SH

Schleswig-Holstein
Ministerium für Bildung,
Wissenschaft und Kultur

Leitfaden zu den Fachanforderungen Mathematik

Primarstufe/Grundschule

Schleswig-Holstein. Der echte Norden.

Impressum

Herausgeber: Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein
Brunswiker Straße 16 -22, 24105 Kiel
Kontakt: pressestelle@bimi.landsh.de
Layout: Stamp Media GmbH, Agentur für Kommunikation & Design, Medienhaus Kiel, Ringstraße 19, 24114 Kiel, www.stamp-media.de
Druck: Schmidt & Klaunig, Druckerei & Verlag seit 1869, Medienhaus Kiel, Ringstraße 19, 24114 Kiel, www.schmidt-klaunig.de
Kiel, März 2019
Die Landesregierung im Internet: www.schleswig-holstein.de

Diese Druckschrift wird im Rahmen der Öffentlichkeitsarbeit der schleswig-holsteinischen Landesregierung herausgegeben.
Bestellungen können unter www.fachanforderungen.de aufgegeben werden.

Diese Druckschrift wird im Rahmen der Öffentlichkeitsarbeit der schleswig-holsteinischen Landesregierung herausgegeben. Sie darf weder von Parteien noch von Personen, die Wahlwerbung oder Wahlhilfe betreiben, im Wahlkampf zum Zwecke der Wahlwerbung verwendet werden. Auch ohne zeitlichen Bezug zu einer bevorstehenden Wahl darf die Druckschrift nicht in einer Weise verwendet werden, die als Parteinahme der Landesregierung zugunsten einzelner Gruppen verstanden werden könnte. Den Parteien ist es gestattet, die Druckschrift zur Unterrichtung ihrer eigenen Mitglieder zu verwenden.

Leitfaden zu den Fachanforderungen Mathematik

Primarstufe/Grundschule

Inhalt

I Einleitung

Die Fachanforderungen geben für den Mathematikunterricht der Grundschulen einen verbindlichen Rahmen. Dieser Leitfaden konkretisiert diesen Rahmen in den vier wesentlichen Bereichen: Lernumgebungen, Didaktische Leitlinien, schulinternes Fachcurriculum und Leistungsbeurteilung.

Als besonders geeignet, um Schülerinnen und Schülern individuelle Kompetenzerweiterungen zu ermöglichen und dennoch am gemeinsamen Inhalt zu arbeiten, benennen die Fachanforderungen den Einsatz von Lernumgebungen. Diese sind durch substanzielle Aufgabenformate gekennzeichnet und werden exemplarisch in den Inhaltsbereichen Zahlen und Operationen, Daten, Zufall und Kombinatorik sowie Größen und Messen illustriert.

Die in den Fachanforderungen aufgeführten didaktischen Leitlinien *Grundvorstellungen, Differenzierung, Einsatz von Anschauungsmaterial, Digitale Medien* sowie *Überlegungen zur Eingangsdiagnostik* werden im zweiten Abschnitt vertieft und auf Unterrichts- und Aufgabenebene dargestellt.

Die Lehrkräfte der Fachkonferenz entwickeln schrittweise zur Konkretisierung der Fachanforderungen ein schulinternes Fachcurriculum. Der Leitfaden bietet praxisbezogene Hinweise zur Entwicklung schulinterner Fachcurricula, um diese zu einem Werkzeug für die Unterrichtsplanung und -entwicklung werden zu lassen.

Eine Anleitung zur Gestaltung von Klassenarbeiten, die differenzierte Aufgaben enthalten, erläutert abschließend verschiedene Modelle und Kriterien und verdeutlicht sie an exemplarischen Ausschnitten aus Klassenarbeiten.

II Lernumgebungen

1 Lernumgebung „Summen im Hunderterfeld“

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, das Addieren von zwei oder mehr Zahlen zu üben. Die Lernumgebung „Summen im Hunderterfeld“ gibt darüber hinaus Anlass zum Aufstellen und Interpretieren von Termen. Man legt Pentominos oder kleinere Formen aus zwei bis vier Quadraten auf das Hunderterfeld und betrachtet die Summen der abgedeckten Zahlen. Die kleineren Formen können sprachlich vereinfacht Zwillinge, Drillinge und Vierlinge genannt werden.

Bild **I** Bild **II**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Mögliche Aufgabenstellungen:

Lege den I-Drilling wie in Bild **I** auf das Hunderterfeld. Es entsteht die Additionsaufgabe 11 + 12 + 13. Berechne das Ergebnis.

Verschiebe den I-Drilling um ein Feld nach rechts. Verschiebe den Drilling um mehrere Felder nach rechts. Wie verändert sich jeweils das Ergebnis?

Lege den I-Drilling wie in Bild **II** auf das Hunderterfeld. Es entsteht die Additionsaufgabe 10 + 20 + 30. Berechne das Ergebnis.

Verschiebe den I-Drilling um ein Feld nach links. Verschiebe den Drilling um mehrere Felder nach links. Wie verändert sich jeweils das Ergebnis?

Kann der waagerechte I-Drilling die gleiche Summe besitzen wie der senkrechte I-Drilling?

Lege beide Drillinge eine Zeile weiter unten auf das Hunderterfeld. Untersuche, wie sich das auswirkt.

Bild **I** Bild **II**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Differenzierung mit dem gleichen Material:

Wird der Zwilling in der erste Reihe gelegt, kann mit der Addition von Nachbarzahlen im Zahlenraum bis 20 das Rechnen mit Zehnerübergang geübt werden.

Auch auf niedrigerem Niveau muss sich das Lernen nicht auf Reproduktionsleistungen beschränken. Es sind ebenfalls Entdeckungen möglich:

- In waagerechter Lage ist die Summe der abgedeckten Zahlen stets ungerade.
- Verschiebt man den Zwilling um ein Feld nach rechts, wächst die Summe um 2.
- In senkrechter Lage ist die Summe der abgedeckten Zahlen stets gerade.
- Verschiebt man den Zwilling um eine Zeile nach unten, wächst die Summe um 20.

Ein Vergleich mit den entsprechenden Erkenntnissen für den I-Drilling bietet sich an.

Quelle: Helmut Mallas, IQSH

Diese Lernumgebung vernetzt arithmetische mit geometrischen Fragestellungen und ermöglicht den Umgang mit Termen auf den drei Darstellungsebenen (EIS-Prinzip). In natürlicher Weise wird das Übersetzen zwischen bildlichen Darstellungen, Termen und Handlungen, z. B. Legen, Verschieben oder Drehen von Formen, nahegelegt. Zugleich gibt es sehr viele Anlässe zum Rechnen.

Die mathematische Situation gewährleistet den inneren Zusammenhang der Aufgaben und ermöglicht auch bei starker Differenzierung das Lernen am gleichen Gegenstand. Die Aufgaben können selbstdifferenzierend formuliert werden, zum Beispiel: „Wähle eine Form aus und lege sie auf das Hunderterfeld.“, dann sollten jedoch die Auswahlmöglichkeiten an Formen durchdacht zusammengestellt werden.

Vielfältiges Üben lädt zugleich zum Entdecken, Problemlösen und Argumentieren ein

Ein Ziel ist es, Gesetzmäßigkeiten für die Änderung der Summe beim horizontalen und vertikalen Verschieben sowie deren Kombination schrittweise zu entdecken und als Regel zu beschreiben. Da die Additionsaufgaben Forscherfragen beantworten, wird zugleich an einer Vielzahl von Summentermen das Addieren geübt. In diesem Sinne ist eine Umkehrung der Fragestellung ergiebig, beispielweise „Kannst du mit dem I-Drilling die Summe 135 abdecken?“. Außer dem unsystematischen und dem systematischen Probieren sind vor allem zwei weitere Strategien denkbar. Die Verschiebung eines Drillings um ein Feld nach rechts vergrößert die Summe um 3 und bei einer Verschiebung eine Zeile nach unten um 30. Man kann von der kleinsten Summe $1 + 2 + 3 = 6$ ausgehen und den Drilling drei Felder nach rechts bewegen (neue Summe $6 + 3 \times 3 = 15$) sowie vier Zeilen nach unten (gesuchte Summe $15 + 4 \times 30 = 135$). Möglicherweise entdecken einzelne Lernende die Teilbarkeit aller Summen des I-Drillings durch 3 und errechnen mit der Division $135 : 3 = 45$ die Position auf dem Hunderterfeld. Es ist jedoch nicht intendiert, diese Entdeckung schnellstmöglich als Lösungsverfahren zum verpflichtenden Lernstoff für alle Schülerinnen und Schüler zu machen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Mögliche Aufgabenstellungen:

Kannst du mit dem I-Drilling die Summe 135 abdecken?

Decke mit dem L-Drilling und mit dem I-Drilling die Summe 48 ab.

Unterstützt durch geeignete Impulse wie „Lege den Drilling ganz an den Rand!“ können zur Differenzierung vielfältige Forscherfragen untersucht werden:

Welche Summen sind mit dem I-Drilling möglich?

Für welche Summen gibt es zwei verschiedene Lösungen?

Welche Summen kannst du auf mehrere Arten mit dem L-Drilling und mit dem I-Drilling darstellen?

Es gibt vier Möglichkeiten, den L-Drilling zu drehen. Untersuche, wie sich die Summe der abgedeckten Zahlen beim Drehen ändert.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Rechenvorteile systematisch üben:

Berechne die Summe der abgedeckten Zahlen:

X-Pentomino: 5 + 14 + 15 + 16 + 25

Z-Pentomino, Ausgangslage: 44 + 45 + 55 + 65 + 66

Z-Pentomino, 90°-Drehung: 64 + 54 + 55 + 56 + 46

Z-Pentomino, umgeklappt: 46 + 45 + 55 + 65 + 64

umgeklappt und gedreht: 44 + 54 + 55 + 56 + 66

I-Pentomino: 83 + 84 + 85 + 86 + 87

Erkläre, wie du Rechenvorteile nutzen kannst.

Wie verändern sich die Summanden, wenn das Pentomino ein Feld weiter rechts liegt?

Wie verändern sich die Summanden, wenn das Pentomino eine Zeile weiter unten liegt?

Quelle: Helmut Mallas, IQSH

Zur Differenzierung bieten sich wiederum auf der einen Seite der Zwilling sowie kleinere Summen an, auf der anderen Seite scheint der Einsatz komplexerer Formen naheliegend. Wenn der überwiegende Teil der Lerngruppe aber noch mit dem I-Drilling arbeitet, ist es für die Differenzierung günstiger, das mathematische Thema zunächst mit weitergehenden Fragen zu dieser Form auszuloten: „Welche Summen sind mit dem I-Drilling möglich? Für welche Summen gibt es zwei verschiedene Lösungen?“. Dagegen bringt der Einsatz zu vieler verschiedener Formen für die im Prinzip immer gleiche Fragestellung das Problem mit sich, beim Besprechen von Lösungen auf zu viele Details eingehen zu müssen, die das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten erschweren können. Sind für einzelne Lernende die Fragen zum I-Drilling ausgereizt, kann das Umfeld mit dem L-Drilling weiter erforscht werden, bevor Pentominos zum Einsatz kommen.

Unter den Pentominos sind die punktsymmetrischen Formen I, X und Z die einfachsten. Die zugehörigen Summenterme eignen sich dazu, die Nutzung von Rechenvorteilen systematisch zu üben. Im abgebildeten Beispiel ist 14 + 16 = 5 + 25 = 30 = 2 × 15. Durch Nutzung von Zahlbeziehungen wie *„eins mehr als 15"* und *„eins weniger als 15"* sowie *„zehn mehr als 15"* und *„zehn weniger als 15"* können die Lernenden entdecken, dass bei allen punktsymmetrischen Pentominos die Summe der abgedeckten Zahlen das Fünffache der mittleren Zahl ist und versuchen, entsprechende Begründungen zu entwickeln.

Beim Besprechen der Lösungen im Plenum sollten die Lehrkräfte betont Klammern setzen um Rechenvorteile hervorzuheben. Während Klammern allzu oft den Anschein schwer einsehbarer Rechenvorschriften erwecken, zeigen sie hier in natürlicher Weise ihren Nutzen als Strukturierungshilfe.

Sachgerechter Umgang mit Termen und Gleichungen

Im Verlauf der Sekundarstufe I kapitulieren viele Lernende vor Termen und Gleichungen mit Variablen. Jedoch ist nicht das Rechnen mit Buchstaben anstelle von Zahlen das entscheidende Problem, es ist der Umgang mit Termen an sich. Oft sind die Lernenden ausschließlich auf *„das Ergebnis der Aufgabe"* (den Wert des Terms) fokussiert. Bereits der Umgang mit Termen, die mehr als zwei Zahlen verknüpfen, bereitet ihnen Schwierigkeiten.

Beispiel	
24 + 25 + 35 = 25 + 35 = 60 = 24 + 60 = 84 Das Protokoll dieser Rechnung ist trotz des richtigen Endergebnisses fachlich falsch.	24 + 25 + 35 = 24 + (25 + 35) = 24 + 60 = 84 Gleichungsketten nehmen den gesamten Term in den Blick. Es empfiehlt sich, die rechte Seite frei zu lassen, um später eine optische Unterscheidung von Äquivalenzumformungen bei Gleichungen zu erleichtern. Alternativ kann in jeder Zeile rechts nachträglich der Wert des Terms notiert werden.
25 + 35 = 60. 24 + 60 = 84 Halbschriftliches Rechnen: Das Zerlegen der Rechnung in Teilschritte umgeht das Problem mit dem Gleichheitszeichen beim Umgang mit drei oder mehr Zahlen.	

Das Gleichheitszeichen muss als Relationszeichen verstanden werden, mit dem man ausdrückt, dass zwei Terme den gleichen Wert haben. Im Beispiel kann ein Verweis auf den L-Drilling dabei helfen, stets alle drei Zahlen im Blick zu behalten: „Du bestimmst die Summe der drei abgedeckten Zahlen. Wenn du eine der drei Zahlen weglässt, ist der Wert zu klein."

Werden Zwischenergebnisse beim schrittweisen Berechnen in einer Gleichungskette notiert, offenbart sich häufig ein falsches Verständnis des Gleichheitszeichens. Es wird als eine Art Befehl zum Ausrechnen verstanden, für den jeweils alle Zahlen des Terms ausgeblendet werden, die in den Rechenschritt nicht eingehen. Später werden sie meist wieder eingeblendet wie im Beispiel die 24. Eine so aufgeschriebene Rechnung ist trotz eines richtigen Endergebnisses mathematisch falsch. Diese Schwierigkeiten könnten dazu verleiten, auf das Protokollieren von Rechnungen in Form von Gleichungsketten gänzlich zu verzichten. Halbschriftliche Verfahren sind außerordentlich sinnvoll. Die Rechnung wird in Teilschritte zerlegt strukturiert und korrekt aufgeschrieben. Dieses Vorgehen ist vor allem zur Lösung von Sachaufgaben empfehlenswert. Man „setzt jeweils neu an", erspart sich das Aufstellen eines umfangreichen Terms und umgeht das im Beispiel dargestellte Problem des falschen Gebrauchs von Gleichheitszeichen. Jedoch nimmt dieses Vorgehen den Term insgesamt nicht so gut in den Blick. Deshalb muss auch das Protokollieren einer mehrschrittigen Rechnung mit Gleichungsketten kultiviert werden. Beim Umgang mit konkreten Zahlen in der Grundschule bereitet diese Art, den Lösungsweg korrekt aufzuschreiben und dabei die

Vorgehensweise sichtbar zu machen, auf das formale Arbeiten in der Sekundarstufe I vor.

Rechenmauern sind ein ausgezeichnetes Aufgabenformat für den Umgang mit Zahlen. Mauersteine für Zwischen- und Endergebnisse befreien beim Üben und Problemlösen von formalen Zwängen. Hier wäre das Aufschreiben einer Rechnung als Gleichungskette umständlich und unnatürlich. Dagegen bieten Pentominos im Hunderterfeld einen natürlichen Anlass, das formal richtige Aufschreiben von Termen zu thematisieren. Bei manchen Pentominos ist es erstaunlich, dass verschiedene Summen den gleichen Wert haben – das ist eine Motivation für das Setzen eines Gleichheitszeichens. Dabei ist die Richtigkeit der Aussage „beide Summen haben den gleichen Wert“ nicht immer auf den ersten Blick erkennbar. Dies bietet Anlass, Klammern zu setzen und Zwischenergebnisse zu betrachten. Dabei können Zwischenergebnisse mitunter viel aufschlussreicher sein als zwei gleiche Endergebnisse, deren Zustandekommen es zu erklären gilt.

Beispiel

Lege das Pentomino jeweils passend auf das Hunderterfeld. Erkläre, warum beide Summen den gleichen Wert haben. Kannst du mit diesem Pentomino noch andere Summen mit dem Wert 275 darstellen?

44 + 45 + 55 + 65 + 66 = (44 + 66) + 55 + (45 + 65) = 110 + 55 + 110	46 + 45 + 55 + 65 + 64 = (46 + 64) + 55 + (45 + 65) = 110 + 55 + 110

Das Z-Pentomino liegt mit dem mittleren Quadrat auf der Zahl 55. Die Terme beschreiben, wie sich ein Umklappen (zeichnerisch: die spiegelbildliche Form) auswirkt. Der Wert des Terms („das Ergebnis“) könnte zwar als Begründung herangezogen werden, trägt aber zur Erklärung wenig bei. Erst durch die Zwischenergebnisse wird einsehbar, warum die Summe der vom Z abgedeckten Zahlen trotz verschiedener Lage den gleichen Wert hat.

Häufig ist unklar, ob mit Summe der Term oder sein Wert gemeint ist. Weil es sprachlich etwas umständlich ist, vom „Wert der Summe“ zu sprechen, wird in den Aufgabenbeispielen vereinfachend das Wort „Ergebnis“ verwendet. Wenn die Bezeichnung „verschieden“ für Summen mit dem gleichen Wert befremdlich erscheint, kann auch von verschiedenen Termen gesprochen werden.

Beim Arbeiten mit Summen im Hunderterfeld ist es – wie bei allen Lernprozessen – notwendig, den Lernenden genügend Zeit zu lassen. Nur so kommen die Vorzüge der Lernumgebung zum Tragen. Beim intelligenten Üben ist das Rechnen auf ein Ziel fokussiert, beispielsweise eine weitere Position des Z-Pentominos für die Summe 275 zu finden. Beim Bearbeiten der Aufgaben wird eine Vielzahl von Rechenvorgängen ausgeführt und somit geübt. Wenn parallel dazu Entdeckungen gemacht werden, so ist dies ein didaktischer Mehrwert, der anfallen kann, aber nicht anfallen muss. Es wäre kontraproduktiv, mit allen Lernenden das entdeckte Vorgehen in Form eines Verfahrens einzuüben. Es ist sinnvoller, wenn die Lernenden selbst ihre Entdeckungen vorstellen. Dies gibt Anlass, gemeinsam Regeln zu formulieren und nach Begründungen zu suchen – mathematisch Kommunizieren und Argumentieren. So wird der Erwerb allgemeiner mathematischer Kompetenzen in das inhaltliche Arbeiten mit Summentermen eingebettet.

Ein Einsatz dieser Lernumgebung erlaubt es, mehrere unterrichtliche Ziele zugleich zu verfolgen: Üben der Addition, Rückwärtsrechnen, Umgang mit Termen und den Rechengesetzen, Umgang mit mathematischen Darstellungen, Problemlösen und Argumentieren.

Literatur: Hirt, U. / Wälti, B., Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte – Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht Band 2, 2008

2 Eine Lernumgebung für die Kombinatorik in der Grundschule

Kombinatorische Fragestellungen bieten herausfordernde und ergiebige Problemstellungen für Schülerinnen und Schüler in allen Jahrgangsstufen. In der Grundschule beschäftigen wir uns in erster Linie mit den folgenden kombinatorischen Grundmustern:

Auswahl (Kombination): Bei der Auswahl spielt die Reihenfolge der Elemente keine Rolle. Ein typisches Beispiel sind die Lottozahlen. Hier ist es unerheblich, in welcher Reihenfolge die Zahlen gezogen werden.

Anordung (Variation): Bei der Anordnung ist die Reihenfolge bedeutsam. Ein typisches Beispiel ist die PIN-Nummer der Bankkarte. Hierbei ist es von Bedeutung, in welcher Reihenfolge die Zahlen eingegeben werden.

Für beide Modelle können zudem Wiederholungen zugelassen oder ausgeschlossen werden. Bei dem Beispiel zur Auswahl, dem Lottospiel, ist eine Wiederholung ausgeschlossen, weil es jede Zahl nur einmal im Spiel gibt und die gezogenen Kugeln nicht wieder zurückgelegt werden können.

Bei der PIN-Nummer dagegen ist eine Wiederholung zulässig, denn natürlich kann eine Ziffer in einem PIN mehrfach auftauchen.

Es ergeben sich folglich vier verschiedene für die Grundschule relevante kombinatorische Grundmuster:

	ohne Wiederholung	**mit Wiederholung**
Auswahl (Kombination)	• Reihenfolge wird nicht beachtet • Keine Wiederholung der Elemente Beispiel: Lotto	• Reihenfolge wird nicht beachtet • Wiederholung der Elemente ist möglich Beispiel: Eiskugeln
Anordnung (Variation)	• Reihenfolge wird beachtet • Keine Wiederholung der Elemente Beispiel: Platzierung bei einem Sportturnier	• Reihenfolge wird beachtet • Wiederholung der Elemente ist möglich Beispiel: PIN

Bereits in der Eingangsphase werden einfache kombinatorische Fragestellungen mit den Schülerinnen und Schülern behandelt. Zunächst steht dabei das zunehmend systematische Probieren und das Finden geeigneter und übersichtlicher Darstellungsformen im Mittelpunkt. Natürlich muss auch dabei thematisiert werden, unter welchen Bedingungen (Beachtung oder Nichtbeachtung der Reihenfolge und Zulassen oder Ausschluss von Wiederholungen) zwei Möglichkeiten gleich bzw. verschieden sind. Die verschiedenen Modelle werden jedoch nicht systematisch thematisiert.

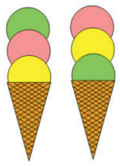
Dies tritt ab Jahrgangsstufe 3 stärker in den Vordergrund. Nun sollen mit den Schülerinnen und Schülern Referenzmodelle erarbeitet werden, die im weiteren Verlauf das Auffinden und Nutzen von Analogien zu einer zielführenden heuristischen Strategie machen.

Um die verschiedenen Modelle mit den Lernenden systematisch zu thematisieren, bietet sich eine Aufgabenstellung an, an der man die verschiedenen Bedingungen und deren Auswirkungen auf die Anzahl der Möglichkeiten aufzeigen kann. Dies ist bei der Lernumgebung „Eiskugeln“ der Fall.

Die kombinatorische Lernumgebung „Eiskugeln"

Die 23 Schülerinnen und Schüler der Klasse 3c sind auf einem Ausflug und kommen mit ihrer Lehrerin an einem Eisladen vorbei. Es werden vier Eissorten angeboten: Vanille, Erdbeer, Apfel und Blaubeere. Die Lehrerin bestellt für jedes Kind ein Eis mit drei Kugeln. Dabei soll jedes Eis unterschiedlich sein.

1. Es soll keine Eissorte in einem Eis doppelt oder dreifach vorkommen. Die Reihenfolge ist egal. Finde alle Möglichkeiten.
2. Moritz mag am liebsten Vanilleeis und Sophia Erdbeereis. Beide möchten gerne mindestens zwei Kugeln ihrer Lieblingssorte haben.
   Finde alle Möglichkeiten, wenn jede Eissorte auch mehrfach vorkommen kann.
   Warum sind das alle? Begründe.
3. Tina sagt: „Mir ist es ganz wichtig, dass meine Lieblingssorte ganz unten in der Waffel ist, damit ich das Beste zum Schluss essen kann." Geht es dir auch so?
   Dann ist es wichtig, in welcher Reihenfolge, die Kugeln in der Waffel gefüllt werden.
   Beispiel: *Diese beiden Eiswaffeln sind verschieden.*

   Finde nun alle Möglichkeiten für drei Kugeln, wenn du die Reihenfolge unterscheidest. Es soll keine Eissorte in einem Eis doppelt oder dreifach vorkommen.
   Wie gehst du geschickt vor, um alle Möglichkeiten zu finden? Warum sind das alle?
   Vergleiche deine Vorgehensweise mit deinem Partner.

★4. Nun sollt ihr gemeinsam alle Möglichkeiten finden, bei der die Reihenfolge der Kugeln wichtig ist und jede Eissorte auch mehrfach vorkommen darf. Überlegt euch zunächst, wie ihr die Arbeit gut unter euch aufteilen könnt, damit ihr nicht die gleichen Kombinationen aufschreibt.

Quelle: Christiane Meerstein, IQSH

Allgemeine mathematische Kompetenzen

Mit dieser Aufgabe können vielfältige inhaltsbezogene und allgemeine mathematische Kompetenzen erworben und vertieft werden.

a) Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler werden angeregt, die vorliegende problemhaltige Aufgabe eigenständig zu bearbeiten. Dazu müssen sie eigene Lösungsstrategien entwickeln. Das zunächst vielleicht noch unsystematische Probieren muss einer selbst gefundenen Systematik Platz machen, damit die Aufgabe erfolgreich bearbeitet werden kann. Dabei können gewonnene Erkenntnisse aus bereits bearbeiteten Aufgabenteilen gewinnbringend für die Weiterarbeit genutzt werden.

b) Kommunizieren und Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler sind aufgefordert, zu begründen, warum sie sicher sein können, alle Möglichkeiten gefunden zu haben. In der 3. Aufgabe erfolgt eine Phase gemeinsam in Partnerarbeit bei der die eigene Vorgehensweise beschrieben und die der Partnerin/des Partners nachvollzogen werden muss. Ein Vergleich der Vorgehensweisen mit dem Ziel der Reflexion und Optimierung der eigenen Lösungsstrategie ist eine sinnvolle Konsequenz.

In der 4. Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler gemeinsam in Partnerarbeit arbeiten. Dabei werden sie explizit aufgefordert, sich über eine sinnvolle Arbeitsteilung Gedanken zu machen.

c) Darstellen

Nach der einfachen und übersichtlichen Einstiegsaufgabe, bei der nur 4 verschiedene Möglichkeiten zu finden sind, muss in Aufgabe 2 eine Systematik gefunden werden, um einen Überblick über die bereits gefundenen Möglichkeiten zu behalten. Dabei kann die eigene Darstellung mit der Darstellung der Mitschülerinnen und Mitschüler verglichen und bezüglich der Übersichtlichkeit bewertet werden.
Da unterschiedliche Materialien für die Bearbeitung zur Verfügung gestellt werden, müssen die Repräsentationsebenen gewechselt werden.

Differenzierung

Die Lernumgebung bietet gute Möglichkeiten der Differenzierung, wobei alle Schülerinnen und Schüler am gleichen Lerngegenstand arbeiten und damit ein Austausch untereinander und ein gemeinsames Lernen ermöglicht und angeregt wird.

Die Differenzierung findet auf unterschiedlichen Ebenen statt. Die sehr einfache und übersichtliche Einstiegsaufgabe ermöglicht eine zunächst noch unsystematische Annäherung an die Aufgabenstellung.

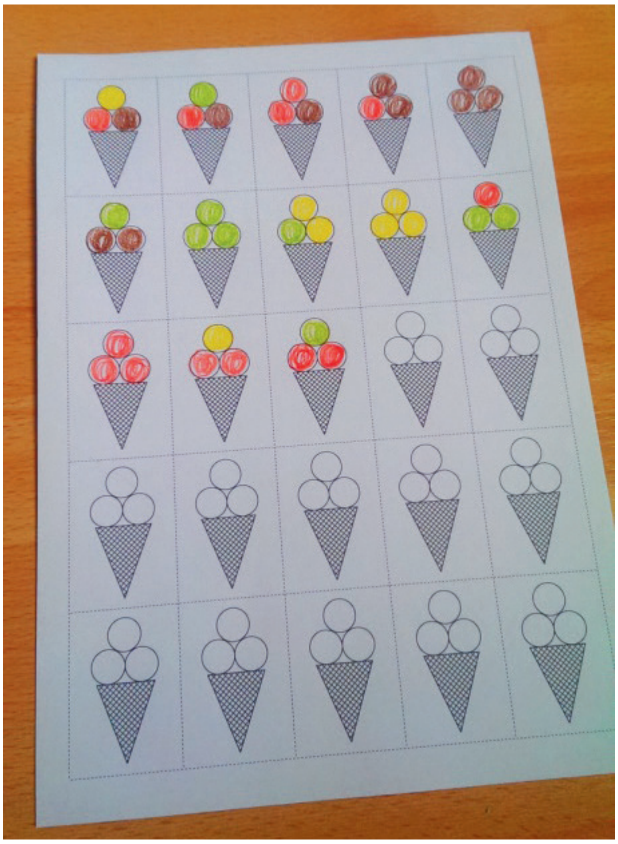
Ab der zweiten Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler nach und nach zu einer eher systematischen Vorgehensweise übergehen. Dies kann durch ein geeignetes Material unterstützt werden. Als praktikables Material haben sich Wattebällchen und (möglichst durchsichtige) Plastikbecher bewährt. Diese lassen sich auf dem Tisch gut einsehen und hin und her schieben, so dass eine Ordnung in die bereits gefundenen Möglichkeiten gebracht werden kann. Unerlässlich ist es hierbei, dass ausreichend Material zur Verfügung steht, um alle Möglichkeiten nebeneinander zu legen.

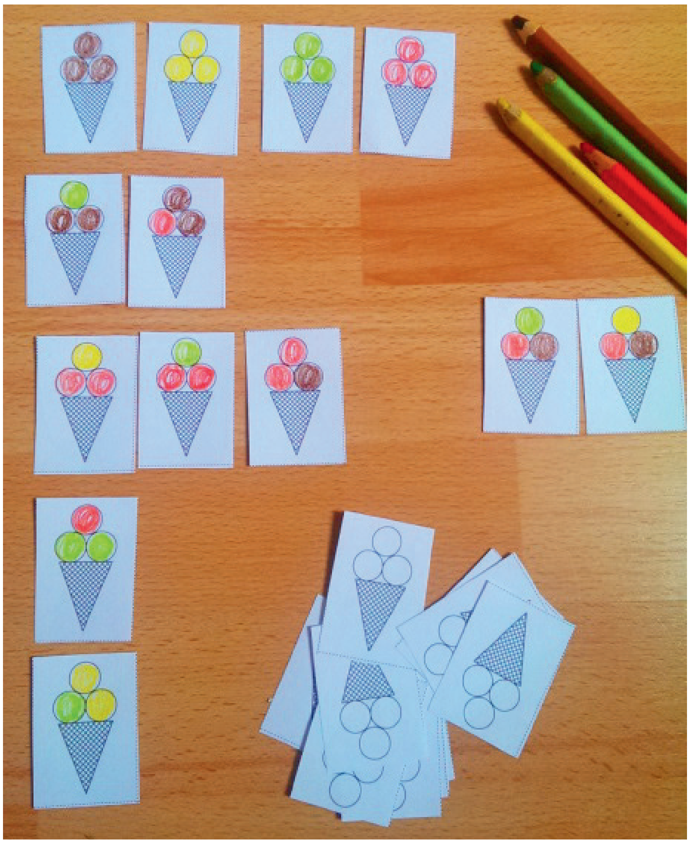
Als Alternative dazu können auch aus buntem Papier ausgeschnittene Kreise und Eiswaffeln eingesetzt werden. Das „Herumschieben“ auf dem Tisch gestaltet sich hierbei natürlich etwas schwieriger, weil jeweils eine Waffel mit drei Kugeln Eis verschoben werden muss. Das kann zu einem Durcheinander führen.

Gerade für die Aufgaben 3 und 4 ist aber diese Darstellung besonders gut geeignet, weil sich so leichter die Reihenfolge der Kugeln darstellen lässt. Für das Benutzen der Wattebäusche bräuchte man hierzu sehr schmale Gläser, zum Beispiel Reagenzgläser.

Um auch die Lösungen auf Papier zu bringen, ist es oft bei kombinatorischen Aufgabenstellungen sinnvoll, den Schülerinnen und Schülern nur ein weißes Blatt zu geben, damit sie frei ihre Darstellungsweise wählen können.

Je nach Vermögen und entsprechend der Vorerfahrungen, der Lerngruppe mit kombinatorischen Aufgabenstellungen, benötigen Kinder zuweilen auch Strukturierungshilfen. Hierbei kann ein Arbeitsblatt helfen, auf dem zunächst unsystematisch Lösungen notiert werden können. Wenn keine weiteren Möglichkeiten mehr gefunden werden, kann das Zerschneiden und Ordnen der bereits gefundenen Möglichkeiten den Blick für ein weiteres systematisches Vorgehen öffnen.





Quelle: Christiane Meerstein, IQSH

3 Lernumgebung „Messen mit dem Meterstab“

Die Lernumgebung „Messen mit dem Meterstab“ fördert das aktive und entdeckende Lernen, indem die Lernenden eigene Erfahrungen im Umgang mit dem Meterstab sammeln. Durch selbständiges Entdecken gewinnen sie Einblicke in Messprozesse und bauen dabei eine Größenvorstellung zur Größe „1 m“ auf. Dieser Lernumgebung sollten direkte Längenvergleiche vorangegangen und entsprechende Relationen und Begrifflichkeiten, wie zum Beispiel „Länge“, „lang“, „kurz“, „länger als“, „kürzer als“ und „gleich lang“ geübt worden sein. Hierzu bietet es sich an, Gegenstände wie Bleistifte nach der Länge zu ordnen und miteinander zu vergleichen. Im Sinne der klassischen didaktischen Stufenfolge führt der Erwerb der Größenvorstellung weiter über den indirekten Vergleich mit willkürlich gewählten Maßeinheiten und das Erkennen der Invarianz einer Größe bis hin zum Messen mithilfe standardisierter Maßeinheiten und zum Rechnen mit Größen. Das indirekte Vergleichen mit selbstgewählten Maßeinheiten und die strenge Abfolge der Stufen wird oft kritisch gesehen, da bereits Schulanfänger über Kenntnisse zu standardisierten Maßeinheiten und technischen Messgeräten verfügen. Dies bedeutet jedoch keinesfalls, dass sie tragfähige Größenvorstellungen und vielfältige Messerfahrungen haben. Die Tätigkeit des Messens und Ablesens von einer Skala ist sehr abstrakt und muss erst einmal verstanden und in vielfältigen Situationen geübt werden (Hasemann und Gasteiger 2014, S. 203 ff).

Das Verwenden von Meterstäben in der Lernumgebung „Messen mit dem Meterstab“ bietet den Vorteil, dass bereits mit einer standardisierten Maßeinheit gearbeitet wird, durch das Fehlen einer Skala dennoch wertvolle Einsichten in die Tätigkeit des Messens aktiv erworben und selbständig entdeckt werden können. Als Meterstab wird zunächst eine ein Meter lange Holzleiste aus dem Baumarkt verwendet, die keine weiteren Markierungen aufweist. Diese Holzleisten sollten in so großer Anzahl vorhanden sein, dass je zwei Lernende mit einer Holzleiste arbeiten können. Später können die Leisten mit Hilfe von 10 cm breitem Malerkrepp zweifarbig bemalt werden, so dass eine 10 cm-Einteilung sichtbar ist. Alternativ können dann auch Tafellineale verwendet werden. Für das Messen „krummer Linien“ können ein Meter lange Seilstücke oder Knotenschnüre mit 1 m Abstand hergestellt werden. Gemessen werden Gegenstände und Abstände im Klassenraum und in der Schule. Weitere Materialien, die genutzt werden können sind: Beispielbilder von zu messenden Gegenständen und Abständen in der eigenen Schule, Fotoapparate zum Fotografieren gemessener Gegenstände und Abstände und Listen zum Eintragen der Messergebnisse.

In der Einführungsstunde werden den Lernenden die Meterstäbe gezeigt. Sie werden vielleicht feststellen, dass sie alle gleich lang sind und möglicherweise wird auch die richtige Länge „1 m“ genannt. Falls nicht, informiert die Lehrkraft darüber, dass alle Stäbe 1 m lang sind. Es folgen Arbeitsaufträge:

- Sucht im Klassenraum (oder in der Schule) Gegenstände, die genau 1 m lang sind!
- Sucht im Klassenraum (oder in der Schule) Abstände, die genau 1 m betragen!
- Stellt die Länge 1 m mit Material her! (evtl. Zusatzaufgabe)

Zum Festhalten der Ergebnisse bieten sich Zeichnungen oder Fotos mit angelegtem Meterstab an. Zum Herstellen der Länge 1 m mit Material sind Bauklötze, Holzwürfel, Holzperlen oder Papierbahnen geeignet. Aus der Präsentation können sich folgende weitere Fragen oder Impulse ergeben:

- Wie messen wir Gegenstände und Abstände, die länger als 1 m sind?
- Wie messen wir Gegenstände und Abstände, die kürzer als 1 m sind?

Längere Strecken werden durch Hintereinanderlegen mehrerer Meterstäbe oder durch mehrmaliges Anlegen eines Meterstabes gemessen. Beim Handeln werden die Lernenden entdecken, worauf es beim richtigen Messen ankommt, zum Beispiel, dass nichts verrutschen darf, dass man richtig zählen muss oder dass es beim mehrmaligen Anlegen wichtig ist, dass man die Stelle mit dem Finger markiert, an der neu angelegt werden soll. Beim Messen können sich einige Herausforderungen ergeben:

- Wie messe ich Gegenstände und Abstände, die kürzer als 1 m sind?

- Wie messe ich, wenn es um die Kurve geht?
- Wie messe ich, wenn etwas im Weg ist?
- Kann ich vorher ungefähr schätzen, wie lang etwas ist? Was hilft mir dabei?
- Wie merke ich mir, was 1 m ist?

Falls sich die Fragen nicht aus dem Handeln heraus ergeben, steuert die Lehrkraft nach und setzt gezielt Impulse. Durch das geschickte Verteilen unterschiedlicher Arbeitsaufträge kann differenziert werden. Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler bekommen Messaufträge, die problemhaltiger sind als andere. So arbeiten alle Lernenden an einer gemeinsamen Fragestellung, aber nicht an der gleichen Aufgabe. Empfehlenswert ist es, wenn eine Sammlung von Fotos zu Messaufträgen erstellt wird und eine Liste mit Strecken, die gemessen werden sollen. Dabei können Differenzierungsaspekte berücksichtigt werden. Die Ergebnisse werden zur besseren Übersicht in Tabellen eingetragen. Hier bietet sich eine Verbindung mit der allgemeinen Kompetenz Darstellen.

Da die Angabe „weniger als 1 m“ noch ungenau ist, kann zunächst mit halben Metern gearbeitet werden, indem entsprechende Markierungen auf dem Meterstab angebracht werden. So kommt man beispielsweise zu Ergebnissen wie „länger als ein halber Meter aber kürzer als 1 m“. Es wird leicht gelingen, den Lernenden an Beispielen klar zu machen, dass es Situationen gibt, in denen man Längen noch genauer bestimmen muss (Passt etwas hindurch?). So kann die Unterteilung in Untereinheiten eingeführt werden, zunächst in Dezimeter, dann in Zentimeter. Dazu werden die Holzstäbe im Abstand von 10 cm zweifarbig bemalt. Wenn die Länge 1 m mit Hilfe einer Perlenschnur mit Holzperlen mit dem Durchmesser 1 cm hergestellt wird, können Beziehungen zur Untereinheit cm und zum Zahlenstrahl bis 100 hergestellt werden.

Beim Messen von Kurven können Seile helfen, die entweder Knoten zur Markierung enthalten oder an die Meterstäbe angelegt werden. Wenn etwas im Weg ist, kann die Strecke abgetragen und an anderer Stelle gemessen werden. Ein erfolgreiches Schätzen setzt voraus, dass die Lernenden Repräsentanten für Standardeinheiten kennen und sie als Bezugsgröße nutzen (zum Beispiel: so lang wie eine Tafelseite, so hoch wie die Klassentür). Vielfältige Schätzübungen festigen das Stützpunktwissen der Lernenden.

Den Abschluss bildet der Vergleich mit Messgeräten wie dem Lineal, dem Gliedermaßstab und dem Maßband. Vielfältige Aufgabenstellungen für Messerfahrungen mit diesen Geräten schließen sich an.

Literatur:

Hasemann, Klaus, Gasteiger, Hedwig, Anfangsunterricht Mathematik, Springer Spektrum

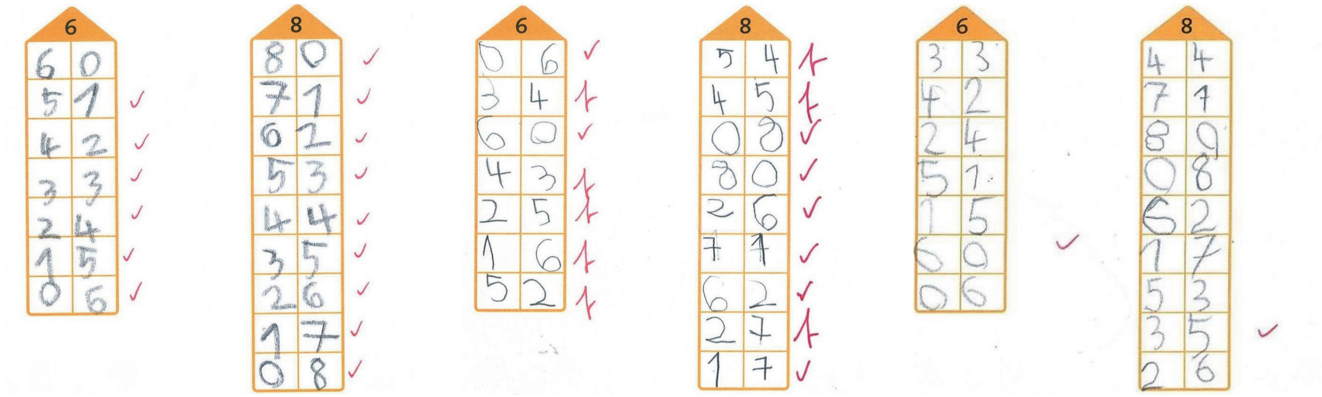
III Ausgewählte didaktische Leitlinien

1 Grundvorstellungen erwerben

Um einen tragfähiges mathematisches Wissen und Können aufzubauen, ist der Erwerb von Grundvorstellungen notwendig. Im Folgenden soll beispielhaft erläutert werden, wie die Lernenden in diesem Prozess unterstützt werden können.

Beispiel 1: Sind die Zahlzerlegungen wirklich verinnerlicht?

Im Frühjahr des ersten Lernjahres der Eingangsphase soll überprüft werden, ob die Lernenden die Zahlzerlegung beherrschen und automatisiert haben. Dazu nutzt die Lehrkraft Zerlegungshäuser als Testaufgaben, die von drei Schülern in abgebildeter Form bearbeitet werden.



Schülerprodukte, Hartmann 2014

Welche Erkenntnisse lassen sich aus diesen Schülerprodukten ziehen? Welcher Schüler beherrscht die Zahlzerlegung wirklich und wer hat „nur" eine Strategie zum Ausfüllen des Zerlegungshauses gefunden, ohne die dahinter liegende Vorstellung zur Zerlegung durchdrungen zu haben? Was genau charakterisiert diese Grundvorstellung zur Zahlzerlegung?

Das *Teil-Ganzes-Schema* bezeichnet die Grundvorstellung, dass eine Zahl in verschiedene andere Zahlen zerlegt und wieder zusammensetzt werden kann. Hat man diese Vorstellung erworben, so kann zum einen numerisch erfasst werden, dass eine Menge aus 9 Objekten in 5 und 4 Objekte zerlegt werden kann. Zum anderen ist dann ebenfalls bewusst, dass es noch weitere Zerlegungen der 9 gibt (zum Beispiel 3 + 6, 5 + 2 + 2) (vgl. *Resnick 1983*). Ein gut ausgebildetes Teil-Ganzes-Schema wirkt sich positiv auf die Fähigkeit zum Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben aus. Für ein nicht zählendes Rechnen über den Zehner ist die Zerlegung eines Summanden resp. des Subtrahenden notwendig. Um also eine Ablösung vom zählenden Rechnen zu erreichen, ist das automatisierte Beherrschen der Zahlzerlegung bis 10 eine wesentliche Voraussetzung (vgl. *Schipper 2009*).

Zum Aufbau der Grundvorstellung zum Teil-Ganzes-Schema eignet sich das Vier-Phasen-Modell nach *Wartha/Schulz 2011*. Es geht davon aus, dass die Vorstellung schrittweise von der enaktiven zur symbolischen Ebene erworben wird. Das konsequente Verbalisieren der mathematischen Handlung unterstützt den Vorstellungsaufbau.

Phase 1	**Handlung am Material mit Verbalisieren** Der Schüler handelt mit dem Material und beschreibt dabei seine Handlungen. Die Handlungsebene wird auf die Symbolebene übertragen, indem das Kind den zugehörigen Term bzw. die zugehörige Aufgabe notiert.
Phase 2	**Beschreibung der Materialhandlung mit Sicht auf das Material** Der Schüler handelt nicht mehr selbst, sondern beschreibt die Handlung am sichtbaren Material für einen Partner und beobachtet, wie diese nach seinen Anweisungen ausgeführt wird.
Phase 3	**Beschreibung der Materialhandlung ohne Sicht auf das Material** Das Material befindet sich nur für den Partner sichtbar auf dem Tisch (Sichtschutz). Der Schüler beschreibt die Materialhandlung, die von seinem Partner umgesetzt wird.
Phase 4	**Beschreibung der Materialhandlung „nur“ noch in der Vorstellung** Der Schüler bearbeitet die Aufgabe auf der symbolischen Ebene und stellt sich ggf. dabei noch die zugehörige Materialhandlung vor und beschreibt diese.

Abbildung 1: Vier-Phasen-Modell nach Wartha/Schulz 2011

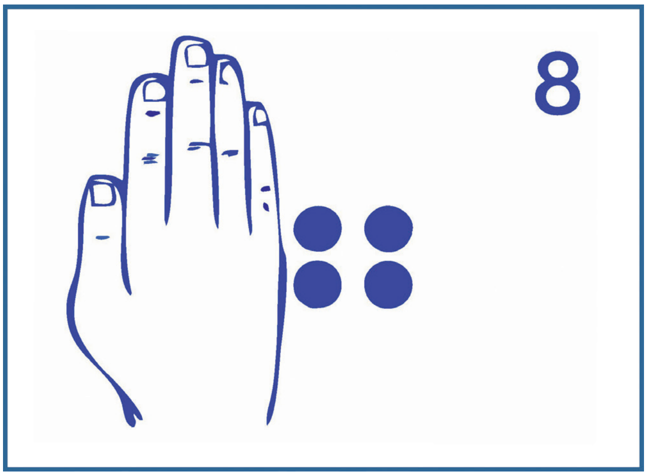


Abbildung 2: Übung Verdeckte Teilmenge, von Seeler 2017

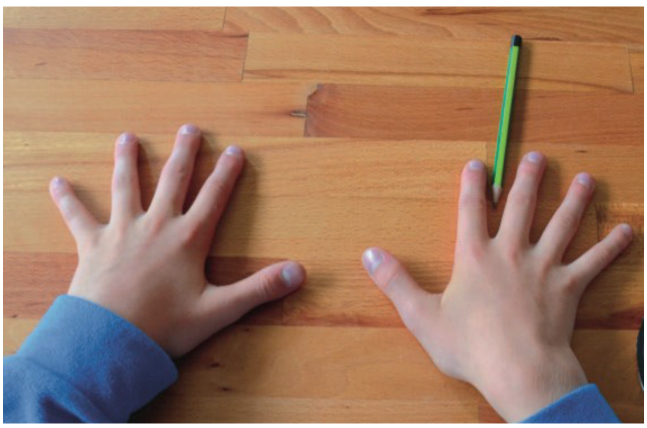


Abbildung 3: Fingerzerlegung, Foto: von Seeler

Einsetzen lässt sich das Vier-Phasen-Modell zum Aufbau einer Grundvorstellung zur Zahlzerlegung mit Anschauungsmaterialien wie Wendeplättchen, Steckwürfeln, Schüttelboxen oder anderen nicht strukturierten Anschauungsmaterialien. Diese können offen betrachtet werden (Phase 1, 2) oder zum Teil verdeckt werden (Phase 3, s. Abbildung 2), so dass ein inneres Mengenbild zur Bestimmung benötigt wird. Diese Aufgabenform lässt sich auch lehrergesteuert mit der gesamten Lerngruppe durchführen.

Besonders geeignet ist es, die Zerlegung mit den Fingern durchzuführen. Ein Stift kann die beiden Teilmengen optisch abgrenzen. Die Anzahlbestimmung erfolgt statisch, die Lernenden sollten nicht „hochzählen“. Mit diesen statischen Fingerbildern wird an eine Übung zur Zahlerfassung angeknüpft, bei der die Lernenden die Anzahl der gezeigten Finger auf einen Blick bestimmen sollen. Zu beachten ist, dass die Partner, die in Phase 2 und 3 kooperieren, aus derselben Richtung auf die Finger sehen, damit die Mengen links und rechts des Stiftes für beide Schüler eindeutig zu bestimmen ist. Statt einer Trennwand ist das Halten der Hände unter dem Tisch in Phase 3 praktikabel.

Für die Automatisierung der Zahlzerlegungen lassen sich die Zahlenfreunde-Karten von *Peter-Koop/Rottmann 2013* nutzen. Diese Karten umfassen alle Zerlegungen bis 10 in grafischer und symbolischer Darstellung samt Lösung auf der Kartenrückseite und können individuell und mit einer Partnerin/einem Partner genutzt werden.

Abbildung 4: Zahlenfreunde nach Peter-Koop/Rottmann 2013

Literatur:

Peter-Koop, A. & Rottmann, T. (2013): Einsicht in Teil-Ganzes-Beziehungen – Übungen mit den „Zahlenfreunden“. Fördermagazin Grundschule, 4, S. 21-25.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg (Hrsg.), The development of mathematical thinking (S. 109-151). New York: Academic Press.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel. Sebastian Wartha/ Axel Schulz

Wartha, S. & Schulz, A. (2012): Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen

2 Eingangsdiagnose und Ermittlung von Lernständen

Bereits bei der Einschulung kann man bei den Schülerinnen und Schülern große Kompetenz- und Entwicklungsunterschiede feststellen. Um dem Anspruch einer individuellen Förderung jeder einzelnen Schülerin und jedes einzelnen Schülers gerecht werden zu können, bedarf es deshalb einer Diagnose der Lernvoraussetzungen und –fortschritte von Anfang an. Dabei geht es vor allem darum, Denk- und Handlungsweisen, Grundvorstellungen und gegebenenfalls Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler aufzudecken, um dies im Unterricht gezielt aufgreifen, weiterentwickeln oder korrigieren zu können.

In den Fachanforderungen sind diese für den Beginn der Eingangsphase in einer Tabelle, die den eigentlichen Kompetenzbeschreibungen vorangestellt ist, ausgewiesen.

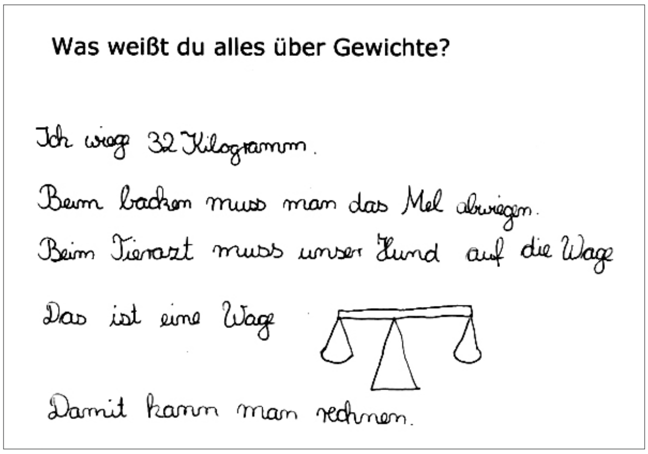
Vorläuferfähigkeiten		
Kompetenzen *Die Schülerinnen und Schüler…*	**Themen und Inhalte**	***Hinweise***
• gehen handelnd und situationsgerecht mit Größen um. • vergleichen Größen spielerisch und verwenden dabei passende Begriffe.	• Alltags- und Spielsituationen mit Geld, Zeit, Länge, Gewicht, Flächeninhalt und Volumen	*Im Vordergrund steht hier die spielerische Begegnung mit allen Größenbereichen, z. B. Teilnehmen am Einkauf, Rollenspiele, Wettspiele.* *Das Verwenden der passenden Einheiten im Sprachgebrauch fördert die Begegnung mit den Größenbereichen.*

Fachanforderungen Mathematik, Vorläuferfähigkeiten des Inhaltsbereiches Größen und Messen

Hierbei handelt es sich um Kompetenzen, die im günstigsten Fall bereits in der Vorschulzeit erworben wurden. Dies kann aber keinesfalls für alle Kinder im gleichen Maße vorausgesetzt werden. Daher ist es unabdingbar für einen erfolgreichen Mathematikunterricht die Lernausgangslage der Kinder zu ermitteln.

Offene Aufgaben und Eigenproduktionen

Eine gute Möglichkeit zur Erhebung der Lernausgangslage ist eine sehr offene Aufgabenstellung. Bei der **Methode des leeren Blattes** bekommen die Schülerinnen und Schüler nur ein leeres Blatt mit dem Auftrag, alles aufzuschreiben, was sie über ein bestimmtes Thema wissen. Dies kann bei vielfältigen Themen des Mathematikunterrichts angewendet werden. Beispielsweise ist dies sinnvoll, um das Vorwissen der Kinder in Bezug auf einen Größenbereich („Was weißt du alles über Gewichte?") zu erheben.


Was weißt du alles über Gewichte?

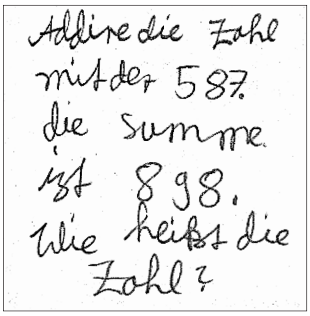
Ich wiege 32 Kilogramm.
Beim backen muss man das Mel abwiegen.
Beim Tierazt muss unser Hund auf die Wage
Das ist eine Wage
Damit kann man rechnen.

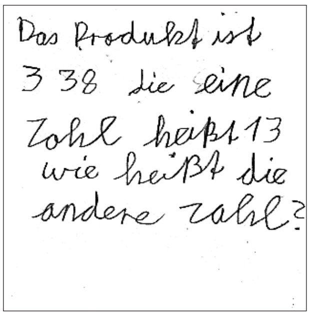
Leeres Blatt, Mitte 3. Schuljahr

Der Nachteil dieser Methode besteht darin, dass die Lehrkraft natürlich nicht sicherstellen kann, dass alle Kinder auch wirklich alles aufschreiben, was ihnen zu einem Thema einfällt. Deshalb kann es sinnvoll sein, die Fragestellung ein wenig einzugrenzen. Um z. B. über vorhandene Stützpunktvorstellungen zu Gewichten Auskunft zu erhalten, würde es sich anbieten, eine gezieltere Nachfrage zu stellen („Was wiegt etwa ein Kilogramm?").

Für einen sinnvollen **Einsatz offener Aufgaben zur Diagnostik** ist es wichtig, sich darüber im Vorwege Gedanken zu machen, was durch eine bestimmte Aufgabe herausgefunden werden kann. So lassen sich beispielsweise durch die Aufgabe „Welches ist deine Lieblingszahl? Male, schreibe, rechne." Informationen darüber ableiten, ob eine Schülerin oder ein Schüler bereits strukturierte Zahldarstellungen nutzt, ob sie/er ein kardinales Verständnis einer Zahl besitzt und ob die Lieblingszahl formgerecht geschrieben wird. Informationen darüber, welche Zahlen das Kind schon kennt, lassen sich hingegen nicht ableiten.

Was ist deine Lieblingszahl?
Male und schreibe, 1. Schulwoche



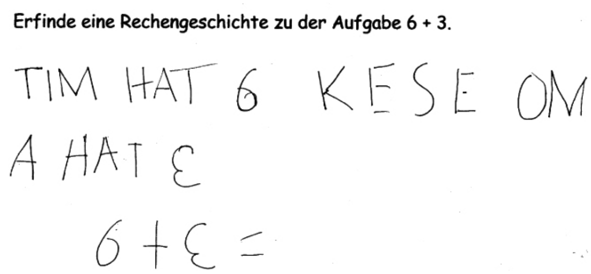


Schreibe ein Zahlenrätsel.
Benutze unsere Mathewörter, 4. Schuljahr

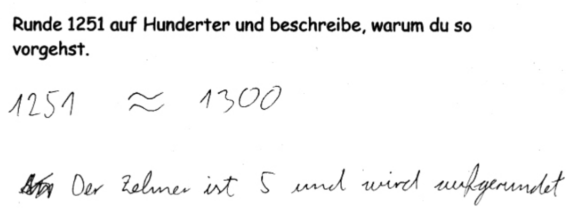
Bei diesen offenen Aufgaben wird es den Schülerinnen und Schülern freigestellt, wie sie vorgehen und wie sie ihre Vorgehensweise darstellen. Jede Form solcher **Eigenproduktionen** lassen in besonderer Weise Schlüsse auf das Denken der Schülerinnen und Schüler zu. In besonderer Weise lässt sich durch Eigenproduktionen der Umgang mit der Fachsprache diagnostizieren.

Mathebriefkasten

Um eine kontinuierliche und prozessbegleitende Diagnostik im Unterricht zu gewährleisten, bietet es sich an, sich in regelmäßigen Abständen einen Überblick darüber zu verschaffen, inwiefern die Schülerinnen und Schüler das Gelernte umsetzen können, und wo noch Fehlvorstellungen vorliegen, auf die im Unterricht eingegangen werden sollte. Dazu bietet sich die Methode des **Mathebriefkastens** an. Hierbei wird regelmäßig (beispielsweise einmal in der Woche) zu Beginn der Stunde eine Aufgabe, deren Bearbeitung nicht länger als 5 bis 20 Minuten dauert, an die Schülerinnen und Schüler ausgeteilt. Nach der Bearbeitung „werfen" sie die Aufgaben dann als „Mathebrief" in einen dafür vorgesehenen Pappkarton (vorzugsweise in gelb). Je nachdem, was im Unterricht behandelt wurde, können auf diese Weise Kenntnisse, Fertigkeiten oder die Einsicht in Verfahren und Konzepte diagnostiziert werden.



Aufgabe für den Mathebriefkasten, Mitte 1. Schuljahr



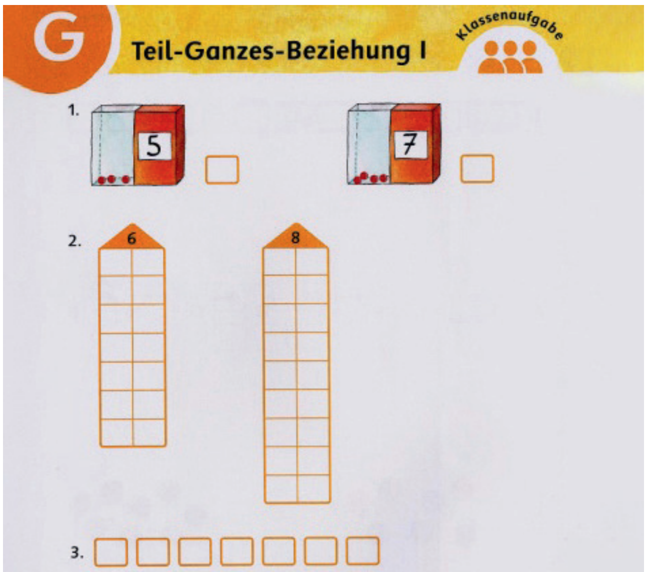
Aufgabe für den Mathebriefkasten,
nach den Herbstferien 4. Schuljahr

Mehrere Mathebriefe können gesammelt und zu einer Dokumentation der individuellen Lernfortschritte zusammengefasst werden.

Standortbestimmungen und Diagnostische Interviews
Da im Mathematikunterricht in der Grundschule in Themensträngen unterrichtet wird, die stark aufeinander aufbauen, ist es für ein erfolgreiches Lernen während der gesamten Grundschulzeit von besonderer Wichtigkeit, dass die jeweils notwendigen Lernvoraussetzungen bei den Schülerinnen und Schülern gegeben sind. Es ist daher sehr sinnvoll und hilfreich, den Unterricht durch eine kontinuierliche und prozessbezogene Diagnostik passgenau auf die Schülerinnen und Schüler zu planen. Dabei kann im Inhaltsbereich Zahlen und Operationen das Material von **Mathe macht stark** die Lehrkraft unterstützen.

Die Materialien bieten zu allen wichtigen arithmetischen Themen eine Klassenaufgabe, die als diagnostisches Instrument zur Ermittlung von Lernvoraussetzungen oder des Lernstandes einzusetzen ist.

Die Durchführung der Klassenaufgabe sollte im Laufe der Unterrichtseinheit erfolgen, um in der weiteren Planung des Unterrichts auf die vorhandenen oder noch zu entwickelnden Kompetenzen eingehen zu können oder einzelne Kinder gezielt zu fördern.



Quelle: Mathe macht stark 1 / 2 in: Fördermagazin Grundschule 4/2013, Cornelsen Verlag GmbH, München

Quelle: Mathe macht stark 1 / 2 in: Fördermagazin Grundschule 4/2013, Cornelsen Verlag GmbH, München

Für die Jahrgangsstufe 3 und 4 beinhaltet das Material darüber hinaus Klassenaufgaben zur Erhebung der Lernvoraussetzungen, die vor der Behandlung eines Themas mit der Klasse durchzuführen sind, um die notwendigen Lernvoraussetzungen zu überprüfen und gegebenenfalls zu wiederholen.

Für den Einsatz dieser oder ähnlicher Standortbestimmungen ist es bedeutsam, dass dabei aussagekräftige Aufgaben eingesetzt werden, die Fehlerschwerpunkte beinhalten und die Schülerinnen und Schüler dazu auffordern ihre Vorgehensweise darzustellen.

Trotzdem ist es nicht immer möglich, aus den schriftlichen Aufzeichnungen genaue Rückschlüsse über das Denken der Schülerinnen und Schüler zu ziehen. Dann ist es wichtig, in einer Interviewsituation die Schülerin oder den Schüler nach ihrer/seiner Vorgehensweise genau zu befragen. Auch hierfür bietet *Mathe macht stark* jeweils eine Aufgabenseite.

Bei dem Führen des Interviews geht es darum, das Denken des Kindes sichtbar zu machen. Eine entspannte Atmosphäre, eine nicht beeinflussende Fragehaltung, Geduld und die stetige Aufforderung an das Kind, seine Gedanken offenzulegen, sind dabei wesentliche Elemente. Didaktisches Material, anhand dessen die Rechenwege dargestellt werden können, ist oft sehr hilfreich.

3 Differenzierung

Heterogenität im Mathematikunterricht

Unterricht hat stets die optimale Förderung aller Schülerinnen und Schüler entsprechend ihrer jeweiligen Begabungen zum Ziel. Daraus ergibt sich, dass Lehr-Lern-Arrangements Maßnahmen beinhalten, die einen differenzierten Zugang zum Unterrichtsgegenstand zum Ziel haben. Die Verschiedenheit von Lernenden ist vielfach beschrieben und lässt sich unter anderem durch die Bereiche

- Geschlecht,
- Ethnie,
- Leistungen im Fach,
- Alter,
- spezifische Beeinträchtigungen

klassifizieren. So unterschiedlich eine Schulklasse konstituiert sein kann, so kontrovers wird dieser Umstand in der pädagogischen Debatte diskutiert. Mintunter wird Heterogenität als Problem, an anderer Stelle als Chance begriffen.

Bei Analyse empirischer Befunde zur Heterogenität der Schülerleistungen wird deutlich, dass die Heterogenität den Normalfall darstellt. So lässt sich in TIMSS 2015 und im IQB-Bildungstrend 2016 erkennen, dass eine starke Streuung der Leistungen vorliegt und dass der Anteil der Risikoschülerinnen und -schüler erheblich ist. Somit besteht die Handlungsnotwendigkeit zur Differenzierung unabhängig von einer normativen Bewertung der Heterogenität.

Formen von Differenzierung

Äußere Differenzierung, wie sie in Form von separierenden Lerngruppen in der Sekundarstufe etabliert ist, findet sich im Grundschulkontext nicht, daher wird im Folgenden der Schwerpunkt auf Formen der *Inneren Differenzierung* mit dem Blick auf das Fach gelegt, bevor das Konzept der *Natürlichen Differenzierung* erläutert wird.

Um möglichst viele Schülerinnen und Schüler den nächsten Schritt im mathematischen Lernprozess bewältigen zu lassen, bedarf die differenzierende Maßnahme einer möglichst hohen Passung zwischen den Anforderungen der Aufgabe und den individuellen Lernvoraussetzungen. Dazu können bei der Inneren Differenzierung die folgenden Parameter variiert werden:

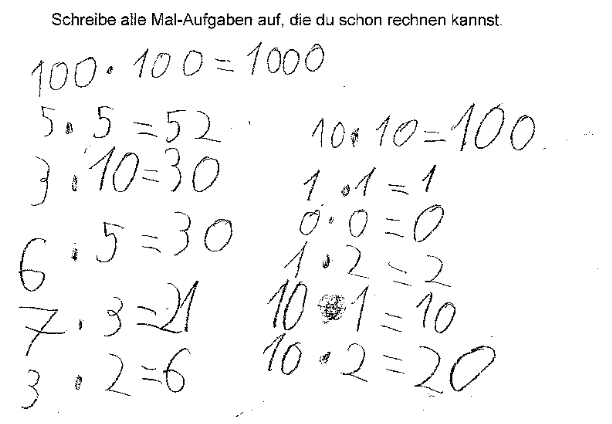
- Anzahl der zu lösenden Aufgaben (quantitative Differenzierung)
- Qualität der Anforderungen der Aufgaben (qualitative Differenzierung)
- Vorgesehene Bearbeitungszeit (quantitative Differenzierung)
- Hilfemaßnahmen
- Einsatz verschiedener Medien
- Sozialform (soziale Differenzierung)
- Eigenständigkeit bei der Auswahl der Aufgaben (inhaltliche Differenzierung)

Eine auf alle Schülerinnen und Schüler individuell abgestimmte Differenzierung ist allerdings nicht anzustreben. Hierbei würden lediglich isolierte Lernsituationen entstehen, in denen kein mathematischer Austausch mit den Mitschülerinnen und Mitschülern sowie der Lehrkraft mehr stattfindet. Vielmehr ist das Ziel ein Lernen am gemeinsamen Unterrichtsgegenstand, der unterschiedliche Bearbeitungs- und Denkwege ermöglicht. Die Auseinandersetzung mit den Lösungsansätzen der Mitlernenden ermöglicht ein kooperatives und dennoch individualisierendes Lernen. Dies kann unter anderem durch *offene Aufgaben*, *Eigenproduktionen* oder *Lernumgebungen* im Sinne substanzieller Aufgabenformate erreicht werden.

Offene Aufgaben zeichnen sich dadurch aus, dass sie mehrere Lösungen oder Lösungswege besitzen können. Ebenso können sie weniger genaue Vorgaben beinhalten als eine geschlossene, auf einen eindeutigen Lösungsalgorithmus abzielende Aufgabe.

Beispiel 1 Offene Aufgabe:
Auf dem Parkplatz der Schule stehen Autos und Fahrräder.
Insgesamt sind es 16 Fahrzeuge. Zusammen haben sie 40 Räder.
Wie viele Autos und wie viele Fahrräder stehen auf dem Parkplatz?

Beispiel 2 Offene Aufgaben:


Schreibe alle Mal-Aufgaben auf, die du schon rechnen kannst.

100 · 100 = 1000
5 · 5 = 52 — 10 · 10 = 100
3 · 10 = 30 — 1 · 1 = 1
6 · 5 = 30 — 0 · 0 = 0
1 · 2 = 2
7 · 3 = 21 — 10 · 1 = 10
3 · 2 = 6 — 10 · 2 = 20

Vorverständnis Multiplikation, Beginn Jahrgangsstufe 2

Unter *Eigenproduktionen* versteht man Aufgaben, bei denen die Lernenden selbst entscheiden, wie sie die Aufgabe bearbeiten und wie sie ihr Vorgehen und die Ergebnisse darstellen. Dieser Aufgabentyp besitzt ein hohes diagnostisches Potential, da die Denkwege und Strategien der Lernenden besonders deutlich werden.

Beispiel einer Eigenproduktion:
Finde alle Zahlenmauern mit Zielzahl 5. Begründe, warum das alle sind.

Natürliche Differenzierung und Lernumgebungen
Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht bezweckt immer zweierlei: Zum einen eine Öffnung der Aufgabe zugunsten einer individuellen Bearbeitung und zum anderen eine Konzentration auf den gemeinsamen Gegenstand für ein gemeinsames Lernen. Der gemeinsame Lerngegenstand muss hinreichend komplex sein, damit sich verschiedene Wege der Bearbeitung und der Tiefe der Bearbeitung ergeben.

Um diesen Ansprüchen zu genügen, muss eine Lernumgebung mehrere Kriterien erfüllen:

- Eine *niedrige Eingangsschwelle* führt dazu, dass alle Lernenden einen Zugang zur Aufgabe finden.
- Damit leistungsstarke Schülerinnen und Schüler hinreichend gefordert werden, sorgt eine *Rampe* in der Aufgabe für eine Steigerung des Anspruchsniveaus.
- Lernumgebungen bieten Potenzial, um Vorgehensweisen und Lösungen zu besprechen. Dabei werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen Kommunizieren, Argumentieren und Darstellen fokussiert.

Diesen Kriterien entsprechen die in diesem Leitfaden vorgestellten Lernumgebungen *Summen im Hunderterfeld*, *Eiskugeln* und *Messen mit dem Meterstab*.

Literatur:
Hirt, U. / Wälti, B., Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte – Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht Band 2, 2008
Krauthausen G., Scherer, P.: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht – Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule, 2014

4 Materialkisten

Was ist das Ziel?

Alle Schülerinnen und Schüler benötigen im Mathematikunterricht der Eingangsphase anschauliches, konkretes Material, das angestrebte Kompetenzen begreifbar machen kann. Erst durch konkretes Handeln mit geeignetem Material werden mathematische Grundvorstellungen aufgebaut, die es Kindern ermöglichen, sich allmählich von der konkreten Vorstellung zu lösen und Rechenoperationen ohne Zuhilfenahme von Anschauungsmaterial durchzuführen. Da Kinder sich in ihrem mathematischen Grundwissen und Können sehr unterschiedlich entwickeln, hat es sich in der Praxis bewährt, für jedes Kind bereits zum Schuleintritt eine mathematische Materialkiste im Klassenraum bereitzustellen. Damit kann gewährleistet werden, dass jedes Kind entsprechend der individuellen mathematischen Entwicklung jederzeit Zugriff auf das notwendige Anschauungsmaterial hat. Damit das bereitgestellte Anschauungsmaterial von den Schülerinnen und Schülern zielgerichtet eingesetzt werden kann, muss der handelnde Umgang mit diesem geübt werden. Die Bereitstellung des Materials für jede Lerngruppe soll auch dazu dienen, die Lehrkräfte zu entlasten, da die Bereitstellung und der Einsatz des Materials so mit geringem Aufwand verbunden ist. Die Materialkisten können, wenn sie von der Lerngruppe nicht mehr benötigt werden, an eine neue 1. Klasse weitergereicht werden. Sinnvoll ist es, den Inhalt der Materialkisten in der Fachkonferenz abzustimmen und auch im Fachcurriculum festzuhalten.

Was wird benötigt?

Es empfiehlt sich, den Inhalt der Materialkisten allmählich zu erweitern, sodass die Kinder nur auf das Material Zugriff haben, das auch eingeführt und benötigt wird.
Die hier angeführten Materialien sind lediglich Empfehlungen. In jedem Fall sollte das Material auf das Lehrwerk abgestimmt sein. Es empfiehlt sich, das Material in Klarsichtkunststoffkisten oder transparenten verschließbaren Tüten zu verwahren.

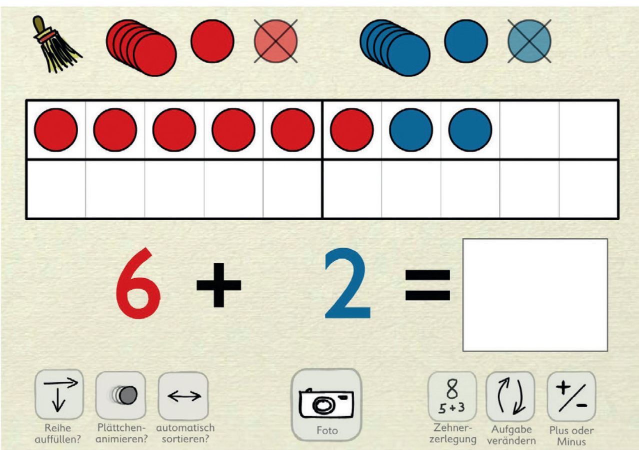
1. Jahrgangsstufe:	2. Jahrgangsstufe:
20ger Rechenrahmen	100er Feld mit und ohne Zahlen
20 Wendeplättchen	Zahlenstrahl bis 100
Zifferkarten 0 bis 9	Maßband 1 m
20 Holzwürfel (2 x 2 cm) mit Bauvorlage 3 x 3 Felder	Lernuhr
20 Steckwürfel (10 rot, 10 blau)	Rechengeld (entsprechend dem Zahlenraum)
Rechengeld (entsprechend dem Zahlenraum)	Lineal
2 Spielwürfel und ein Spielstein	30 Holzwürfel (2 x 2 cm) mit Bauvorlage 4 x 4 Felder
Schüttelbox	2 Spielwürfel
10er Feld mit und ohne Zahlen	Handspiegel
20er Feld mit und ohne Zahlen	
Zahlenstrahl bis 20	

5 Digitale Medien im Mathematikunterricht

Der Einsatz digitaler Medien lässt sich aus unterschiedlichen Perspektiven betrachten, und daraus lassen sich jeweils Ableitungen für das unterrichtliche Geschehen vornehmen. Zu nennen sind insbesondere

- der Ansatz der **Medienbildung,** wie er durch die in den Fachanforderungen enthaltene und operationalisierte KMK-Strategie (Allgemeiner Teil Kap. 2.5 und Anhang) für das digitale Lernen vertreten wird. Dieser zeigt übergreifende Kompetenzen im Umgang mit digitalen Medien auf. Das Ziel besteht hierbei im selbstgesteuerten, reflektierten und sicheren Nutzen der technologischen Möglichkeiten;
- der **fachdidaktische Ansatz:** Alle verwendeten Technologien müssen das Lernen im Mathematikunterricht in möglichst optimaler Weise unterstützen. Daher ist zu prüfen, ob sie in ihrer Anlage zum mathematischen Objekt passen und eine geeignete Form der Interaktion mit den Lernenden bieten. Dies betrifft in besonderer Weise alle Formen von Anwendungen (Apps). Welche Gütekriterien eine App aufweisen sollte, und wie man diese Kriterien feststellen kann, zeigt der folgende Abschnitt.

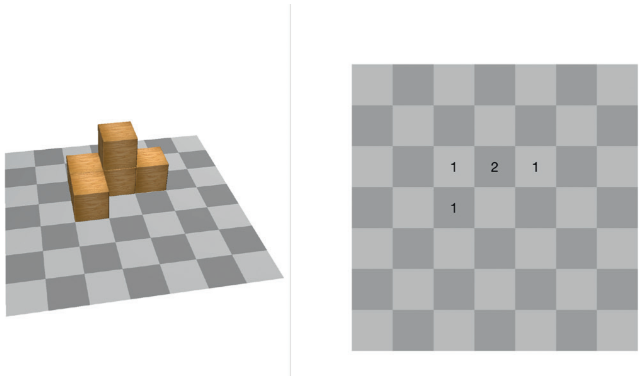
Im Grundsatz ist zu bedenken, dass digitale Medien stets als zusätzliches Element zu tatsächlichen Objekten und Handlungen im Grundschulunterricht verstanden werden sollten. Die Verbindung zwischen der analogen und der digitalen Welt hat zum Ziel, vertiefende Vorstellungen zu erzeugen. Für den Mathematikunterricht bedeutet das zum Beispiel, dass der Einsatz eines virtuellen Anschauungsobjektes, wie des interaktiven Zwanzigerfeldes, nach dem Benutzen, Beschreiben und Erklären eines analogen Zwanzigerfeldes folgt.



Virtuelles Zwanzigerfeld nach C. Urff

Der Markt der Apps, die das Lernen von Mathematik beabsichtigen, ist in den vergangenen zehn Jahren explosionsartig gewachsen. Dazu trägt selbstverständlich die vereinfachte Distribution über das Internet und die Marktplätze für Apps mit hoher Reichweite bei. Eine Schwierigkeit besteht in der Markttransparenz. Einen Überblick über alle relevanten Apps zu behalten, erscheint nicht möglich.

Neben der nicht mehr überschaubaren Anzahl an Apps lassen sich mindestens zwei weitere Trends feststellen. Die meisten Apps decken nur kleine Teilfelder mathematischen Lernens ab, *All-in-one-Apps*, wie sie bis vor 15 Jahren der Standard waren, findet man nur wenige. Des Weiteren finden sich durch die Entprofessionalisierung bei der Herstellung von Apps – das Einstellen auf den Apps-Marktplätzen unterliegt keiner inhaltlichen Steuerung – eine zunehmende Anzahl von Apps, die wegen technischer und inhaltlicher Schwächen für den unterrichtlichen Einsatz ungeeignet erscheinen.



Interaktives Bauen von Würfelgebäuden nach Etzold, Ladel

Eine Überprüfung der Eignung einer App vor dem unterrichtlichen Einsatz ist daher unerlässlich. Der folgende Kriterienleitfaden soll helfen, eine App auf ihre Einsatzmöglichkeiten im Mathematikunterricht der Grundschule zu prüfen. Dabei verstehen sich die genannten Kriterien nicht als vollständig und können durch weitere ergänzt werden.

Kriterien und vertiefende Hinweise	Wie können sie bestimmt werden?
Inhaltliche Struktur	
Welchen Inhalt bildet die App ab? Passt der Inhalt zu Fachanforderungen, Lehrwerk und schulinternem Curriculum?	• App-Titel und offizielle Beschreibung der App • Zusatzmaterialien zur App (z. B. Arbeitsblätter)
Welche Funktion wird mit dem Inhalt verfolgt? Handelt es sich um eine App zum *Training von Fertigkeiten*, zum *Aufbau von Grundvorstellungen* oder zum *Feststellen der Schülerleistungen*?	• Materialien für Lehrkräfte • Erproben der App und Funktionsbestimmung
Wird der mathematische Inhalt korrekt wiedergegeben? Nicht nur fachwissenschaftliche, sondern auch didaktische und psychologische Aspekte können hier berücksichtigt werden: Werden Vorstellungen mithilfe der Darstellungen zum Inhalt aufgebaut?	• Abgleich mit Fachanforderungen, fachdidaktischem Wissen
Wie interagieren die Lernenden mit dem mathematischen Inhalt? Werden in der App verschiedene Repräsentationsebenen angeboten und wird zum Transfer zwischen den Ebenen angeregt? Ist die verwendete Sprache adressatengerecht gewählt? Welche Möglichkeiten bietet die App? Bietet die App Grenzen? Erlaubt die App vielfältige Zugänge zur Lösung von Aufgaben?	• Systematisches Erproben der App
Werden verschiedene Lernvoraussetzungen durch die App berücksichtigt? Gibt es verschiedene Schwierigkeitsgerade, die einstellbar sind? Reagiert die App adaptiv auf die Stärken der Nutzerinnen und Nutzer? Welche Hilfsangebote werden im Lernprozess vorgehalten?	• Systematisches Erproben der App • Materialien für Lehrkräfte
Ist die App auch für gemeinsames Lernen nutzbar? Kann man die App in verschiedenen Sozialformen nutzen? Welche Impulse können durch die Lehrkraft dazu gegeben werden? Ist ein gemeinsames Nutzen im Klassenverband denkbar (Whiteboard, Beamer)?	• Materialien für Lehrkräfte • Erprobungen im Unterricht
Bietet die App der Lehrkraft eine diagnostische Funktion? Erhält die Lehrkraft (gesammelt) Rückmeldungen zu den Leistungen der Lernenden?	• Systematisches Erproben der App • Materialien für Lehrkräfte
Bedienungsoberfläche	
Ist die Menüführung einfach und passend?	• Systematisches Erproben der App
Art der Eingabe: Wird mit einem Stift/Finger oder der Tastatur Eingaben vorgenommen? Gibt es eine akustische Eingabehilfe?	• Systematisches Erproben der App • Materialien für Lehrkräfte

Neben den hier vorgestellten Kriterien zur *inhaltlichen Bewertung* von digitalen Medien im Mathematikunterricht stellt sich die Frage nach den **technologischen Rahmenbedingungen**: Die Anzahl verschiedener Geräte (-klassen) und Anwendungen, die den Alltag der Schülerinnen und Schüler sowie der Lehrkräfte verändern, erschwert eine Transparenz über die Qualität und Einsatzszenarien im Unterricht. Damit einhergehend steigt die Notwendigkeit der Qualifizierung der Lehrkräfte, um diese Technologien gewinnbringend einzusetzen. Denn es gilt wie bei früheren technologischen Neuerungen in der Schule weiterhin, dass nicht die Technologie selbst, sondern der souveräne und geschickte Einsatz mit ihr das Medium wertvoll für das Lernen macht.

Literatur:

Etzold, H., Ladel, S., Kortenkamp, U.: ACAT-Review-Guide – Ein tätigkeitstheoretischer Blick auf die Beurteilung von Mathematik-Apps. Quelle: http://dlgs.uni-potsdam.de/oer/acat-review, Abruf 06.06.2018

Krauthausen, G.: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Berlin, Heidelberg 2012

Urff, C.: Computergestützte Handlungen. 2011. Quelle: http://www.lernsoftware-mathematik.de/?p=953, Abruf: 07.06.2018

IV Das schulinterne Fachcurriculum

Die Fachanforderungen geben mit verbindlich formulierten Grundsätzen für den Unterricht, verbindlichen Kompetenzerwartungen, Themen und Inhalten einen Rahmen vor, der unter Berücksichtigung der lokalen Gegebenheiten ausgestaltet werden muss. Im schulinternen Fachcurriculum dokumentiert die Fachkonferenz ihre Vereinbarungen für den Mathematikunterricht an der eigenen Schule. Hiermit ist kein umfassender schuleigener Stoffverteilungsplan gemeint, sondern eine Sammlung gemeinsamer Absprachen zur Gestaltung des Unterrichts.

Orientierungen zur Stoffverteilung geben die Fachanforderungen und die verwendeten Lehrwerke. Darüber hinaus kann es sinnvoll sein, Verabredungen für gemeinsame Unterrichtseinheiten zu bestimmten Zeitpunkten oder zur Verwendung angeschaffter didaktischer Materialien zu treffen. Da in den Fachanforderungen Doppeljahrgangsstufen angegeben sind, können Absprachen zur Verteilung der Themen und Inhalte auf die einzelnen Jahrgangsstufen hilfreich sein.

Neben sinnvollen Verabredungen zur Stoffverteilung soll das schulinterne Fachcurriculum folgende weitere Aspekte berücksichtigen: Unterricht, Fachsprache, Diagnostik, Fördern und Fordern, Hilfsmittel, Materialien und Medien, Leistungsbewertung und Überprüfung und Weiterentwicklung.

Die erfolgreiche Umsetzung vermeidet einen Bruch beim Wechsel der Lehrkraft und beim Übertritt in die nächste Jahrgangsstufe. Sie ist eine Voraussetzung dafür, dass der kumulative Kompetenzaufbau bei Schülerinnen und Schülern gelingen kann. Der Erfolg eines funktionsfähigen schulinternen Fachcurriculums besteht nicht in der einmaligen schriftlichen Dokumentation, sondern in der Gestaltung des Erarbeitungs- und Weiterentwicklungsprozesses.

Dazu gehören
- die Verständigung auf gemeinsam angestrebte Unterrichtsergebnisse,
- die Verständigung auf didaktische Konzeptionen,
- die inhaltliche Konkretisierung der Ziele in Unterrichtseinheiten,
- die Verpflichtung auf Einhaltung der Absprachen und
- die regelmäßige Überprüfung und Weiterentwicklung.

Verbindlichkeit obligatorischer und optionaler Beschlüsse zum schulinternen Fachcurriculum
Die Fachkonferenz ist durch das Schulgesetz und die Fachanforderungen gehalten, eine Reihe von Beschlüssen zu fassen. Darüber hinaus können zu weiteren Teilbereichen im Verantwortungsbereich der Fachkonferenz Beschlüsse gefasst werden, die dann die gleiche Verbindlichkeit für die Lehrkräfte besitzen.

Mögliche Formen der Dokumentation
Die Fachanforderungen machen keine Vorgaben über Form und Umfang der Dokumentation des schulinternen Fachcurriculums. Nicht jedes Detail muss verbindlich geregelt sein. Zum Zeitpunkt der Erarbeitung bzw. Überarbeitung des schulinternen Fachcurriculums sollte sich die Fachkonferenz darüber abstimmen, welches die dringendsten Aspekte für Vereinbarungen sind und damit beginnen. Hierbei steht die Frage im Vordergrund, welche Vereinbarungen Kindern und Lehrkräften am meisten helfen. Dies könnten beispielsweise Absprachen zu gemeinsamen Fachbegriffen, zur regelmäßigen Behandlung gemeinsamer problemhaltiger Aufgaben, zur Einführung von Rechenverfahren oder zum Schreiben ins Heft sein.

Nach und nach sollen zu allen in den Fachkonferenzen verbindlich vorgegebenen Aspekten Vereinbarungen verschriftlicht werden.

Hilfreich bei der Auswahl und Bearbeitung wichtiger Aspekte ist es, die Perspektive einer Lehrkraft einzunehmen, die neu an die Schule kommt. Welche Fragen könnte diese Lehrkraft stellen? Welche Informationen braucht sie, um erfolgreich Mathematik unterrichten zu können? Einige der Antworten wird sie im kollegialen Gespräch bekommen, für andere sind schriftlich formulierte Vereinbarungen hilfreich und sinnvoll.

Überprüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Fachcurriculums

Die Arbeit am schulinternen Fachcurriculum ist ein fortlaufender Prozess. Werden auf Fachkonferenzen verbindliche Vereinbarungen getroffen, sind sie ins schulinterne Fachcurriculum aufzunehmen. Zudem ist regelmäßig zu überprüfen, ob die im schulinternen Fachcurriculum enthaltenen Vereinbarungen eingehalten werden und gegebenenfalls überarbeitet werden müssen, weil sich beispielsweise Rahmenbedingungen geändert haben.

V Leistungsbewertung

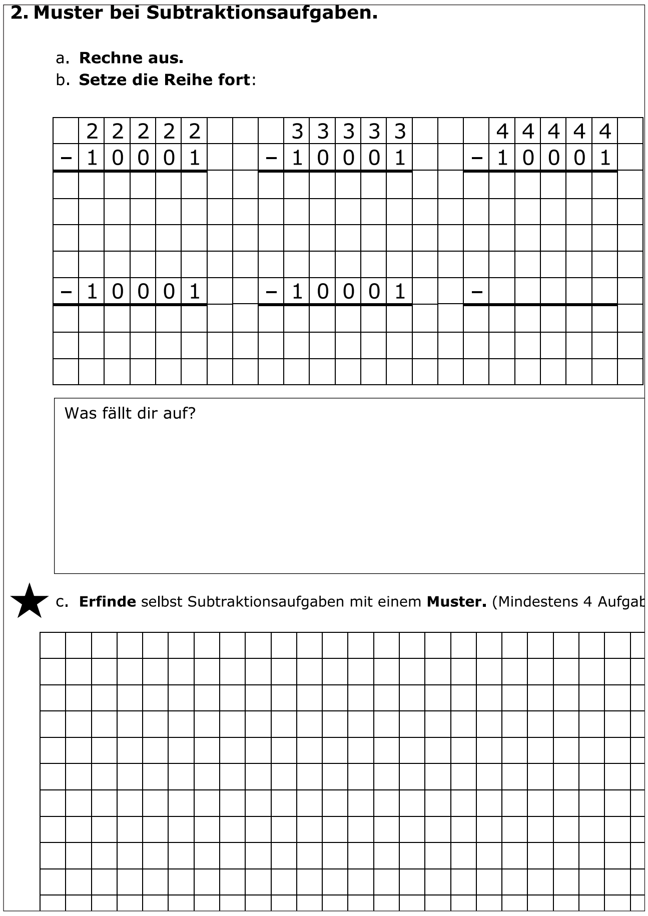
In der Grundschule hat die Leistungsfeststellung in erster Linie eine Entwicklungsfunktion, das heißt aus dem ermittelten Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler werden Konsequenzen für die Weiterarbeit abgeleitet, mit dem Ziel der bestmöglichen Förderung unter Berücksichtigung der individuellen Entwicklungsmöglichkeiten. Dabei sind zwei Ebenen zu beachten: Durch die Bereitstellung unterschiedlicher Unterstützungsangebote (zum Beispiel: Anschauungsmaterialien, Lernzeit, Wortspeicher, Tippkarten) wird der Lernprozess der Lernenden differenziert. Dennoch ist es in der Regel nicht möglich, alle Schülerinnen und Schüler zum gleichen Kompetenzerwerb zu führen. Trotz größtmöglicher Unterstützung und Förderung werden nicht alle Kinder das Gleiche lernen.

Daher ist es, um dem Anspruch eines inklusiven und differenzierenden Unterrichts gerecht werden zu können, sehr sinnvoll und in den meisten Fällen auch notwendig, nicht nur im Unterricht bei der Vermittlung und Aneignung von Wissen und Kompetenzen zu differenzieren, sondern diesen Grundsatz auch auf die Leistungsfeststellung auszudehnen. Deshalb ist der Einsatz differenzierter Klassenarbeiten zu empfehlen. Differenzierte Klassenarbeiten tragen dazu bei, Versagensängste abzubauen und damit einer negativen Erwartungshaltung dem Fach Mathematik gegenüber vorzubeugen.

Differenzierte Klassenarbeiten

Klassenarbeiten sind ein Instrument zur Leistungsfeststellung der einzelnen Schülerinnen und Schüler und müssen daher das gesamte Leistungsspektrum der Schulklasse abbilden. Grundschulklassen weisen jedoch eine große Bandbreite in dieser Hinsicht auf, weshalb es oft nicht sinnvoll ist, alle Kinder alle Aufgaben bearbeiten zu lassen, sondern den Schülerinnen und Schülern Aufgaben anzubieten, die ihrem Leistungstand gerecht werden. Damit man dabei kein Kind in eine Über- oder Unterforderungssituation bringt, bieten sich verschiedene Modelle zur Differenzierung von Klassenarbeiten an, die allen Schülerinnen und Schülern das gesamte Anforderungsspektrum anbietet, jedoch eine Auswahl der Aufgaben je nach Leistungsvermögen zulässt oder vorsieht.

1. Modell mit Leistungsprogression


2. Muster bei Subtraktionsaufgaben.

a. **Rechne aus.**
b. **Setze die Reihe fort**:

22222 − 10001
33333 − 10001
44444 − 10001
− 10001
− 10001
−

Was fällt dir auf?

c. **Erfinde** selbst Subtraktionsaufgaben mit einem **Muster.** (Mindestens 4 Aufgab

Das **Zusatzaufgaben-Modell** bietet den Schülerinnen in einem ersten, größeren Teil Aufgaben, die den grundlegenden Anforderungen entsprechen. Im zweiten Teil finden sich Aufgaben mit erhöhtem Anforderungsniveau. Es ist wichtig, dass die weiterführenden Aufgaben als solche gekennzeichnet sind und die Schülerinnen und Schüler über die Zuordnung informiert sind.

Der Nachteil dieser Form der differenzierten Klassenarbeit besteht darin, dass manche Schülerinnen und Schüler unter Umständen nach der Bearbeitung des ersten Teils keine Zeit mehr haben, sich den anspruchsvolleren Aufgaben zu widmen. Eventuell trauen sie sich diese Aufgaben von vornherein nicht zu.

Außerdem ist langsames Arbeiten nicht immer ein Indikator für eine eingeschränkte Leistungsfähigkeit, was dazu führen kann, dass „starke“, aber langsam arbeitende Schülerinnen und Schüler ebenfalls nicht die Aufgaben mit dem höheren Anspruchsniveau erreichen, auch wenn sie sie eigentlich lösen könnten.

Diese Form der Differenzierung lässt sich daher auch so anlegen, dass innerhalb einer Aufgabe bestimmte Teilaufgaben die Grundanforderungen und andere weiterführende Anforderungen enthalten. Diese eingestreuten, anspruchsvolleren Aufgaben können je nach Leistungsvermögen bearbeitet oder übersprungen werden, siehe Beispiel. Bei einer kompetenzorientierten Bewertung kann auf diese Weise eine differenzierte Rückmeldung erfolgen, in welchen Teilbereichen die Schülerin/der Schüler nur die Grundanforderungen erreicht hat und in welchen Bereichen eine höhere Kompetenzstufe erreicht wurde. Dabei sollte der Anteil der Aufgaben im Bereich der Grundanforderungen zwischen 65% und 70% liegen. Werden Ziffernnoten erteilt, entspricht die vollständige und korrekte Lösung dieses Aufgabenteils der Note 3.

2. Modelle mit Alternativen

Das **Spalten-Modell** bietet für jede einzelne Aufgabe zwei Schwierigkeitsniveaus an. In der linken Spalte finden sich die Aufgaben, die die Grundanforderungen beinhalten, rechts stehen Aufgaben mit gleichem Inhalt, aber mit erhöhtem Schwierigkeits- oder Komplexitätsgrad. Die Schülerinnen und Schüler können bei jeder Aufgabe wählen, welche Variante sie bearbeiten möchten.

Wenn sie ausreichend Zeit haben, können sie auch beide Seiten bearbeiten, es wird aber im Falle einer Punktevergabe nur jeweils eine Aufgabe in die Wertung miteinbezogen.

Für die Schülerinnen und Schüler kann sich die Schwierigkeit ergeben, dass ein erhöhter Leseaufwand und die für jede Aufgabe zu treffende Entscheidung einen höheren Zeitbedarf mit sich bringt. Dies sollte in der Konzeption der Arbeit berücksichtigt werden. Zudem sind einige Schülerinnen und Schüler unsicher und wählen lieber die einfachere Variante, auch wenn sie eigentlich die schwierigere Aufgabe lösen könnten. Hier kann eine persönliche Ermutigung, sich mit den schwierigeren Aufgaben auseinanderzusetzen, hilfreich sein. Um mit diesem Modell zu beginnen, ist es möglich, nur einige Aufgaben in zwei Alternativen anzubieten, während der Rest der Aufgaben von allen bearbeitet wird.

Werden Punkte vergeben, schlägt sich dies in der Anforderung der Aufgaben nieder. Es gilt wieder der Richtwert, dass die linke Spalte 65% bis 70% der Gesamtpunktzahl ausmacht und im Falle einer Benotung der Note 3 entspricht.

1. Einwohner in Spanien

a. Runde immer **auf** oder **ab** zur Million.

In Spanien wohnen:

Kinder	
männlich	**weiblich**
6 892 566	6 232 787

Erwachsene	
männlich	**weiblich**
18 445 322	21 688 989

b. Rechne mit den gerundeten Zahlen:

- Wie viele Kinder sind es insgesamt?
- Wie viele Erwachsene sind es insgesamt?
- Wie viele Menschen leben insgesamt in Spanien?

1 Einwohner in Spanien

a. Runde immer **auf** oder **ab** zur Million.

In Spanien wohnen:

Kinder (✖)	
männlich	**weiblich**
6 800 000	6 200 000

Erwachsene (∗)	
männlich	**weiblich**
18 400 000	21 600 000

b. Rechne mit den gerundeten Zahlen:

- Wie viele **Kinder** (✖) sind es insgesamt?
- Wie viele **Erwachsene** (∗) sind es insgesamt?
- Wie viele **Menschen** (✖+∗) leben insgesamt in Spanien?

Das **Wahlaufgaben-Modell** ist ebenfalls ein Modell mit Alternativen. Dabei werden jedoch nicht alle Aufgaben in zwei Varianten angeboten, sondern den Schülerinnen und Schülern eine größere Anzahl von Aufgaben in verschiedenen Schwierigkeitsstufen angeboten, aus denen sie eine Auswahl treffen können. So können 9 Aufgaben angeboten werden, von denen vier Aufgaben dem Anforderungsbereich I, drei dem Anforderungsbereich II und zwei dem Anforderungsbereich III zuzuordnen sind. Die Schülerinnen und Schüler können sich sechs Aufgaben zur Bearbeitung auswählen. Der Anspruch der Aufgaben muss durch die angegebenen Punktzahlen oder eine andere Kennzeichnung ersichtlich sein.

Auch hier kann die Auswahl der Aufgaben für einige Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung darstellen, bei der sie die Unterstützung der Lehrkraft benötigen. Es empfiehlt sich auch, die Aufgaben mit aus dem Unterricht bekannten „Arbeitstiteln" zu versehen, um eine schnelle Orientierung über die enthaltenen Anforderungen zu ermöglichen.

Bereits die Auswahl der Aufgaben, die getroffen wird, ist für die Lehrkraft aufschlussreich, weil daraus zu ersehen ist, welche Anforderungen von einzelnen Lernenden gemieden werden.

3. Klassenarbeiten mit Lösungshilfen

Eine weitere Möglichkeit der Differenzierung von Klassenarbeiten ist das Bereitstellen von Lösungshilfen für einzelne Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler bei Bedarf „abrufen" können. Dies wird im Unterricht häufig in Form von Tippkarten realisiert und lässt sich auf Klassenarbeiten übertragen.

Die Arbeit besteht wie im Zusatzaufgaben-Modell zu 65% bis 70% aus Aufgaben mit Grundanforderung, für die keine Lösungshilfe angeboten wird. Für die Aufgaben mit höheren Anforderungen, die als solche gekennzeichnet sind, stehen Lösungshilfen zur Verfügung.

Dabei kommt es darauf an, dass die Lehrkraft sich genau darüber im Klaren ist, welche Anforderungen eine Aufgabe enthält und inwiefern sich durch eine gegebene Lösungshilfe das Anforderungsprofil verändert. Die Lehrkraft legt bei der Erstellung der Klassenarbeit fest, bei welchen Aufgaben welche Lösungshilfen sinnvoll erscheinen. Meist sind das komplexere Aufgaben, zum Beispiel: Modellierungsaufgaben, für die als Lösungshilfe vor allem Verständnis- und Strukturierungshilfen angeboten werden und so bei dem Schüler eventuell Denkblockaden lösen.

Bei einer Punktevergabe reduziert die Inanspruchnahme der Lösungshilfe die zu erreichenden Punkte.

1. Zahlen bilden

a. **Bilde** mit den Ziffern **5 fünfstellige Zahlen.**

2 4 5 7 8 9

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

b. **Ordne** die Zahlen der Größe nach. Beginne mit der **kleinsten Zahl.**

c. **Bilde** eine **Additionsaufgabe** mit dem **größten Ergebnis.**
Bilde eine **Additionsaufgabe** mit dem **kleinsten Ergebnis.**

Tipp 1
Nimm dir die Ziffernkarten und lege die Zahlen.

Tipp 2 für Aufgabe 3c:
Schreibe die Zahlen in eine Stellenwerttafel
Entscheide dann, welche Zahlen du für das Lösen der Aufgabe wählst.

Andere Formen der Differenzierung
Neben den vorgestellten Modellen zur Differenzierung von Klassenarbeiten gibt es noch weitere Aspekte, bei denen eine Differenzierung in Bezug auf Klassenarbeiten sinnvoll ist.

Zeitpunkt und Dauer
Es ist möglich, dass nicht alle Kinder zum selben Zeitpunkt die Arbeit schreiben. Generell kann es günstig sein, die Klassenarbeit nicht immer als Abschluss eines Themas zu platzieren. Wenn Schülerinnen und Schüler nämlich die Rückmeldung erhalten, das Einiges noch nicht beherrscht wird, sollten sie im Rahmen des Unterrichts auch die Möglichkeiten erhalten, diese „Lücken" zu schließen, was nur möglich ist, wenn das Unterrichtsthema nicht abrupt nach der Klassenarbeit beendet wird. Wenn es gelingt, die Klassenarbeit in einem Zeitraum den Schülerinnen und Schülern „anzubieten", kann mittels dieser Maßnahme differenziert werden. Diese Formen der zeitlichen Differenzierung stellen in erster Linie eine organisatorische Herausforderung da, denn während einige Kinder Ruhe beim Bearbeiten der Klassenarbeit benötigen, wird der Unterricht mit den anderen regulär gestaltet.

Für Schülerinnen und Schüler, deren Konzentration schneller sinkt, lässt sich eine Klassenarbeit auch in zwei Teile aufteilen, die an verschiedenen Tagen bearbeitet werden. Grundsätzlich sollte für die Bearbeitung einer Klassenarbeit ausreichend Zeit zur Verfügung gestellt werden. Sonst lässt sich in der Bewertung nicht transparent nachvollziehen, welche Anforderungen die Schülerin/der Schüler nicht erfüllt, und für welche er nicht ausreichend Zeit hatte.

Sprachliche Unterstützung
Besonders für DaZ-Schülerinnen und DaZ-Schüler, aber auch für viele Lernende mit deutscher Muttersprache sind insbesondere Aufgaben, die in Textform dargeboten werden, eine große Herausforderung. Auch hier gilt es, die verschiedenen Anforderungen, die eine solche Textaufgabe mit sich bringt, voneinander getrennt zu betrachten und ggf. im Bereich des Textverständnisses zu differenzieren. Hierbei können bildliche Darstellungen oder das Vorlesen der Aufgabe helfen. Für Schülerinnen und Schüler nichtdeutscher Muttersprache ist in den Jahrgangsstufen 3 und 4 auch der Einsatz eines Wörterbuches eine gute Möglichkeit.