekten im Sinne eines gegenständlichen Rechnens (z.B. drei Bonbons und zwei Bonbons sind zusammen fünf Bonbons),
- das ***Erkennen von Mustern*** (z.B. der Punktemuster auf dem Würfel oder das Fortsetzen von Reihen),
- das ***Erfassen und Wahrnehmen von Größen*** (Längen und Längenmessung, Gewichte und Abwägen, Volumina, Zeit, Umgang mit Geld).

Wesentlich ist dabei, dass die Kinder lernen, ihre Erkenntnisse über Sachverhalte und ihre Einsichten in Zusammenhänge, Gemeinsamkeiten und Unterschiede *sprachlich* auszudrücken. Das verbale Beschreiben von Sachverhalten, Gemeinsamkeiten, Unterschieden usw. dient sowohl der Verständigung miteinander als auch der individuellen ***Entwicklung von Sprachkompetenz*** und der Präzisierung von Erfahrungen und Einsichten, die zuvor „mit allen Sinnen" gemacht wurden.

Die Entwicklung und das Training ***motorischer Fertigkeiten*** sind selbstverständliche Inhalte der Arbeit im Kindergarten. Mittlerweile gibt es darüber hinaus eine Reihe neuer Erkenntnisse über den Zusammenhang zwischen der physischen Beweglichkeit der Kinder und dem Erwerb der Kulturtechniken Lesen, Schreiben und Rechnen. Naheliegend ist beispielsweise der Zusammenhang zwischen der Entwicklung des Körperschemas bei den Kindern und der Entwicklung von Größenvorstellungen in der alltäglichen Umwelt, aber auch von Maßen wie „1 m“. Auch erscheint plausibel, dass Kinder, die nicht rückwärts laufen können, Schwierigkeiten haben beim Rückwärtszählen (vgl. dazu z.B. Eggert & Bertrand, 2002).

Die Entwicklung der Kinder, elementarpädagogische Bildungskonzepte und Ziele der frühen mathematischen Bildung bedingen sich wechselseitig. Die Ziele müssen dabei klar sein, um zu erreichen, was Müller und Wittmann (2002) fordern: Die Kinder sollen nicht nur dort abgeholt werden, wo sie sind, sondern man muss sie auch dort hinführen, wo sie noch nicht sind. Die Gegenstände und Situationen, mit denen sich die Kinder bei einer mathematischen Frühförderung beschäftigen, müssen deshalb nicht immer der unmittelbaren Lebenswelt der Kinder entnommen sein.

Wie diese Umsetzung im Kindergarten geschehen kann, soll an einigen konkreten Beispielen beschrieben werden. Die Anregungen am Anfang dieses Abschnitts beziehen sich auf die oben genannten Aspekte des Zahlbegriffs und auf geometrische Einsichten.

Vergleichen*:** Man *sieht*, dass ein Kind *größer* ist *als* das andere, ein Stab *länger als* der andere oder ein Indianer *mehr* Federn hat *als* der andere; man *fühlt*, dass eine Kugel *schwerer* ist *als* die andere; man *hört*, dass ein Ton *lauter* ist *als* der andere, usw. Auch sieht, fühlt oder hört man, welches Kind das größte oder das kleinste ist, welcher Stab der längste oder der kürzeste, welcher Indianer die meisten oder die wenigsten Federn hat und welcher Ton der lauteste oder der leiseste ist. Im zweiten Schritt ist es wichtig, diesen Erfahrungen sprachlich zu begleiten und ***so mathematisches Sprachverständnis zu sichern.

***Klassifizieren*:** Beim Klassifizieren geht es zunächst um die Klassifikation von Gegenständen nach einem Merkmal, z.B. sind aus einer Menge von Gegenständen die herauszufinden, die rot sind, oder in einem Bild mit Tieren die, die nicht fliegen können. Diese Übung lässt sich sehr gut auch spielerisch inszenieren. Die Klassifikation nach mehr als einem Merkmal fällt den Kindern deutlich schwerer, wenn beispielsweise aus einer Schachtel die Plättchen herausgesucht werden sollen, die rund *und* blau sind.

***Ordnen*:** Einige Stäbe sollen der Länge nach geordnet werden: Wie geht man vor? Sucht man zuerst den kleinsten und unter den übrig gebliebenen wieder den kleinsten usw.? Oder nimmt man zwei Stäbe und vergleicht und ordnet sie, und nimmt dann einen weiteren Stab und prüft, ob er kürzer ist als die beiden oder länger als die beiden oder wo er in die Reihe gehört? Der Schluss: „Wenn A kürzer ist als B und B kürzer als C, dann ist auch A kürzer als C.“ kann von Kindergartenkindern noch nicht erwartet werden. Aktivitäten dieser Art bilden jedoch die Erfahrungsgrundlage für solche Einsichten. Auch deshalb ist es erforderlich, die Handlungen zunehmend sprachlich zu begleiten und erklären zu lassen.

Invarianz: Die Invarianz, z.B. einer Menge bedeutet, dass die *Anzahl* der Objekte, die zu dieser Menge gehören, nicht von der räumlichen Verteilung oder Anordnung der Objekte abhängt.

Mengen erfassen**:** Zum einen geht es darum, konkrete Mengen zu bilden, also sowohl Objekte zu einem Ganzen zusammenzufassen und diese Ganzheit als ein neues Objekt zu erkennen, als auch darum, die einzelnen Objekte in dieser Menge zu sehen und entscheiden zu können, welche Objekte dazu gehören und welche nicht. Dabei ist es hilfreich, zunächst Mengen mit gleichartigen Elemente zu bilden (z.B. Mengen von Äpfeln *oder* von Birnen und nicht Mengen mit Äpfeln *und* Birnen im Sinne von „Obst“). Zum anderen geht es darum, die Mächtigkeit solcher Mengen im Sinne von „enthält mehr / weniger / gleich viele Objekte“ zu vergleichen bzw. durch simultane Zahlerfassung oder durch Zählen die Anzahl der Objekte zu bestimmen. Hilfreich sind geordnete oder strukturierte Mengen wie z.B. die Punktemuster auf dem Spielwürfel oder andere Zahlbilder, die den Kinder vertraut sind oder vertraut werden und ihre Fähigkeiten zum Mustererkennen fördern.

Arbeiten mit Montessori-Material**:** Erwähnt werden soll noch das in jedem Kindergarten vorhandene Montessori-Material, mit dem sich eine große Zahl von Aktivitäten nicht nur zu den Grundlagen des Zahlbegriffs, sondern auch zum Aufbau geometrischer Vorstellungen durchführen lässt. Eine detaillierte und anschauliche Beschreibung des Materials und möglicher Aktivitäten findet man z.B. bei Milz (1993, S. 158ff.).

3.2 Mathematische Vorkenntnisse am Schulbeginn

Bereits vor Beginn ihrer Schulzeit haben die Kinder umfangreiches mathematisches Wissen, Erfahrungen und Einsichten, die sich auf vielfältige mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge beziehen. Der mathematische Anfangsunterricht kann diese Vorkenntnisse der Kinder nicht ignorieren, sondern muss an sie anknüpfen und aktiv mit ihnen umgehen.

Allerdings sind die Vorkenntnisse und Erfahrungen der Kinder sehr unterschiedlich. Außerdem gibt es in den individuell unterschiedlichen Ausprägungen gerade bei der Zahlbegriffsentwicklung gewisse Risikofaktoren, die schon zu Schulbeginn auf spätere Rechenschwächen hindeuten können. So hat Krajewski (2003) unter anderem nachgewiesen, dass Defizite in der Mengenerfassung (Invarianz, Mengenvergleich) und im Vorwissen über Zahlen (Zählfertigkeiten ebenso wie elementares Rechnen) solche Risikofaktoren sind. Etwas genauer: Diejenigen Kinder, die bei den bereits vor Schulbeginn eingesetzten Testaufgaben aus diesen Bereichen in ihren Ergebnissen deutlich hinter denen der gleichaltrigen Kinder zurückblieben, sind mit großer Wahrscheinlichkeit auch die, bei denen im 1. oder 2. Schuljahr eine Rechenschwäche festgestellt wird. Überraschend ist dieses Ergebnis natürlich nicht, doch es wäre schon wichtig zu wissen, ob sich diese Risikobereiche genauer bestimmen lassen und, vor allem, welche Maßnahmen geeignet sind, eventuell vorhandene Defizite auszugleichen.

Für den Deutschunterricht steht ein normiertes Testverfahren zur Früherkennung von Lese-Rechtschreibschwierigkeiten zur Verfügung, nämlich das „Bielefelder Screening“ (Jansen, Mannhaupt, Marx & Skrowronek, 2002). Dieser Test wird bereits 10 bzw. 4 Monate vor Schulbeginn eingesetzt und testet in insgesamt acht Aufgabenbereichen die grundlegenden Bedingungen für das Lernen des Lesens und Schreibens ab. Für Kinder mit entsprechenden Defiziten gibt es das „Würzburger Trainingsprogramm“ (Küspert & Schneider, 2000).

Einen vergleichbaren und ebenfalls bereits in der Vorschulzeit einzusetzenden Test gibt es auch für die Mathematik, den in den Niederlanden entwickelten und später in Deutschland erprobten „Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung“ OTZ (van Luit, van de Rijt & Hasemann, 2001). Leider fehlt zu diesem Test noch das darauf aufbauende Trainingsprogramm, es liegt bisher nur die holländische Originalversion vor (vgl. van de Luit & van de Rijt, 1995). Mit Hilfe des OTZ kann die Zahlbegriffsentwicklung bei Kindern zwischen 4 ½ und 7 Jahren eingeschätzt werden, insbesondere ist der Test geeignet, bereits vor oder beim Schulbeginn herauszufinden, in welchen

Bereichen der Zahlbegriffsentwicklung bei den Kindern gegebenenfalls besondere Stärken oder Defizite vorliegen. Der OTZ umfasst 40 Aufgaben, sie werden mündlich gestellt und die Kinder lösen sie anhand von Bildern oder unter Verwendung von Material. Von den 40 Aufgaben des Tests lassen sich je fünf folgenden acht Bereichen zuordnen:

(1) Qualitatives Vergleichen
(2) Klassifizieren
(3) Eins-zu-eins-Zuordnungen herstellen
(4) Reihenfolgen erkennen
(5) Zahlwörter gebrauchen
(6) Zählen mit Zeigen
(7) Zählen ohne Zeigen
(8) Einfaches Rechnen.

In den ersten vier Teilbereichen werden Fähigkeiten getestet, die sich in den Arbeiten Piagets als wesentlich für die Zahlbegriffsentwicklung der Kinder herausgestellt haben, während es im fünften bis siebten Teilbereich um die Zählfertigkeiten geht. Allerdings ist den Kindern bei allen Aufgaben die Vorgehensweise bei der Lösung ausdrücklich freigestellt, d.h. sie dürfen zählen wann immer sie wollen, auch bei Aufgaben zur Eins-zu-eins-Zuordnung (was Piaget bekanntlich nicht zulassen wollte). Innerhalb der Aufgabengruppen sind die Aufgaben nach Schwierigkeit geordnet, so dass es möglich ist, festzustellen, wie weit das Verständnis für einen bestimmten Bereich bei einem Kind geht (Beispielaufgaben werden im Folgenden noch genauer betrachtet).

Der Test wurde in Deutschland mit 330 Kindergartenkindern erprobt als diese etwa fünf Monate vor ihrem Schulbeginn standen (T 1), dann kurz vor dem Schulbeginn (T 2) und schließlich noch einmal, nachdem sie etwa die Hälfte ihres ersten Schuljahres absolviert hatten (T 3).

Testdurchgang	Mittelwerte	Bandbreite von	bis	Durchschnittsalter
T 1	23,7	5	39	6 Jahre, 2 Monate
T 2	26,3	5	40	6 Jahre, 5 Monate
T 3	32,9	12	40	7 Jahre, 2 Monate

Tab. 1: Mittelwerte richtiger Lösungen und Durchschnittsalter bei der Erprobung des OTZ (bei insgesamt 40 Aufgaben)

In der Tabelle sind die Mittelwerte und Bandbreiten richtiger Lösungen für diese Kinder angegeben. Es fällt auf, dass noch in der Kindergartenzeit die Anzahl richtiger Lösungen in den etwa 3 ½ Monaten zwischen dem ersten und dem zweiten Testdurchgang von durchschnittlich knapp 24 auf mehr als 26 (bei jeweils 40 möglichen) stieg. Dieser Zuwachs ist in gleicher Weise für alle Teilgruppen von Kindern und Teilbereiche des Tests zu beobachten, er zeigt auch, wie rasant die Entwicklung in dieser Zeit verläuft.
Die folgende Übersicht zeigt die Prozentzahlen richtiger Lösungen von Kindern unmittelbar vor Schulbeginn bei ausgewählten Testaufgaben:

Zählen (Aufsagen der Zahlwortreihe) bis 20	77%
Weiterzählen von 9 bis 15	72%
In Zweierschritten von 2 bis 14 zählen	50%
20 geordnete Klötze abzählen	58%
20 ungeordnete Klötze abzählen	49%
17 Klötze rückwärts zählen	32%
Ohne sie zu sehen, wissen, dass 13 Bonbons mehr sind als 9	69%
Die Augensumme von zwei Würfeln zusammenzählen	51%
Zum Vergleich „mehr/weniger“ bis zu 5 Objekte simultan erfassen	83%
Objekte nach zwei Merkmalen gleichzeitig klassifizieren	67%
Objekte der Größe nach ordnen	75%
Zwei Reihen der Größe nach vergleichen	67%
Objekte eins-zu-eins zuordnen (zählen ist möglich)	75%
Objekte eins-zu-eins zuordnen (zählen ist nicht möglich)	61%

Zur Erklärung der großen Bandbreite in den mathematischen Vorkenntnissen der Kinder bei Schulbeginn muss sicher auf die natürliche Entwicklung und das Entwicklungstempo verwiesen werden, doch reichen diese Unterschiede als alleinige Erklärung nicht aus. Dies wird deutlich, wenn man sich die Vorgehensweise von Kindern bei einzelnen Aufgaben ansieht. Die Aufgabe in Abb. 3 ist sehr leicht, sie wird kurz vor Schulbeginn von 82% der Kinder richtig gelöst, die Aufgabe in Abb. 4 immerhin auch noch von 43%. In Videostudien lassen sich jedoch sehr unterschiedliche Lösungsstrategien der Kinder erkennen, die durchaus auf Unterschiede in der Art ihres Denkens hindeuten. So gibt es bei der Aufgabe in Abb. 3 gewaltige Unterschiede in der Zeit, die die Kinder zur Lösung benötigen.

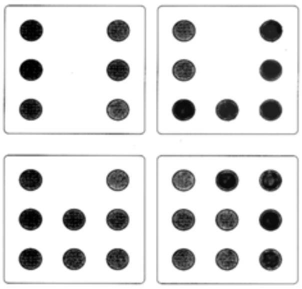


Abb. 3:
Zeige auf den Kasten mit den sieben Punkten.

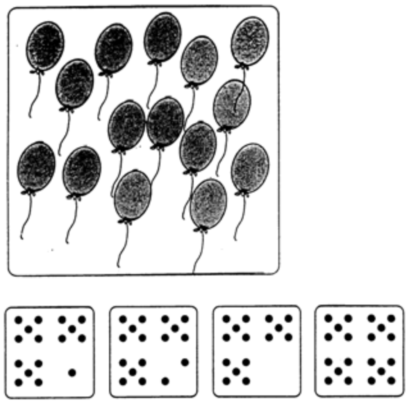


Abb. 4:
Hier siehst du fünfzehn Luftballons. Zeige auf den Kasten, in dem genau so viele Punkte sind wie Luftballons.

Während einige Kinder entweder das Muster des Würfelbildes erkennen (7 = 6 + 1) oder eine Zahlzerlegung vornehmen (7 = 3 + 3 + 1), verwenden andere überwiegend aufwändige Zählstrategien; teilweise zählen sie die Anzahl der Punkte in allen Kästen ab, auch wenn sie den Kasten mit sieben Punkten bereits gefunden haben.

Die überwiegende Mehrheit der Schulanfänger ist in diesem Zahlenraum völlig sicher beim Zählen, doch sind einige Kinder offensichtlich auch schon vor dem Beginn des regulären Anfangsunterricht in Mathematik in der Lage, so genannte heuristische Strategien zu verwenden, also Lösungsstrategien, bei denen sie auf bekannte Muster und Kenntnisse zugreifen und diese in neuartigen Situationen flexibel verwenden. Das Vorhandensein dieser Fähigkeit zeigt sich um so deutlicher, je schwieriger eine Aufgabe ist: Die Aufgabe in Abb. 4 erfordert eine geschickte Organisation der Zählprozedur oder die Verwendung einer Rechenstrategie: 5 + 5 + 5 oder 3 x 5 (im Sinne von „drei Fünfen"), beide Vorgehensweisen werden von einigen Kindern verwendet. Andere verlassen sich dagegen bei dieser Aufgabe ganz auf ihren optischen Eindruck und zeigen auf den Kasten mit den meisten Punkten („weil der ganze Kasten voll ist" oder „weil hier am meisten drin sind"). Ein Beispiel aus einem Kindergarten in der Schweiz (Caluori, 2004, S. 256) macht besonders deutlich, wie die Einsicht in Zahlbeziehungen durch das Zusammenspiel von äußerer und innerer Repräsentation erleichtert wird:

Int.: Ich gebe dir ein Bild, das du kurz anschauen sollst.
(der Interviewer zeigt Sarah für zwei Sekunden ein Bild mit zwei Spielwürfeln mit den Augenzahlen 4 und 5 und nimmt dann das Bild weg)
Wie viele Punkte waren es zusammen?

Sarah: *(zählt leise aus der Erinnerung die neun Würfelaugen, wobei sich ihre Lippen bewegen)* Neun.
(streckt dann an der einen Hand vier Finger und an der anderen Hand fünf Finger und schaut sich beide Hände lange an)
Vier und fünf.
(stutzt, zeigt mit dem Kopf auf ihre Hände mit den ausgestreckten Fingern und beginnt zu strahlen)
Vier und fünf, das ist ja neun!

Sarahs Erkenntnisgewinn folgt der ***Verknüpfung zweier Denkhandlungen***: Der des Abzählens (der Gesamtzahl der Punkte auf den beiden Würfeln aus der Erinnerung) und der Vereinigung von Mengen (wobei die Elemente der Mengen durch die Finger repräsentiert sind). Lorenz (1987, S. 53f.) hat gezeigt, dass Einsichten dieser Art alles andere als selbstverständlich sind.

Fasst man diese und andere Beobachtungen zusammen, so ergibt sich am Schulbeginn folgende Situation:

- Bei den meisten Kindern findet man gute bis sehr gute Zählfertigkeiten und Fertigkeiten im anschauungsgebundenen elementaren Rechnen.
- Die Fähigkeiten zur Eins-zu-eins-Zuordnung und zum Bilden von Reihenfolgen hängen stark davon ab, ob die zu- bzw. anzuordnenden Mengen überschaubar sind oder nicht.
- Die Wortwahl bei der Fragestellung ist von entscheidender Bedeutung. Die meisten Kinder unterscheiden z.B. sorgfältig zwischen „ist größer als“ (hier im Sinne von „höher“) und „ist mehr als“ (im Sinne der Anzahl).
- Auffällige Unterschiede zwischen den Kindern gibt es bei der Art der Begründungen: Während einige entweder gar keine Begründung für ihre Entscheidungen geben („darum“) oder auf den optischen Eindruck verweisen, entscheiden andere meist aufgrund rationaler Argumente.

3.3 Lernstandsdiagnosen im mathematischen Anfangsunterricht

In der Übersicht auf S. 16 zu Kenntnissen und Fähigkeiten der Kinder am Schulbeginn sind mit zwei Ausnahmen (20 ungeordnete Klötze abzählen, rückwärts zählen) nur solche genannt, die bei mindestens der Hälfte der Kinder erwartet werden können. Allerdings besagt die Liste auch, dass es Kinder gibt, die noch *nicht* sicher bis 20 zählen und noch *nicht* in Zweierschritten oder gar rückwärts zählen können und die mit den Begriffen „mehr“ und „weniger“ ebenso ihre Probleme haben wie mit dem Ordnen von Gegenständen nach vorgegebenen Merkmalen. Diese Sachverhalte müssen also Themen des mathematischen Anfangsunterrichts sein. Auf der anderen Seite aber wären alle die Kinder, die diese Fähigkeiten schon besitzen, schnell gelangweilt und in ihrem Lerneifer enttäuscht, würde man zu lange bei den von ihnen als „Kindergartenkram“ betrachteten Sachverhalten verweilen. In dieser Situation ist das besondere pädagogische und methodische Geschick der Lehrerin gefordert, einen Ausgleich zu schaffen. Grundlage dafür ist gerade in den ersten Schulwochen die Kenntnis der Entwicklung des individuellen Lernstands. Praktisch kann dieser Stand mit Hilfe einer einfachen Übersicht ermittelt werden[1]:

Name	Zählfähigkeit, Zahl-verständnis	+ o –	Raum-Lage-Beziehungen geometrische Objekte, Größen	+ o –	Sprache, auditive Fähig-keiten	+ o –	Visuelle Fähig-keiten	+ o –	Verglei-chen, Ordnen, Klassifi-zieren	+ o –

Abb. 5: Erhebungsbogen zum Lernstand in Mathematik

Mit diesem Erhebungsbogen soll *nicht* – wie bei einer „Momentaufnahme“ – der aktuelle Stand der Vorkenntnisse der Kinder am Schulbeginn ermittelt werden (obwohl auch dies möglich wäre). Vielmehr geht es darum, in den ersten Schulwochen regelmäßig – z.B. in 2- oder 3-wöchigem Abstand – oder bei besonderen Anlässen für jedes Kind Beobachtungen zu den einzelnen Kategorien einzutragen. Als Beispiel sei hier die Zählfertigkeit der Kinder gewählt:

[1] Wir verdanken diese Anregung Astrid Ebeling, einer Mitautorin der Handbücher von Radatz, Schipper u.a. (1996 ff.); vgl. auch Hasemann, 2003.

In einer Unterrichtsstunde mögen unter anderem die folgenden Aktivitäten stattgefunden haben: Die Kinder haben im Chor gezählt und gemeinsam oder einzeln die Zahlreihe rhythmisch oder melodisch aufgesagt, sie haben das Zählen mit Bewegungen verbunden; die Lehrerin hat einem Kind einen Ball zugeworfen und eine Zahl genannt, das Kind hat dann von dieser Zahl aus vorwärts oder rückwärts gezählt usw. Die Lehrerin hat das Verhalten der Kinder und die bei ihnen vorhandenen Fähigkeiten und Fertigkeiten beobachtet. Zweck des Erhebungsbogens ist es, diese Beobachtungen festzuhalten. Bei einer größeren Zahl von Kindern in einer Klasse ist es nicht möglich, in jedem Fall eine detaillierte Beschreibung zu geben, sie ist in vielen Fällen aber auch gar nicht erforderlich. Bei den meisten Kindern reicht es völlig aus, die jeweiligen Fähigkeiten und Fertigkeiten einfach zu kennzeichnen durch ein „+“ (gute Leistungen, d.h. das Kind ist in dem Bereich sicher), „o“ (durchschnittliche Leistungen, d.h. das Kind bewältigt die meisten Anforderungen im dem Bereich, macht aber noch Fehler oder ist manchmal unsicher) bzw. „–“ (nicht zufriedenstellende Leistungen, d.h. das Kind gibt häufig keine oder falsche Antworten; das Wissen bzw. die Fähigkeiten und Fertigkeiten in dem Bereich sind noch so unsicher, dass nicht darauf aufgebaut werden kann). In den besonderen Fällen, in denen genauere Beschreibungen erforderlich sind, können diese selbstverständlich zusätzlich in den Bogen eingetragen werden, wie z.B.: Das Kind zählt vorwärts bis ..., rückwärts von ...; es zählt bis zu ... Gegenständen durch Antippen/Verschieben, nur mit den Augen (korrekt/nicht korrekt) etc.

Beobachtungen zu den übrigen Aspekten (Zahlverständnis, Raum-/Lagebeziehungen usw.) können zeitgleich oder mit geringem zeitlichen Abstand vorgenommen werden. Etwa zwei oder drei Wochen später werden gezielte Beobachtungen der gleichen Art durchgeführt; dabei ist es nicht unbedingt erforderlich, zu jedem Erhebungszeitpunkt Beobachtungen zu allen in dem Bogen genannten Kriterien einzutragen. Wesentlich ist aber, dass auf diese Weise die Lernentwicklung jedes einzelnen Kindes in relativ großer Breite dokumentiert wird. Dadurch kann verhindert werden, dass einzelne Kinder in ihrer Lernentwicklung deutlich hinter den übrigen zurückbleiben, ohne dass dies bemerkt würde. Falls die Leistungen einzelner Kinder gehäuft mit „–“ eingeschätzt werden, sind genauere Kennzeichnungen der tatsächlich vorhandenen Fähigkeiten und Fertigkeiten erforderlich, um gegebenenfalls frühzeitig gezielte Fördermaßnahmen durchführen zu können.

Beobachtungsschwerpunkte zu den Kriterien im Erhebungsbogen:

Zahlverständnis, simultane Zahlerfassung, Eins-zu-eins-Zuordnung: Punktbild einer Zahl zeigen, auf Kommando zeigen alle Kinder gleichzeitig die Anzahl der Punkte mit den Fingern; Punktbilder im Stuhlkreis auslegen, eine Zahl nennen, die Kinder sollen ganz schnell die Karte mit dem Punktbild greifen; eine Anzahl von Tönen wird vorgespielt, die Kinder notieren die Anzahl als Ziffer oder in Form von Strichen. Individuelle Beobachtungen: Das Kind erkennt spontan die Mächtigkeit von Mengen bis ..., stellt spontan Mengen mit vorgegebener Mächtigkeit her bis ....

Schreiben und Lesen von Ziffern: Male ein Bild von deiner Lieblingszahl und von allen Ziffern, die du schon kennst.

Raum- / Lagebeziehungen: Die Kinder sollten am Schulbeginn sicher sein im Umgang mit Begriffen wie lang, kurz, gerade, schräg, schief, oben, unten, vorn, hinten, dazwischen, daneben, innen, außen, rechts, links. Weitere Beobachtungen: Orientieren und Zeichnen in einem vorgegebenen Feld mit neun Quadraten in drei Reihen und drei Spalten, so soll z.B. oben rechts ein Herz und unten links ein Haus gezeichnet werden. Orientieren und zeichnen im Punkteraster, z.B. ein Zeichendiktat, bei dem vom vorgegebenen Startpunkt aus drei nach oben, drei nach rechts usw. gegangen werden soll. Handlungen nach Anweisungen ausführen, z.B.: „Lege auf den Stuhl dein Rechenbuch, rechts neben den Stuhl legst du einen Bleistift.“ Bauen mit Holzwürfeln nach Vorlage, Muster nachlegen, Twister (Spiel).

Geometrische Körper und Figuren: Anhand konkreter Gegenstände und Plättchen unterscheiden zwischen Kugeln, Würfeln, Quadern und Säulen bzw. Kreisen, Quadraten, Rechtecken und Dreiecken (wobei die in der Geometrie üblichen Bezeichnungen noch nicht wichtig sind). Die Kinder erkennen und unterscheiden die Objekte zunächst an ihrer äußeren Gestalt, erkennen aber zunehmend auch Merkmale und Eigenschaften (z.B. rund, eckig, die Anzahl der Ecken bzw. Kanten).

Größeneinschätzungen: Raum ausmessen: Wie oft passe ich mit meinem Körper in die Zimmerlänge? Messen mit Körperteilen: Wie oft passt meine Handfläche in eine festgelegte Strecke?

Visuelle Fähigkeiten: Spiele wie Memory, Puzzles, „Schau genau“; Mappe mit laminierten Arbeitsblättern zur visuellen Differenzierung, die Kinder arbeiten selbstständig mit abwischbarem Folienstift.

Auge-Hand-Koordination: Muster auf dem Geobrett nachspannen; Falt- und Schneideübungen.

Verbales Beschreiben von Sachverhalten, Gemeinsamkeiten, Unterschieden etc., auditive Wahrnehmung: Hördiktate, z.B. Geräusche identifizieren, Richtungshören; Melodien nachsingen; Anzahl von Tönen hören; Bälle aus unterschiedlichem Material am Geräusch beim Aufprall unterscheiden.

Vergleichen, Klassifizieren und Ordnen sowohl nach qualitativen als auch nach quantitativen Merkmalen (vgl. Kap. 2.1)

Das Erfassen des Lernstands der Kinder erfolgt bei diesem Vorgehen nicht orientiert an den Defiziten und Schwierigkeiten; in dem Erhebungsbogen werden vielmehr die vorhandenen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten dokumentiert.

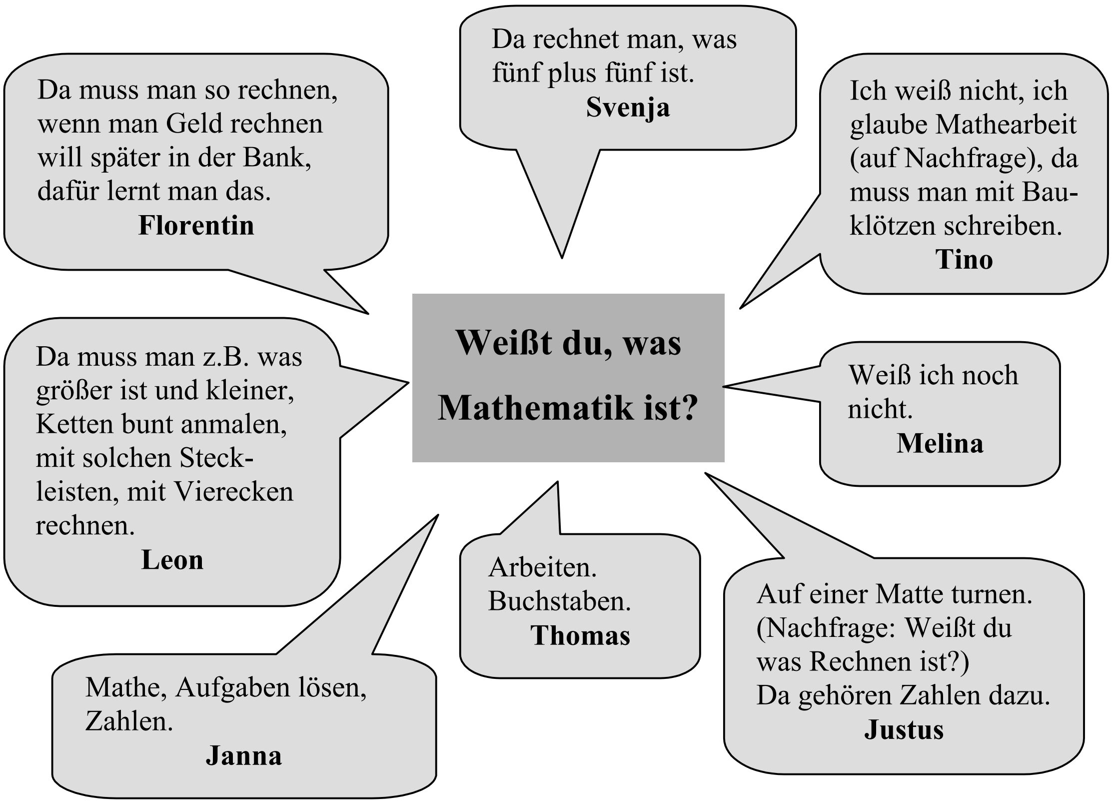
3.4 Befunde zu den Erwartungen von Kindergartenkindern in Bezug auf Mathematikunterricht

Auch wenn sicher unbestritten ist, dass Kinder in Bezug auf ihren Schulanfang mehr oder weniger ausgeprägte Erwartungen (u.a. auch bezogen auf das Fach Mathematik) haben und darüber hinaus sicher auch viele Kinder eigene „subjektive Theorien" darüber entwickelt haben, was Mathematik ist und was man im Mathematikunterricht lernt, so findet man zu diesem Thema in der vorliegenden Literatur kaum Hinweise auf konkrete Befunde. Diesbezügliche Arbeiten beziehen sich allgemein auf den Schulanfang. Laut Griebel und Niesel (2002) freuen sich die meisten Kinder auf die Schule und das Lesen, Schreiben und Rechnen. Bei Schuleintritt sind sie stolz, zu den „Großen" zu gehören und gespannt auf die Inhalte der Schultüte und ihre Lehrerin. In Rollenspielen wird deutlich, dass die Kinder Lehrerinnen und Lehrer zwar überwiegend als nett und geduldig darstellen, doch auch strenge Lehrertypen kommen vor und werden offenbar von den Kindern erwartet (Griebel & Niesel, 2002, S. 54ff.). Eine Untersuchung mit Kindergartenkindern ergab, dass sie, obwohl sie teilweise schon mal zu Besuch in einer Grundschule waren, noch ungenaue Vorstellungen damit verbinden. Anhand eines Interviews mit Schlüsselbegriffsuche wurde deutlich, dass die Kinder Schule häufig mit *Lernen*, *Pause*, *Lehrerin* und *Hausaufgaben* verbinden.

Die Einstellungen, Haltungen und Erwartungen von „Vorschulkindern" im letzten Kindergartenjahr in Bezug auf das Fach Mathematik genauer zu erkunden, war das Ziel der Examensarbeit von Anke Abels und Kathrin Becker (beide sind Studentinnen im Lehramt Grundschule an der Universität Oldenburg). Mit Hilfe einer Handpuppe interviewten sie Kinder einer städtischen KiTa und eines Kindergartens mit ländlichem Umfeld vor Schulbeginn. Die Handpuppe stellte sich den Kindern als Lucy vor, sobald diese den Raum betraten (in dem sich auch eine den Kindern bekannte Erzieherin aufhielt). Sie bot ihnen einen Platz neben sich an und erzählte, dass sie bald in die

Schule käme. Nun habe ihr jemand erzählt, dass man dort auch das Fach Mathematik hätte. Sie wisse jedoch nicht, was das sei und suche nun Rat bei den Kindern.

Die Kindergartenkinder, die im Rahmen des kleinen Rollenspiels in die Rolle von Experten versetzt wurden, waren ernsthaft bemüht, Lucys Fragen zu beantworten. Einige Antworten, die beispielhaft ausgewählt wurden, um die Spannbreite der Antworten zu illustrieren, finden sich im Folgenden:



Interessant war, dass nur sieben von 32 Kindergartenkinder zunächst mit *ja* antworteten, aber nur drei von ihnen auch eine halbwegs richtige Erläuterung geben konnten. 25 Kinder glaubten, sie wüssten es nicht, doch von diesen Kindern konnten vier eine sinnvolle Erklärung liefern. Dreiviertel der Kinder hatten somit eine realistische Einschätzung ihres Wissens. Ferner konnten weitere zwölf Kinder eine sinnvolle Erklärung geben, wenn statt Mathematik das Wort Rechnen oder Rechenunterricht verwendet wurde. Um den Kindern weitere Erzählanlässe zu bieten, präsentierten die beiden Studentinnen den Kindern via Lucy acht Karten mit verschiedenen Motiven und baten sie, diese danach zu sortieren, ob sie etwas mit Mathematik zu tun haben oder nicht (in den Fällen, in denen die Kinder das Wort Mathematik nicht kannten, wurde im folgenden

Gespräch das Wort „Rechnen“ verwendet). Auf den Karten befanden sich folgende Darstellungen:

Rechenaufgabe als Zahlensatz (4 + 3 = 7)	Türme aus Steckwürfeln
Rechenaufgabe mit Äpfeln	Würfel-Punktefelder
Zahlenmauer	Kreis, Dreieck, Quadrat
Stellenwerttafel	Würfelnetz
Lineal	Bauwerk aus Bausteinen
zwei Äpfel	Anzeige einer Digitaluhr
ein Auto	Ziffernblatt einer Analoguhr
das Wort lesen in Schreibschrift	Druckbuchstaben

Abbildungen mit Zahlen (Würfelbilder, Stellenwerttafel, Zahlenmauer etc.) wurden von den Kindern vornehmlich der Mathematik (bzw. dem Rechnen) zugeordnet. Allerdings wurde die Analoguhr seltener gewählt als die Digitaluhr, da sie anscheinend eindeutiger als Uhr erkannt wurde. Sie gehört nach Meinung von 14 Kindern nicht in den Mathematikunterricht. Malte begründete das wie folgt: „Ist nicht zum Rechnen da, da muss man die Uhrzeit ablesen, wann es klingelt.“ Neben Zahlen war Rechnen das am zweithäufigsten genannte Zuordnungskriterium. Die Wahl der Karten mit der Rechenaufgabe in ikonischer und symbolischer Darstellung wurde damit begründet, „weil man da rechnen muss“ bzw. „weil da plus und minus ist“. Und auch das Würfelnetz mit den Punktefeldern wurde von einigen Kindern diesbezüglich ausgewählt, weil – wie Cedrik erläuterte – „zwei plus zwei ist vier, mit Punkten kann man rechnen“.

Geometrische Darstellungen hingegen wurden in der Regel nicht mit Mathematik in Verbindung gebracht. Hier wurde von einigen Kindern lediglich die Karte mit den drei ebenen Figuren ausgewählt und als Begründung „Basteln mit Schablone“ genannt. Offen bleibt, ob die Karte allgemein mit Schulunterricht verbunden oder ob das Basteln mit Schablonen als Teil des Mathematikunterrichts verstanden wurde. Die Karte mit dem Bauwerk aus Bausteinen hatte für 30 der 32 Kinder nichts mit Mathematik zu tun, wie Lukas feststellte: „Glaube nicht Bausteine, weil da [in die Schule] keine Babys mehr hingehen.“ Über die Hälfte der Kinder ordnete hingegen die Druckbuchstaben und das Wort in Schreibschrift dem Stapel mit den „Mathematikbildern“ zu. Während einige

Kinder für diese Wahl keine Begründung geben konnten, die über „das macht man in der Schule“ hinausgehen, zeigen die Äußerungen anderer Kinder, dass noch nicht zwischen Zahlen und Buchstaben unterschieden wird: Melissa liefert für die Wahl der Karte mit den Buchstaben die Begründung „weil da Zahlen drauf sind“ und erläutert in Bezug auf die gewählte Karte mit Schreibschrift „schreiben, weil da Zahlen sind“.

Beim Geschlechtervergleich zeigte sich, dass die Mädchen insgesamt eine klarere Vorstellung von Mathematik bzw. Mathematikunterricht hatten. Gut ein Drittel der Mädchen konnte wenigstens einen Aspekt in Bezug auf die Frage, was Mathematik ist, anführen gegenüber 10 % der Jungen. Realistische Vorstellungen vom Mathematikunterricht hatten sogar knapp 70 %, während nur ein Drittel der Jungen diesbezüglich sinnvolle Angaben machen konnte.

Karla: „Lehrerin sagt Zahlen auf und dann noch ein plus oder minus – ich sag eine Zahl.“

Janna: „Zahlen hinschreiben, wenn die richtig sind.“

Meret: „Rechnen, man rechnet mit Zahlen“

Jana: „Schreiben und rechnen mit einem Taschenrechner.“

Melina: „Zahlen lesen“

Norman: „Üben, Verkehr und so.“

Justin: „Lernen, schreiben.“

Yorick: „Lernen, nicht hauen, nicht schubsen, nicht in den Haaren ziehen.“

Auch wählten doppelt so viele Mädchen wie Jungen die Karte mit den Formen: „Da kann man zeichnen, wenn man ein Dreieck, Viereck haben will.“ (Kim)

Wie zu erwarten war, zeigten Kinder mit älteren Geschwistern vielseitigere Vorstellungen von Mathematik als Kinder mit jüngeren Geschwistern, für die Mathematik bzw. Rechnen vielfach synonym mit Zahlen war. Diesbezüglich stellen die Studentinnen fest: „Die Teilgruppe *Kinder mit älteren Geschwistern* ist die einzige in unserer Untersuchung, für die Zahlen *nicht* das wichtigste Zuordnungskriterium war“ (Abels & Becker, 2006, S. 52). So begründet z.B. Thilo die Wahl der Karte mit der Rechenaufgabe in ikonischer Darstellung: „Weil man auch mit Äpfeln rechnen kann. Meine Schwester ist in der Schule und die macht das auch immer.“ Jantje erläutert die Wahl der Schreibschrift-Karte mit dem Hinweis, „weil man da [im Mathematikunterricht] auch manchmal Aufgaben schreiben muss“. Beim Vergleich der Kinder, die in der Stadt leben, mit denen, die in einem ländlichen Umfeld aufwachsen, zeigten sich hingegen keine wesentlichen Unterschiede.

Auch wenn die Stichprobe von 32 Kinder sicherlich keine Verallgemeinerungen zulässt, so dokumentieren die Antworten der Kinder doch sehr heterogene Vorstellungen von Mathematik und Mathematikunterricht, die eine nähere Beschäftigung mit diesem Aspekt lohnend erscheinen lassen. Denn natürlich ist es für Grundschullehrkräfte nicht nur bedeutsam zu wissen, welche mathematischen Vorläuferfähigkeiten und konkreten Vorkenntnisse Kinder beim Schulanfang mitbringen, sondern auch die differenzierte Wahrnehmung ihrer Vorstellungen vom Fach Mathematik und dem schulischen Lernstoff hat einen erheblichen Anteil bei der Gestaltung des Übergangs vom Kindergarten in die Schule.

3.5 Gestaltung des Übergangs vom Kindergarten zur Grundschule

Damit aus Übergängen Brücken und keine Bruchstellen werden, ist eine enge Zusammenarbeit zwischen Tageseinrichtungen und Grundschule im Interesse der Kinder eine unabdingbare Voraussetzung. Wie eine solche Kooperation konkret aussehen kann, zeigt das Beispiel der Zusammenarbeit zwischen einer Grundschule und neun Kindergärten im Schulbezirk Hannover-Kirchrode (siehe S. 28f.).

In der Phase des Übergangs ist die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten jedoch keineswegs allein auf gezielte mathematische Frühförderung in Tageseinrichtungen sowie den mathematischen Anfangsunterricht in der Grundschule beschränkt. Kinder im Alter von 3 bis 6 Jahren beschäftigen sich häufig in alltäglichen Kontexten zu Hause und im Kindergarten mit informeller Mathematik und erwerben dort Wissen, das die Grundlage für das schulische (Mathematik-)Lernen bildet. Doch in welchen Alltagssituationen begegnen Kinder in ihrem häuslichen Umfeld der Mathematik? In einem Kooperationsprojekt zwischen Erzieherinnen und Eltern des Ev. Kindergartens Nikolaikirchweg und Lehramtstudierenden der Universität Oldenburg wurde dieser Frage anhand von selbst erstellten ***mathematischen Bilderbüchern*** nachgegangen (vgl. Peter-Koop & Grüßing, 2006). Ziel des Projektes war es, gemeinsam mit Eltern und Kindern individuelle mathematische Bilderbücher zu entwickeln.

Die Eltern einer altersgemischten Kindergartengruppe erklärten sich zu Beginn des Jahres 2005 bereit, drei Monate lang ihr Kind immer dann zu fotografieren, wenn es ihrer Ansicht nach im weitesten Sinn mathematisch tätig ist. Nach der Entwicklung der Fotos kamen Eltern, Kinder, Studierende und Erzieherinnen zu einem Eltern-Kind-Nachmittag im Kindergarten zusammen, um gemeinsam die Bilder zu betrachten, den Kindern Gelegenheit zu geben, „ihre“ Bilder zu kommentieren und jeweils ihr eigenes Bilderbuch zu erstellen.

Die Studierenden notierten dabei die Kommentare der Kinder und verschriftlichten sie anschließend am Computer, so dass die von Kindern und Eltern gemeinsam gestalteten Bilderseiten mit den Originalkindertexten ergänzt werden konnten. Die einzelnen Seiten wurden dann zusammen mit einem von den Kindern gemalten Titelbild gebunden.

Die Analyse der Bilder im Hinblick auf die repräsentierten mathematischen Inhalte ergab ein sehr umfassendes Bild des mathematischen Verständnisses der Familien. Sämtliche eingangs dargestellten inhaltsbezogenen mathematischen Grundideen (vgl. Kapitel 1) kamen in den Fotos zum Ausdruck. Allerdings wurden die Bilder häufig erst durch die Erläuterungen der Kinder für außenstehende Betrachter bedeutungsvoll.

Die Fotos und die dazugehörigen Kommentare bieten bei der gemeinsamen Betrachtung zahlreiche Gesprächsanlässe zwischen Kindern sowie zwischen Erwachsenen und Kindern zu Hause, im Kindergarten und im Anfangsunterricht der Grundschule und regen die Kinder zum Nachmachen und zu eigenen Erkundungen an.

Die Bilderbücher eignen sich darüber hinaus aber auch für die Elternarbeit. So kann anhand der authentischen Fotos die Vielschichtigkeit der informellen Mathematik, die Eltern und Kinder gemeinsam erkunden, erfahren und bewusst gemacht werden, und es bietet sich eine Gesprächsplattform für Überlegungen und Informationen über die Entwicklung des mathematischen Denkens bei Kindern und Empfehlungen dahingehend, wie Eltern ihre Kinder dabei sinnvoll unterstützen können.

Vielleicht regen die hier ausgewählten Bilderbuchseiten aber auch dazu an, mit Hilfe der Eltern selber eine Fotogalerie oder ein gemeinsames Bilderbuch für den Einsatz in der Klasse herzustellen, das dann wiederum bei einem Besuch der Klasse im benachbarten Kindergarten vorgestellt und ggf. in Kopie hinterlassen werden kann.

Zusammenarbeit Kindergärten – Grundschule im Schulbezirk Hannover-Kirchrode

In diesem Schulbezirk gibt es neun Kindergärten, fast alle Schulanfänger haben zuvor einen dieser Kindergärten besucht – sicher eine günstige Ausgangssituation, um eine Zusammenarbeit herzustellen. Doch auch in diesem Bezirk musste die Zusammenarbeit erst wachsen, sie war und ist nicht selbstverständlich sondern durch die Initiative einzelner Personen entstanden, und sie hängt an gegenseitigem Vertrauen, das ebenfalls erst geschaffen werden und wachsen muss.

Die Initiative zum Miteinander ging von einer Lehrerin der Grundschule aus, die auf die Kindergärten zugegangen ist, und mittlerweile alle Kindergärten mehrmals im Jahr besucht.

Etwa zu Beginn des Jahres, in dem die Kinder eingeschult werden sollen, besucht die Lehrerin die Kindergärten; erste Gespräche über „Problemfälle“ finden statt, also über solche Kinder, die entweder schulpflichtig sind, aber aus Sicht der Erzieherinnen noch nicht schulreif erscheinen, oder „Kann-Kinder“, die eingeschult werden könnten, bei denen aber unklar ist, ob diese vorzeitige Einschulung empfohlen werden soll oder nicht. Wichtig ist bereits zu diesem Zeitpunkt die Einbeziehung der Eltern und deren Beratung.

Etwa im März findet in der Grundschule eine so genannte „große Runde“ statt, zu der die Erzieherinnen aus allen Kindergärten zu einem pädagogischen Austausch eingeladen werden. Themen sind z.B. das Erkennen bzw. die Überprüfung der Schulfähigkeit, die Sprachförderung im Kindergarten oder die mathematische Frühförderung im allgemeinen, aber auch die Förderung der (4 - 5 der etwa 120) Kinder, die bereits im Kindergarten durch ihr besonderes mathematisches Interesse aufgefallen sind. In den meisten Einrichtungen besteht bei den Erzieherinnen großes Interesse an der Entwicklung von Qualifikationen bei den Kindern, die auch für die Schule von Bedeutung sind. Insbesondere wurden Mappen mit Angeboten an die Kinder entwickelt, die z.B. Übungen zur Feinmotorik wie Schneiden und Kleben enthalten, aber auch Konzentrationsübungen, „Schau-genau“-Spiele, Erkennen von Farben, Formen, Zuordnungen usw.

Im Mai/Juni hospitieren alle potentiellen Schulanfänger einen Vormittag lang im Unterricht der ersten Klassen der Schule. Diese Schulbesuche sind für die (noch) Kindergartenkinder außerordentlich wichtig und für sie meist eindrucksvolle Erlebnisse. Sie bekommen erste Eindrücke und können diese verarbeiten, um mögliche Ängste abzubauen. In dieser Zeit finden auch die formellen Überprüfungen der Schulreife statt.

Nach den Besuchen der Kindergartenkinder in der Schule und diesen Überprüfungen werden in weiteren Besuchen der Lehrerinnen in den Kindergärten noch einmal über alle Kinder gesprochen, nicht nur über die „Problemfälle“, es geht auch um Besonderheiten oder Wünsche, die z.B. für die Klasseneinteilung von Bedeutung sein könnten. Kurz vor den Sommerferien findet in der Schule ein Elternabend statt, zu dem die Erzieherinnen eingeladen sind. Einige Zeit nach dem Beginn des ersten Schuljahres treffen sich die Grundschullehrerinnen und die Erzieherinnen zu einer Nachbetrachtung, in der die ersten Erfahrungen mit den Kindern in der Schulzeit durchgesprochen werden. In Erprobung ist ein kleines Projekt, bei dem Kinder des dritten Schuljahres einmal im Monat in die Kindergärten gehen und dort den Kindern Geschichten vorlesen.

Es sollte angemerkt werden, dass die Grundschullehrerin, die diese intensive und erfolgreiche Zusammenarbeit zwischen Schule und Kindertagesstätten initiiert hat, eine engagierte Befürworterin einer flexiblen Eingangsphase ist. Die ersten zwei Schuljahre sollten als Einheit gesehen werden, die von den Kindern – je nach Lerntempo – in einen, zwei oder drei Jahren durchlaufen werden. Wenig bewährt hat sich dagegen die zur Zeit praktizierte „Beobachtungsphase“ in den ersten sechs Schulwochen, in der noch kein eigentlicher Unterricht stattfindet: Die Kinder wollen lernen, wenn sie in die Schule kommen, und viele werden bereits in dieser Phase demotiviert.

4. Was kommt nach der Grundschule? Vorbereitung auf den Übergang zur weiterführenden Schule

Nach dem Übergang vom Kindergarten zur Grundschule ist der Übergang von der Grundschule in die weiterführenden Schulen ein weiteres einschneidendes Erlebnis für Kinder und Eltern. Er verlangt von Kindern zunehmende Selbstständigkeit bei der Bewältigung ihres Schulalltags und Selbstorganisation beim Lernen. So werden mit dem Übergang zur weiterführenden Schule z.B. viele Kinder zu „Fahrschülern“, die den Weg zur zum Teil weiter entfernt liegenden Schule nun allein mit öffentlichen Verkehrsmitteln oder speziellen Schulbussen zurücklegen.

Für Eltern ist dieser zweite Übergang durchaus mit zwiespältigen Gefühlen verbunden. Zum einen sind sie stolz auf ihre „Großen“ (besonders, wenn sie den Weg ins Gymnasium geschafft haben, oder aber vielleicht enttäuscht, dass dies nicht gelungen ist) zum anderen setzt ein fortschreitender Ablösungsprozess ein, der von den Eltern verlangt, den Prozess der zunehmenden Selbstständigkeit auf dem Weg vom Kind zum Jugendlichen zu akzeptieren und zu unterstützen. Jenseits aller fachlichen Aspekte in Bezug auf den Übergang in die weiterführenden Schulen sollte auch diese affektive Ebene sowohl von Seiten der Grundschule als auch der weiterführenden Schulen bei Elterngesprächen einbezogen werden.

Die Kinder erwartet in der neuen Schule nun verstärkt Fachunterricht, das heißt mit den meist stündlich wechselnden Fächern ist in der Regel auch ein Wechsel der Lehrperson verbunden. Dies verlangt einen Gewöhnungsprozess ebenso wie die Tatsache, dass die alte Klassengemeinschaft der Grundschule aufgehoben ist und man einen mehr oder weniger großen Teil der Klassenkameraden erst noch kennen lernen muss. Vielen fehlt im ständig wechselnden Fachunterricht die aus der Grundschule gewohnt individuelle Ansprache der Lehrerin oder des Lehrers. Weiterhin sind die Schülerinnen und Schüler mit dem Übergang auf die weiterführende Schule erstmals für alle sichtbar äußerlich differenziert worden, denn je nach ihren individuellen Fähigkeiten und Leistungen haben sie Schulempfehlungen fürs Gymnasium, die Real- oder Hauptschule bekommen. Auch diese Differenzierung hat sicherlich höchst unterschiedliche affektive Begleiterscheinungen, die sich auch in den Erwartungen, Wünschen und Hoffnungen der Kinder an ihre neue Schule widerspiegeln.

Im folgenden soll dieser zweite Übergang aus der Perspektive des Fachs Mathematik im Mittelpunkt der Überlegungen und Ausführungen stehen. Diesbezüglich stehen im ersten Teil des Kapitels ***zentrale Leitideen aus der Sicht der Fachmathematik*** im Mittelpunkt der Betrachtungen, während im zweiten Teil ***Wünsche und Erwartungen an den Mathematikunterricht*** – sowohl aus Schüler- als auch aus Lehrersicht – thematisiert werden.

4.1 Zentrale Leitideen aus der Sicht der Fachmathematik

Beim Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe sind die Kinder vielseitig mathematisch tätig sowohl im Alltagsleben im Bereich der *Straßenmathematik* (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985) als auch in der *Schulmathematik* (vgl. auch Schipper, 2002).

Im Bereich der Straßenmathematik erweitern sie auf ganz unterschiedlichen Niveaus ihr Zahlverständnis beim Einkaufen und Sport, in der Kommunikation mit anderen Kindern und Erwachsenen, im Verkehr und beim Bezahlen, bei ihren Hobbys sowie auch bezogen auf Gesundheit und Ernährung. Wie bereits in der Grundschule werden auch die Lehrkräfte der weiterführenden Schulen ihre mathematische Entwicklung wegen der gesellschaftsvorbereitenden Funktion des Unterrichts betreuen. Deswegen sind alle Aspekte des Zahlverständnisses auf einem informellen Niveau wichtig.

Im Bereich der Schulmathematik bilden sich beim Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe zwei Schwerpunkte: zum einen Anwendungen der Mathematik in Physik, Chemie, Informatik und anderen Fächern oder Berufsfeldern, zum anderen der Erwerb von mathematischen Grundlagen für die Entwicklung von Konzepten und Leitideen, die über direkte Anwendungen hinausgehen und die für den gesamten Mathematikunterricht – für die Grundschule und für das weiterführende Lernen – von fundamentaler Bedeutung sind. Der Mathematikunterricht der Grundschule greift die frühen mathematischen Alltagserfahrungen der Kinder auf, vertieft und erweitert sie und entwickelt aus ihnen grundlegende mathematische Kompetenzen. Auf diese Weise wird die Grundlage für das Mathematiklernen in den weiterführenden Schulen und für die lebenslange Auseinandersetzung mit mathematischen Anforderungen des täglichen Lebens geschaffen. Dies gelingt um so nachhaltiger, je besser schon in der Grundschule die für die Mathematik insgesamt zentralen Leitideen entwickelt werden (vgl. die KMK Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich, 2005, S. 7).

Aus Sicht der Fachmathematik sind die Erweiterung des Zahlbegriffs und des Zahlverständnisses sowie der Operationen mit Zahlen, Vorstellungen von Raum und Form, Muster und Strukturen, Größen und Messen, Daten sowie Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit solche **Leitideen**; sie beinhalten unter anderem:

- Vorstellungen von sehr großen und sehr kleine Zahlen (mega-, giga- , mikro- ...),
- Erweiterung der Stützpunktvorstellungen (z.B. 90 Millionen Deutsche, 2000 km nach Rom, 20 Mikron für eine Bakterie ...),
- Zählstrategien für große Mengen (Stichproben, Zählen durch Messen),
- Kombinationen zählen,
- Schätzen, Überschlagen, Zählfehler (Abweichung),
- Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen,
- Beziehungen zwischen ganzen Zahlen, Dezimalzahlen und Brüchen,
- in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen, dabei Größen begründet schätzen,
- Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben,
- räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten),
- Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen,
- Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen,
- die Flächeninhalte ebener Figuren vergleichen und messen,
- Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen,
- Rauminhalte vergleichen,
- funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen und entsprechende Aufgaben lösen,
- einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen,
- aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen,
- Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z.B. bei Würfelspielen) einschätzen.

Kinder entwickeln bereits im Kindergarten erste Vorstellungen von Rechenoperationen; Ziel der Grundschule ist der systematische Aufbau des Operationsverständnisses. Die Kinder erfahren die Umkehrbarkeit von Operationen über sogenannte Umkehraufgaben

(7 – 4 = 3 ist eine Umkehraufgabe zu 4 + 3 = 7), haben über Tauschaufgaben (5 + 3 = 3 + 5 = 8 bzw. 4 • 2 = 2 • 4 = 8) erste Zugänge zum Kommutativgesetz der Addition bzw. Multiplikation, erkunden Rechenstrategien wie gleichsinniges (12 – 4 = 10 – 2) und gegensinniges Verändern (62 – 37 = 65 – 40) und lernen Rechengesetze kennen (z.B. Punktrechnung vor Strichrechnung). Am Ende des 4. Schuljahres sollen die Kinder diese Zusammenhänge zwischen den Rechenoperationen nicht nur an isolierten Beispielen oder im Sinne von „Rechenvorteilen" erfahren haben, sondern sie auch als Eigenschaften bzw. Gesetzmäßigkeiten der Operationen mit Zahlen erläutern können. In der Sekundarstufe werden besonders multiplikative Strukturen weiter thematisiert (Vielfache, Teiler, Faktoren sowie Potenzen und Wurzeln). Die Forderung nach „Anschlussfähigkeit der Bildungsprozesse" (Faust u.a., 2004) bezieht sich nicht nur auf den Übergang vom Kindergarten in die Grundschule, sondern auch auf den in die Sekundarstufe. Selbstverständlich ist guter Unterricht zunächst und vor allem auf den aktuellen Lern- und Entwicklungsstand ausgerichtet, auf dem sich die Kinder gerade befinden. Doch werden Lehrerinnen und Lehrer stets auch im Blick – oder zumindest im Hinterkopf – haben, was danach kommt. Außerdem kann es durchaus vorkommen, dass Lern- und Erkenntnisprozesse der Kinder Nebeneffekte haben, die zwar im Augenblick nicht stören oder sogar hilfreich sind, auf längere Sicht sich aber als echte Lernhindernisse erweisen können. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die verbreitete Vorstellung, dass Multiplizieren „größer macht" (und entsprechend Dividieren „kleiner macht"); eine Vorstellung, die – wie man leicht feststellen kann – auch noch bei vielen Erwachsenen beim Rechnen mit Bruchzahlen vorhanden ist („wenn ich durch 0,3 *dividiere*, kann doch nichts *Größeres* rauskommen?!").

Wie oben bereits angesprochen, gibt es in den ersten Schuljahren gerade bei der Entwicklung des Zahl- und Operationsverständnisses viele Situationen, in denen bereits die Grundlagen für wichtige spätere Einsichten gelegt – oder auch versäumt – werden:

- Die Konzentration auf die ***Verwendung der Zahlen als Rechenzahlen bzw. als Kardinalzahlen*** (Mächtigkeiten von Mengen) in Sachaufgaben führt zu einem eingeschränkten mathematischen Verständnis. In den ersten Schuljahren lassen sich die meisten Aufgaben allein mit Hilfe konkreter Handlungsvorstellungen lösen; Kinder sollten bereits in der Grundschule lernen, Beziehungen zwischen Zahlen zu modellieren. Dabei geht es z.B. um Aufgaben wie

> David sammelt Pokémon-Karten. Am Wochenende hat er 15 Karten bekommen. Jetzt hat er 89 Karten. Wie viele Karten hatte er vorher?

Diese Aufgabe erfordert das Zugreifen auf eine unbekannte Startmenge. Da sie keine direkte Übersetzung in Handlungen zulässt, ist sie für viele Kinder recht schwierig. Doch z.B. die Kennzeichnung der 89 auf der Hundertertafel oder am Zahlenstrahl erleichtert den Zugang zur Lösung, weil die Kinder zunächst am Material erkennen, wo die Startzahl zu suchen ist, um dann die Beziehung zwischen gesuchter Startzahl, Abstand und Zielzahl in eine Rechenoperation zu übersetzen. Wenn sie nicht ausschließlich als Zählwerkzeuge verstanden werden, können Materialien wie z.B. die Hundertertafel und der Zahlenstrahl sehr gute Erfahrungs- und Übungsfelder sein. Sie erlauben es gerade den schwächeren Kindern, mentale Bilder von Situationen zu konstruieren, in denen mathematischen Beziehungen repräsentiert sind (z.B. „Ich denke mir zwei Zahlen, eine ist um 5 größer als die andere. Welche Zahlen könnten das sein?"). Auch das gezielte Eingehen auf Aufgaben vom Typ a + ? = c und insbesondere (wie im Beispiel oben) vom Typ ? + b = c bietet den Kinder die Erfahrungsgrundlage, auf die bei der Behandlung von Gleichungen in der Sekundarstufe zurück gegriffen werden kann.

- In der Grundschule bezeichnen ***Brüche*** konkrete oder anschauliche Objekte (Bruchteile von Pizzen, Geldwerten, Längen von Strecken usw.); man spricht deshalb auch von „konkreten Brüchen". Das Ablösen von diesen anschaulichen Vorstellungen und das Gewinnen der Einsicht, dass Brüche und Dezimalbrüche *Zahlen* bezeichnen, also abstrakte Objekte, mit denen man *rechnen* kann, ist ein sehr schwieriger Prozess. Dieser Prozess ist um so mühsamer, je stärker verfestigt die Vorstellung vom Bruch als einem „konkreten Objekt" ist. Gerade bei der Verwendung von Brüchen als Maßzahlen von Größen (1,25 €, 3/4 Stunde, 1,5 m) lassen sich Grundlagen dafür legen, dass man mit diesen Zahlen rechnen kann, so ähnlich wie mit natürlichen Zahlen, aber doch ein bisschen anders: Wie lang sind eine ¾ Stunde und ½ Stunde zusammen? Warum sind 1,5 m + 1,25 m nicht 2,30 m?

- Im 2. Schuljahr wird die Multiplikation meist eingeführt als wiederholte Addition gleicher Summanden und die Division durch Situationen, in den verteilt oder aufgeteilt (bzw. wiederholt subtrahiert) wird; die oben angesprochene Vorstellungen, dass das Produkt größer sein muss als die Faktoren und der Quotient kleiner als der Dividend, dürften durch diese Einführung und die damit verbundenen Erfahrungen hervorgerufen werden. Die Multiplikation zweier Bruchzahlen lässt sich jedoch unter keinen Umständen als wiederholte Addition repräsentieren, und auch bei der Einführung der Division als Messvorgang (wie oft passt ein Gefäß mit 1/8 l Inhalt in ein Gefäß mit 3/4 l Inhalt?) ist diese Repräsentation nur dann hilfreich, wenn der Quotient (wie in diesem Beispiel) eine ganze Zahl ist. In allen anderen Fällen ist die mentale Repräsentation des Vorgangs und des Messergebnisses so komplex, dass der Rückgriff auf eine formale Definition der Division von Bruchzahlen viel einfacher sein dürfte. Bereits in der Grundschule sollten deshalb auch andere Aspekte der Multiplikation als die der wiederholten Addition (wie z.B. Anwendungen in der Kombinatorik) und, vor allem, die formale Beziehung zwischen Multiplikation und Division als jeweilige Umkehroperationen angesprochen werden.
- Ein weiteres Beispiel für die kontinuierliche Entwicklung des mathematischen Denkens ist der Übergang vom Erkennen, Herstellen und Beschreiben symmetrischer Figuren hin zur ***Betrachtung der Achsensymmetrie als Abbildung der Ebene auf sich***. Dabei handelt es sich um einen Prozess, bei dem sich spiraliges Vorgehen im Verlauf der Schuljahre besonders anbietet: Selbstverständlich erkennen die Kinder symmetrische Figuren zunächst an ihrer äußeren Gestalt, bevor sie – etwa im 4. Schuljahr – deren Eigenschaften entdecken. Diese Eigenschaften lassen sich dann – im 5. oder 6. Schuljahr – zu einer Konstruktionsvorschrift zum Herstellen von Spiegelbildern zusammenfassen, und diese Vorschrift wiederum kann als Definition der Achsenspiegelung im Sinne einer Abbildung aufgefasst werden; im nächsten Schritt werden die Eigenschaften dieser Abbildung untersucht. Dabei werden stets symmetrische Figuren betrachtet, aber ihre Bedeutung als Objekte des Denkens verändert sich mehrfach, und jede einzelne Stufe ist wichtig für die folgenden.

Der im folgenden abgedruckte Brief eines Gymnasiallehrers formuliert stellvertretend für viele Lehrkräfte der weiterführenden Schule konkrete Erwartungen an den Mathematikunterricht der Grundschule.

Was Grundschüler für den Mathematikunterricht in der Klasse 5 mitbringen sollten ...

Die meisten Schülerinnen und Schüler, die ich nach dem Wechsel von der Grundschule im Mathematikunterricht des 5. Jahrgangs begrüßen durfte, haben solide Grundlagen in den schriftlichen Rechenverfahren der vier Grundrechenarten.

Die Kopfrechenleistung im Kleinen 1 x 1 und insbesondere bei den Rechenmethoden für das Große 1 x 1 sind noch ausbaufähig. Der Umgang mit dem Lineal beim Messen von Strecken und beim Zeichnen einfacher geometrischer Figuren wird in den Grundschulen intensiv geübt. Wenn es nicht zwei Problembereiche geben würde, wäre ich sehr zufrieden mit der Vorbereitung durch die abgebenden Grundschulen.

Der erste Problembereich besteht in einer (teilweise extrem) ausgeprägten Abneigung gegenüber Textaufgaben. Für diesen Bereich wäre es hilfreich, wenn Textaufgaben möglichst früh mit positiv empfundenen Rechengeschichten (aus dem Alltag oder aus dem Märchen) eingeführt würden. Das Rechnen sollte sich aus den Rechengeschichten als motivierende Tätigkeit ergeben und nicht als „notwendiges Übel".

Der zweite Problembereich lässt sich mit dem Begriff Bedürfnisaufschub bei der Problemlösung umschreiben. Wenn die Schülerinnen und Schüler vor einem Problem stehen, sollten sie nicht gleich entscheidende Lösungshinweise (inhaltliche Lernhilfen) erhalten – auch wenn sie diese vehement einfordern, sondern zuerst ihre eigenen Fähigkeiten und bereits gelernten Lösungsheuristiken einsetzen und nur durch strategische Lernhilfen unterstützt werden: Was steht genau im Text? – Was ist die Frage? – Welche Informationen hast du bereits gegeben? – Hast du schon einmal eine ähnliche Aufgabe gelöst? Wie hast du das gemacht? – Was kannst du bereits, was dir bei diesem Problem hilft?

Je früher diese Problembereiche angegangen werden würden, desto leichter würde den Schülerinnen und Schülern der Übergang auf die weiterführenden Schulen fallen.

Jürgen Bock, Otto-Hahn-Gymnasium in Springe

Neben der Würdigung der ***inhaltlichen Kompetenzen***, die die Kinder aus dem Mathematikunterricht der Grundschule in der Regel mitbringen, thematisiert er bezogen auf ***allgemeine mathematische Kompetenzen*** im Bereich Problemlösen und Modellieren konkrete Desiderate an die Arbeit der Kolleginnen und Kollegen in der Grundschule, die durchaus konform gehen mit den Bildungsstandards im Fach Mathematik (2005).

Für Lehrerinnen und Lehrer an Grundschulen sowie an weiterführenden Schulen lohnend erscheint abschließend die Auseinandersetzung mit den Erwartungen von Schülerinnen und Schülern an den Mathematikunterricht ab der fünften Klasse.

4.2 Erwartungen und Wünsche von Viertklässlern an den Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen

Die Erhebung und Analyse der Erwartungen und Wünsche von Viertklässlern in Bezug auf den Mathematikunterricht im Übergang von der Grundschule zu den weiterführenden Schulen war das Ziel der Examensarbeit von Corinna Weiß und Elisa Zängerling (beide sind Lehramtsstudierende mit dem Schwerpunkt Grundschule an der Universität Oldenburg). Ausgangspunkt der Arbeit war die eher spärliche Literaturgrundlage zur Übergangsforschung. Im Gegensatz zu Arbeiten aus den 60er und 70er Jahren, die sich mit Problemen befassten, die sich aus Sicht der Lehrkräfte bei den Bemühungen ergaben die Übergangsquoten in die „höheren" Schullaufbahnen der Realschule und des Gymnasiums zu erhöhen (vgl. Koch, 2001), thematisieren aktuellere Arbeiten „nicht mehr so sehr, *dass* möglichst viele Kinder den Übergang in die höheren Schulen vollziehen, sondern wie sie diesen Übergang bewältigen" (Büchner & Koch, 2001, S. 22). Der einzelne Schüler rückt in den Mittelpunkt des Interesses und es wird betrachtet, wie der Übergangsprozess pädagogisch und didaktisch angemessen gestaltet werden kann. Bei diesen Arbeiten wird nur selten der internationale Kontext einbezogen, da der Übergang in Deutschland deutlich früher als in anderen Ländern stattfindet. Es gestaltet sich zudem schwierig, aufgrund der von Bundesland zu Bundesland unterschiedlichen Übergangsregelungen repräsentative Studien zur Übergangsthematik in Deutschland durchzuführen (ebd., S. 28). Empirische Studien, die Übergangserfahrungen von allen am Übergang beteiligten Gruppen (Kinder, Eltern und Lehrpersonen) quantitativ oder qualitativ untersuchen, sind gegenüber eher theoretisch orientierten Arbeiten zum Übergang von der Grundschule in die weiterführenden Schulen immer noch selten (ebd., S. 30). Eine solche in den 80er Jahren durchgeführte empirische Studie im Rahmen des „Hagener Übergangsprojektes" (Mitzlaff & Wiederhold, 1989) ergab, dass die Schülerinnen und Schüler dem Übergang durchaus mit gemischten Gefühlen entgegen sehen. Zwar wurden positive Erwartungen geäußert (i.w. bezogen auf das Erlernen einer ersten Fremdsprache und weitere neu hinzukommende Fächer), aber tendenziell diesbezüglich mehr Befürchtungen und Ängste ausgedrückt (ebd., S. 21). Ihre Befürchtungen und Ängste begründeten die Schüler u.a. mit dem Argument, dass es schwer werden würde – besonders in den neuen Fächern und in Mathematik (vgl. Wiederhold, 1991, S. 7).

Ausgehend von diesen Befunden entwickelten Corinna Weiß und Elisa Zängerling einen Fragebogen, der speziell den Übergang in Bezug auf den Mathematikunterricht thematisiert. Dieser Fragebogen (Bearbeitungszeit etwa 20 min) ist mit Einverständnis der beiden Verfasserinnen in der Anlage abgedruckt, um interessierten Lehrerinnen und Lehrern den Einsatz in ihren eigenen Klassen zu ermöglichen. Mit diesem Fragebogen befragten sie vor den Sommerferien 2005 insgesamt 245 Viertklässler (123 Mädchen und 122 Jungen) aus vier Grundschulen im Nordwesten Niedersachsens. Im Anschluss führten sie mit 31 dieser Kinder noch ein leitfadengestütztes Interview durch. Für dieses Interview wurden die Schüler ausgewählt, die in ihren Fragebögen besonders ausgeprägte Gefühle in Bezug auf den Schulwechsel zum Ausdruck brachten, Unzufriedenheit mit dem Mathematikunterricht der Grundschule und/oder der Lehrperson formulierten, starke mathematische Vorlieben oder Abneigungen artikulierten und unerwartete Inhalte/Themenbereiche einforderten.

Die Mehrheit der befragten Viertklässler scheint mit dem Mathematikunterricht der Grundschule zufrieden zu sein. Zu solch einem Ergebnis kamen sowohl Mitzlaff und Wiederhold (1989) als auch Büchner und Koch (2001) in ihren Studien. Über zwei Drittel der Viertklässler der Untersuchung von Weiß und Zängerling gaben ebenfalls an, ein gutes Verhältnis zu ihrer Mathematiklehrerin bzw. ihrem Mathematiklehrer in der Grundschule gehabt zu haben und mit ihrer bzw. seiner Erklärweise zufrieden gewesen zu sein. 12 % der Befragten gaben allerdings an, dass sie mit der Erklärweise der Lehrkraft eher unzufrieden sind. Auf Nachfrage im Rahmen der Interviews wurden diesbezüglich auch Verbesserungsvorschläge genannt:

> Hanna: *Ja, er sollt's langsamer machen und vielleicht mehr ähm wenn er's eben so erklärt, dass er's auch eben noch mal richtig, also noch mal erklärt, wenn welche nachfragen.*

Insgesamt äußerten die befragten Viertklässler sowohl in der schriftlichen Befragung mithilfe des Fragebogens als auch in den späteren Interviews gemischte Gefühle bezüglich des Mathematikunterrichts der weiterführenden Schulen. Bei der Mehrheit

der befragten Viertklässler scheint dabei Neugierde und Freude zu überwiegen, wobei sich die Jungen etwas neugieriger zeigten als die Mädchen.
Mehr als drei Viertel der befragten Kinder (78 %) gaben an, keine Angst vor dem zukünftigen Mathematikunterricht zu haben, während 11 % äußerten, dass ihnen der Gedanke an den Mathematikunterricht Angst machen würde. Jedoch erklärte fast die Hälfte der Kinder (44 %), dass sie in Bezug auf den zukünftigen Mathematikunterricht beunruhigt seien (40 % gaben allerdings an nicht beunruhigt zu sein). In diesem Zusammenhang ist vor allem die Verteilung in Bezug auf die Schulempfehlungen interessant. Die Schüler mit einer Gymnasialempfehlung zeigten sich im Durchschnitt weniger beunruhigt als die Schüler mit einer Real- bzw. Hauptschulempfehlung. Am beunruhigsten scheinen die Schüler mit einer Hauptschulempfehlung zu sein. In den Interviews konnten einige Gründe für diese Nervosität und Angstgefühle der Kinder in Erfahrung gebracht werden. Diese sind jedoch nicht nur im Hinblick auf den Mathematikunterricht zu sehen, sondern schließen mehrere Aspekte ein. So wurden beispielsweise die Trennung von der Grundschulklasse bzw. von den Klassenkameraden, die mögliche Verschlechterung der Mathematiknoten[2] oder auch die Unsicherheit vor dem, was auf sie zukommen wird, genannt.
Die Vorstellungen der befragten Viertklässler in Bezug auf die *Themen und Inhalte des Mathematikunterrichts der weiterführenden Schulen* erwiesen sich insgesamt als sehr unterschiedlich. Rund 40 % der Viertklässler gaben bei der schriftlichen Befragung an, dass sie überhaupt keine Vorstellung davon hätten, was im Mathematikunterricht inhaltlich auf sie zu kommen würde. Von den Viertklässlern, die eine Vorstellung bezüglich des zukünftigen Mathematikunterricht geäußert hatten, waren die meisten der Auffassung, dass der Unterricht schwerer werde. In den Interviews wurde diese Annahme ebenfalls bekräftigt.

I: Du hast angekreuzt, dass du Angst vor dem Matheunterricht hast, der kommt. Stimmt das so?

Franz: *Ich hab' Angst, dass das zu schwer für mich wird und dass ich da schlechte Noten schreibe.*

[2] Die Schüler, die diesen Aspekt nannten, sprachen nie von der Verschlechterung ihrer Leistungen, sondern immer nur von ihren Noten.

Es wurde allerdings auch deutlich, dass die erwartete Steigerung des Schwierigkeitsgrades nicht von allen Viertklässlern gleich beurteilt wurde, wie das Interview mit Claas zeigt:

> Claas: *Immer so langweilig* [bezogen auf den Mathematikunterricht der Grundschule, Anm. d. Verf.] *Brauch man sich gar nicht anstrengen.*
>
> I: Freust du dich denn darauf, dass du neuen Matheunterricht kriegst?
>
> Claas: *Nicht so richtig.*
>
> I: Nicht so richtig?
>
> Claas: *Vielleicht ist der dann nicht so langweilig.*

Die Auswertung in Bezug auf die Beantwortung der Frage, was die Kinder im Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen erwarten, ergab insgesamt folgendes Bild:

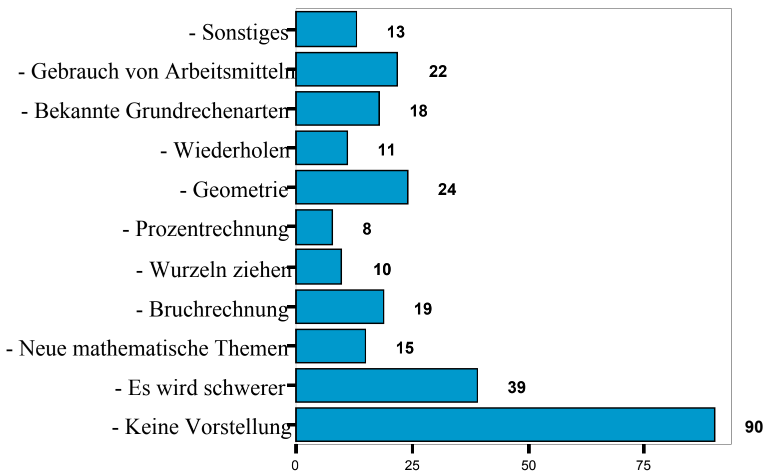


Abb. 6: Erwartete Themen und Inhalte des zukünftigen Mathematikunterrichts (n= 226, 19 von 245 Kinder haben die Frage nicht beantwortet)

Interessant ist, dass nur rund 8 % der befragten Kinder hinsichtlich ihrer Erwartungen an den Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen an das Rechnen mit Brüchen denken (vgl. dazu die Ausführungen in Kapitel 3.1).

Bei den Nennungen von Themen und Inhalten scheint vor allem die Schulempfehlung der Schüler eine Rolle zu spielen, dort ergaben sich teilweise bemerkenswerte Unterschiede. Nur Schüler mit einer Gymnasial- oder einer Realschulempfehlung nannten Inhalte wie Bruch- und Prozentrechnung, Wurzelziehen, Wahrscheinlichkeitsrechnung oder das Rechnen mit Variablen. Im Gegensatz dazu steht die Vermutung, die am häufigsten von den Schülern mit einer Hauptschulempfehlung genannt wurde, nämlich die Vorstellung, dass zunächst die Grundschulinhalte im zukünftigen Mathematikunterricht wiederholt werden.

Der Frage nach den erwarteten Themen und Inhalten stand die Frage nach den *individuellen Wünschen in Bezug auf mathematische Inhalte* gegenüber. Diese Frage beantworteten insgesamt nur knapp 40 % der Befragten (93 von 245 Kindern) positiv, in dem sie konkret Themen und Inhalte benannten, die sie lernen möchten (vgl. Abb. 7).

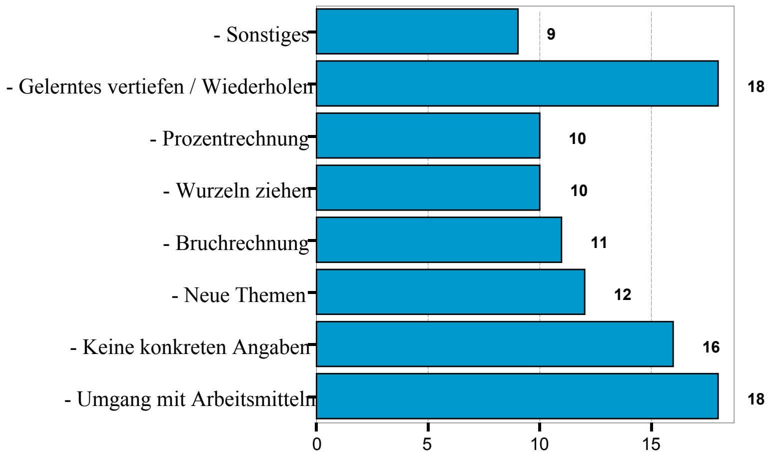


Abb. 7: Themen und Inhalte, die Viertklässler im Mathematikunterricht der neuen Schule lernen möchten (n = 93, Mehrfachnennungen möglich)

Prozent- und Bruchrechnung sowie Wurzel ziehen wurden dabei jeweils 10 bzw. 11 mal genannt. Einzelnennungen, die unter dem Oberbegriff „Neue Themen“ gefasst wurden, umfassten in erster Linie die Aspekte Primzahlen, Quersummen und Rechnen mit Variablen. Der Wunsch, bereits Gelerntes zu wiederholen, wird hierbei wiederum vornehmlich von den Schülern mit einer Hauptschulempfehlung geäußert, während die restlichen Themen vermehrt von Schülern mit einer Gymnasialempfehlung genannt wurden. Nennungen der Schülerinnen und Schüler, die unter dem Oberbegriff „Umgang mit Arbeitsmitteln“ zusammengefasst wurden, betreffen Rechnen mit Taschenrechner und/oder Computer und das Zeichnen mit dem Zirkel. Bei diesem Wunsch scheint das Geschlecht keine Rolle zu spielen. Bei der Betrachtung der Antworten unter Berücksichtigung der Schulempfehlungen werden allerdings Unterschiede deutlich. Je höher die Schulempfehlung der Schüler ist, desto größer scheint auch das Interesse der Schüler daran zu sein, den Umgang mit mathematischen Arbeitsmitteln zu erlernen: Während nur zwei Kinder mit einer Hauptschulempfehlung und sechs Kinder mit einer

Realschulempfehlung diesen Wunsch äußern, kommen zehn Nennungen von Schülerinnen und Schülern mit einer Gymnasialempfehlung.
Unterschiede in Bezug auf die Verteilung nach Geschlecht konnten lediglich in Bezug auf Prozentrechnung festgestellt werden, denn dieses Thema wurde häufiger von Mädchen angegeben. Auf Nachfrage während der Interviews erläuterten zwei Schülerinnen die Gründe für ihr Interesse an der Prozentrechnung wie folgt:

I: [...] Wo hast du denn das mit Prozenten gehört?

Anna: Mmm, das hör' ich immer oft, wie viel, wie ähm für Schuhe, 50% Rabatt. Und dann, dann kann ich das nicht ausrechnen. Das find' ich doof.

Katrin: *[...] und über Prozentrechnung.*

I: Was ist denn Prozentrechnung?

Katrin: *Ja, da ähm so, wenn man ähm Fett ist auch 'n bisschen so – 3,5% Fett, steht da immer auf der Milch drauf.*

I: Stimmt! Und was kann man damit rechnen?

Katrin: *Ja, und das interessiert mich auch schon so, wie das funktioniert und so.*

In der schriftlichen Befragung haben die Viertklässler sich nicht dazu geäußert, welche Unterrichtsmethoden sie in ihrem zukünftigen Mathematikunterricht erwarten. Ansatzweise gab es dazu aber Äußerungen während der Interviews, die nahe legen, dass die Kinder erwarten, dass der Mathematikunterricht der weiterführenden Schule – und besonders der Unterricht am Gymnasium – nicht mehr so spielerisch gestaltet sein wird wie der Unterricht in der Grundschule, wie z.B. Julia in ihrem Interview ausführte:

I: Glaubst du, dass ihr so was [Rechenspiele, Anm. d. Verf.] auf dem Gymnasium auch machen werdet?

Julia: *Nein.*

I: Wieso denn, wieso glaubst du, dass eher nicht ?

Julia: *Weil im Gymnasium da wird das ja nicht so spielerisch gemacht, glaube ich.*

I: Und warum nicht?

Julia: *Ja, weil wir dann eigentlich, glaube ich, fähig sein müssen, dann irgendwie die Sachen so zu verstehen.*

Insgesamt scheint es bedeutsam festzustellen, dass die Kinder, die bereits im Rahmen eines „Schnuppertages“ ihre zukünftige Schule besuchen und dort am Unterricht teilnehmen konnten, deutlich häufiger angaben, dass sie sich sehr auf den Mathematikunterricht freuen würden, als Schüler, die noch keinen solchen Schulbesuch gemacht hatten. Ferner ergaben die Befragungen, dass rund 70 % der Viertklässler den Besuch der neuen Schule vor dem Schulwechsel als wichtig erachten. Hier besteht offenbar ein Ansatzpunkt für die konkrete Gestaltung des Übergangs als gemeinsamer Aufgabe von Grund- und weiterführenden Schulen.

5. Literatur

Abels, Anke & Becker, Kathrin (2006). Erwartungen von Kindergarten zum Schulanfang bezogen auf das Fach Mathematik: Theoretische Grundlagen und empirische Befunde. Schriftliche Hausarbeit zur Prüfung für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen, Institut für Mathematik, Universität Oldenburg.

Büchner, Peter & Koch, Katja (2001). Von der Grundschule in die Sekundarstufe. Übergangsprozesse aus der Sicht von SchülerInnen und Eltern. Die Deutsche Schule, Heft. 2, S. 234-246.

Caluori, Franco (2004). Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern. Theoretische Modelle und empirische Befunde. Hamburg: Kovač.

Carraher, Terezina, Carraher, David & Schliemann, Analucia (1985). Mathematics in street and school. British Journal of Development Psychology, Heft 3, S. 21-29.

Eggert, Dietrich & Bertrand, Lucien (2002): RZI - Raum-Zeit-Inventar. Dortmund: Borgmann.

Faust-Siehl, Gabriele (2001). Konzept und Qualität im Kindergarten. In: Faust-Siehl, Gabriele & Speck-Hamdan, Anegelika. (Hrsg.). Schulanfang ohne Umwege (S. 53-79). Frankfurt/Main. Arbeitskreis Grundschule.

Faust, Gabriele, Götz, Margarete, Hacher, Hartmut & Roßbach, Günther (Hrsg.) (2004). Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich. Bad Heilbrunn. Klinkhardt.

Friedrich, Gerhard & de Galcóczy, Viola (2004^2). Komm mit ins Zahlenland. Freiburg/Breisgau: Christopherus im Verlag Herder.

Griebel, Wilfried & Niesel, Renate (2002). Abschied vom Kindergarten, Start in die Schule. Grundlagen und Praxishilfen für Erzieherinnen, Lehrkräfte und Eltern. München. Don Bosco.

Grüßing, Meike & Peter-Koop, Andrea (2006, im Druck). Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren. Offenburg: Mildenberger.

Hasemann, Klaus (2003): Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Jansen, Heiner, Mannhaupt, Gerd, Marx, Harald & Skowronek, Helmut (2002[2]). Bielefelder Screening zur Früherkennung von Lese-Rechtschreibschwierigkeiten. Göttingen: Hogrefe.

Koch, Katja (2001). Von der Grundschule in die Sekundarstufe. Band 2: Der Übergang aus der Sicher der Lehrerinnen und Lehrer. Opladen: Leske + Budrich.

Krajewski, Kristin (2003). Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Kovač.

Küspert, Petra, Schneider, Wolfgang (2000). Hören, Lauschen, Lernen. Sprachspiele für Kinder im Vorschulalter. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kultusministerkonferenz (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München: Luchterhand.

Lorenz, Jens Holger (1987). Lernschwierigkeiten und Einzelfallhilfe. Göttingen: Hogrefe.

van Luit, Johannes & van de Rijt, Bernadette (1995). Rekenhulp voor kleuters. Doetichem: Graviant.

van Luit, Johannes, van de Rijt, Bernadette & Hasemann, Klaus (2001). Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Göttingen: Hogrefe.

Milz, Ingeborg. (1993). Rechenschwächen erkennen und behandeln. Dortmund: Borgmann.

Mitzlaff, Hartmut & Wiederhold, Karl (1989). Gibt es überhaupt „Übergangsprobleme“? Erste Ergebnisse aus einem Forschungsprojekt. In: Portmann, Rosemarie, Wiederhold, Karl & Mitzlaff, Hartmut (Hrsg.). Übergänge nach der Grundschule (S. 12-41). Frankfurt/Main: Arbeitskreis Grundschule.

Müller, Gerhard & Wittmann, Erich (2002). Das kleine Zahlenbuch, Bd. 1: Spielen und Zählen. Seelze: Kallmeyer.

Müller, Gerhard & Wittmann, Erich (1984[3]). Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig: Vieweg.

Peter-Koop, Andrea & Grüßing, Meike (2006, im Druck). Mathematische Bilderbücher – Kooperation zwischen Elternhaus, Kindergarten und Grundschule. In: Grüßing, Meike & Peter-Koop, Andrea (Hrsg.). Die Entwicklung mathematischen Dankens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren. Offenburg: Mildenberger.

Peter-Koop, Andrea (2003). „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?” Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen. In: Ruwisch, Silke & Peter-Koop, Andrea (Hrsg.). Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule (S. 111-130). Offenburg: Mildenberger.

Radatz, Hendrik, Schipper, Wilhlem, Dröge Rotraud & Ebeling, Astrid (1996ff). Handbuch für den Mathematikunterricht im 1., 2., 3., 4. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Schipper, Wilhelm (2002²). „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen.“ Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In: Peter-Koop, Andrea (Hrsg.). Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule (S. 119-140). Offenburg: Mildenberger.

Weiß, Corinna & Zängerling, Elisa (2006). Erwartungen von Viertklässlern zum Schulübergang bezogen auf das Fach Mathematik: Theoretische Grundlagen und empirische Befunde. Schriftliche Hausarbeit zur Prüfung für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen, Institut für Mathematik, Universität Oldenburg.

Wiederhold, Karl (1991). Der Übergang von der Grundschule zu den weiterführenden Schulen – ein Problembereich für Kinder, Eltern, Lehrer. Der Mathematikunterricht, Heft 3. S. 6-19.

Winter, Heinrich (1994). Sachrechnen in der Grundschule. Bielefeld: Cornelsen.

6. Anhang

Fragebogen zum Übergang Grundschule – weiterführende Schule

Nach den Sommerferien kommst du in die fünfte Klasse. Uns interessiert, was du in Bezug auf den Schulwechsel für Erwartungen hast. Ganz besonders geht es uns dabei um das Fach Mathematik. Bevor wir Fragen zu deiner neuen Schule stellen, würden wir gerne etwas über deinen Matheunterricht an der Grundschule erfahren.

Mein Vorname ist ______________________________

---

1. Ich bin _________ Jahre alt.

2. Ich bin ☐ ein Junge.
☐ ein Mädchen.

3. An meinem Matheunterricht in der Grundschule gefällt mir gut, ...

a) … was wir machen.

Stimmt genau ☺ ☺ ☺ ☹ ☹ Stimmt gar nicht

b) … wie wir arbeiten.

Stimmt genau ☺ ☺ ☺ ☹ ☹ Stimmt gar nicht

c) … wie mein Mathelehrer erklärt.

Stimmt genau ☺ ☺ ☺ ☹ ☹ Stimmt gar nicht

d) … wie ich mich mit meinem Mathelehrer verstehe.

Stimmt genau ☺ ☺ ☺ ☹ ☹ Stimmt gar nicht

4. Welche Arbeitsmittel habt ihr bisher im Matheunterricht benutzt?
(Hier darfst du mehrere Kästchen ankreuzen.)

☐ Computer ☐ Taschenrechner

☐ Geodreieck ☐ Zirkel

☐ Lineal ☐ Etwas anderes: ______________________

____

5. Was hat dir im Matheunterricht besonders gut gefallen?

____

____

____

____

____

6. Was hat dir im Matheunterricht überhaupt nicht gefallen?

____

____

____

____

____

7. Gibt es etwas, das du unbedingt im Matheunterricht an deiner neuen Schule lernen möchtest?

☐ Ja: ____

____

____

____

____

☐ Nein

8. Was glaubst du, was ihr auf der neuen Schule im Matheunterricht machen

werdet?____

____

____

____

9. Von wem hast du bisher etwas über deinen zukünftigen Matheunterricht erfahren? **(Hier darfst du mehrere Kästchen ankreuzen.)**

☐ von meinem Mathelehrer aus der Grundschule

☐ von anderen Lehrern

☐ von meinen Eltern

☐ von meinen Geschwistern

☐ von Freunden

☐ von niemandem

☐ von jemand anderem:____

10. Wie fühlst du dich, wenn du an den Matheunterricht an der neuen Schule denkst?

a) Ich bin neugierig darauf.

Stimmt genau — Stimmt gar nicht

b) Ich bin nervös.

Stimmt genau — Stimmt gar nicht

c) Ich freue mich darauf.

Stimmt genau — Stimmt gar nicht

d) Ich habe Angst davor.

Stimmt genau — Stimmt gar nicht

11. Warst du schon einmal an deiner neuen Schule?

☐ Ja ☐ Nein

12. Es ist für mich wichtig, meine neue Schule vor dem nächsten Schuljahr zu besuchen.

Stimmt genau — Stimmt gar nicht

13. Bevor das neue Schuljahr beginnt, würde ich gerne mehr erfahren über…

a) … das Schulgebäude.

Stimmt genau Stimmt gar nicht

b) … meinen Klassenlehrer.

Stimmt genau Stimmt gar nicht

c) … meinen Mathelehrer.

Stimmt genau Stimmt gar nicht

d) … das, was wir im Matheunterricht machen.

Stimmt genau Stimmt gar nicht

e) … die Art, wie wir im Matheunterricht arbeiten.

Stimmt genau Stimmt gar nicht

f) …etwas anderes:____

____

Vielen Dank!

Partner des Programms SINUS-Transfer Grundschule

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS-Transfer Grundschule
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-grundschule.de

Programmkoordination für die Länder durch das Ministerium für Bildung und Frauen des Landes Schleswig-Holstein (MBF)
MR Werner Klein (SINUS-Transfer Grundschule)
http://landesregierung.schleswig-holstein.de

Landeskoordinatorenausbildung durch das Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
StD Christoph Hammer; gemeinsam mit dem IPN
www.isb.bayern.de

Serverbetreuung: Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts der Universität Bayreuth (Z-MNU)
Leitung: Prof. Dr. Peter Baptist
http://zmnu.uni-bayreuth.de

Hinweis: Die Modulbeschreibungen sind während der Laufzeit des Programms SINUS-Transfer Grundschule (2004-2009) entstanden.
Die Liste der Kooperationspartner galt für diesen Zeitraum. Im Nachfolgeprogramm *SINUS an Grundschulen* sind die Kooperationen anders strukturiert.

ISBN für diese Modulbeschreibung (Mathematik G10)
978-3-89088-189-8