

Gute Aufgaben

Gerd Walther



Grundschule

Steigerung der Effizienz des
mathematisch-naturwissenschaftlichen
Unterrichts

G1
Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Zur Einstimmung	1
2 Funktionen von Aufgaben	3
3 Prozessbezogene Kompetenzen als Perspektive von Qualitätsentwicklung	6
4 Qualität von Aufgaben	10
5 Beispiele für gute und andere Aufgaben: Aufgabenanalyse	11
6 Rückblick und Agenda: Etwas aus Aufgaben machen, gute Aufgaben als variable Objekte des Unterrichts	22
6.1 Rückblick	22
6.1 Agenda	24
6.3 Fragmente zum Schwerpunkt Aufgabenvariation, Aufgabenweiterentwicklung	28
7 Statt einer Zusammenfassung: Vorschlag für ein Unterrichtsbeispiel	40
Literatur	45
Anhänge 1 und 2	

Impressum

Gerd Walther
Gute Aufgaben

Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule
Programmträger: Leibniz-Institut für die



Pädagogik der Naturwissenschaften und
Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de
© IPN, September 2004

Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Dr. Kirstin Lobemeier
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-180-5

Nutzungsbedingungen

Das Kieler Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) gewährt als Träger der SINUS-Programme ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Trotz sorgfältiger Nachforschungen konnten nicht alle Rechteinhaber der in den SINUS-Materialien verwendeten Abbildungen ermittelt werden. Betroffene Rechteinhaber wenden sich bitte an den Programmträger (Adresse nebenstehend).

Modul 1: Gute und andere Aufgaben

(Arbeitsversion)

1 Zur Einstimmung

Die folgende Aufgabe ist einem Schulbuch¹ für die 4. Klasse entnommen:

c) Addiere immer die beiden

Ergebnisse.

$$450 + 80$$

$$450 - 80$$

$$450 - 65$$

$$450 + 65$$

$$450 + 120$$

$$450 - 120$$

$$450 + 145$$

$$450 - 145$$

Beantworten Sie bitte, bevor Sie weiterlesen die folgende Frage: Würden Sie diese Aufgabe als eine gute Aufgabe bezeichnen?

Geben Sie bitte Gründe für Ihre Einschätzung an.

Eine mögliche Antwort auf die obige Frage könnte schlicht lauten: „Das kommt darauf an.“

Stellen Sie sich bitte folgendes Szenario vor: Ein Mathematiklehrer² lässt seine Viertklässler die Aufgabe in der Weise bearbeiten, dass sie *nur* die jeweiligen Teilergebnisse eines Aufgabenpärchens berechnen und diese addieren – mehr verlangt auch der Aufgabentext nicht. Spätestens nach dem Vergleich der Summen und der Durchführung etwaiger Korrekturen schließt er die Bearbeitung der Aufgabe ab.

Bei diesem Umgang mit der Aufgabe steht offenbar die Entwicklung bzw. Festigung von mathematischem Grundwissen und mathematischen Fertigkeiten/Verfahren, also sog. *Inhaltlichen mathematischen Kompetenzen*³ im Vordergrund.

Wie Sie in diesem Text noch erfahren werden, würde bei *dieser* Zielsetzung und der entsprechenden Aufgabenbearbeitung im Unterricht die Aufgabe in dem im Weiteren noch näher zu erläuternden Sinn, d.h. in Bezug auf einen noch festzusetzenden Qualitätsrahmen, *nicht* als

¹ Wenn im vorliegenden Text Aufgaben aus Schulbüchern genommen sind, so ist dies mit der Angabe der entsprechenden Klassenstufe vermerkt. Wir verzichten aber auf die Quellenangabe, damit punktuelle Kritik (oder Lob), z.B. an *einer* Aufgabe des Buchs nicht von Lesern dieses Textes vorschnell und pauschal auf das gesamte Schulbuch (-werk) übertragen wird.

² Bei Personenbezeichnungen werden aus Gründen der besseren Lesbarkeit im Text keine geschlechtsspezifischen Unterscheidungen vorgenommen. „Lehrer“, „Schüler“ beinhalten sowohl männliche als auch weibliche Vertreter dieser Gruppen.

³ Vgl. Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik (Jahrgangsstufe 4). Entwurf (Stand: 23.04.04); im vorliegenden Text kurz *Bildungsstandards* genannt (vgl. Anhang 1). Die Bildungsstandards sprechen hier von *inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen*.

gute Aufgabe sondern, wie wir später sagen werden, als *andere* Aufgabe eingestuft werden. Im Hinblick auf *andere Zielvorstellungen*, wenn es etwa primär um die Entwicklung bzw. Festigung inhaltlicher mathematischer Kompetenzen ginge, könnte jedoch die Aufgabe bzw. das, was aus ihr im Unterricht „gemacht“ wird, das Prädikat „gute Aufgabe“ erhalten. Aufgaben, die zeigen diese erste Betrachtung bereits, sind hinsichtlich ihrer Beurteilung unter Qualitätsgesichtspunkten vielfach ambivalent. Diese Ambivalenz sollten Lehrkräfte nicht als Quelle möglicher Irritationen, sondern vielmehr konstruktiv, als Chance zu einem flexiblen Umgang mit Aufgaben verstehen.

Unter diesem Aspekt wäre es schade, wenn zum Beispiel die obige Aufgabe nach ihrer ersten Einschätzung als *andere* Aufgabe „abgehakt“ und ad acta gelegt werden würde. Wie Sie noch sehen werden, steckt in dieser Aufgabe nämlich neben der Möglichkeit zur Entwicklung und Festigung von *inhaltlichen Kompetenzen* weiteres, in dem eben skizzierten Szenario nicht genutztes Potential zur Entwicklung und Festigung auch von sog. *prozessbezogenen Kompetenzen*⁴.

Mathematiklernen in der Grundschule darf nach heutiger Auffassung nicht auf die Aneignung von inhaltlichen Kompetenzen, also Kenntnisse und Fertigkeiten reduziert werden. In Verbindung mit der Entwicklung und Festigung inhaltlicher Kompetenzen kommt der Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen, wie zum Beispiel der Fähigkeit, selbstständig oder gemeinsam mit anderen mathematische Probleme oder außermathematische Probleme mit Hilfe von Mathematik zu lösen, Situationen experimentierend zu erforschen, Beziehungen und Strukturen zu entdecken, Sachverhalte zu beschreiben und zu begründen, eine große Bedeutung zu. *Beide* Kompetenzbereiche gehören zusammen und sollten im Mathematikunterricht der Grundschule gleichermaßen gefördert werden. Die Fokussierung in diesem Modul auf die Entwicklung und Festigung prozessbezogener Kompetenzen durch Aufgaben gründet sich darauf, dass sich in der Vergangenheit der Mathematikunterricht wohl eher auf inhaltliche Kompetenzen konzentriert hat.

Sie werden in diesem Text unter anderem am Beispiel der obigen Aufgabe erfahren, wie Sie, vielleicht auch *zusammen* mit Ihren Schülern, daraus eine gute Aufgabe machen können. Dabei wird es vor allem darauf ankommen, das in der Aufgabe „steckende“ Potential zur Ent-

⁴ Die Bildungsstandards sprechen hier von *allgemeinen mathematischen Kompetenzen*.

wicklung und Festigung von *prozessbezogenen Kompetenzen* zu erkennen und für das Lernen der Schüler nutzbar zu machen.

Aktivität 1. Wie würden Sie die obige Aufgabe „verbessern“?

Halten wir fürs erste fest:

- Aufgaben an sich sind nicht in einem absoluten Sinn gut; um von *guten* Aufgaben reden zu können bedarf es eines Qualitätsmaßstabes,
- der Qualitätsmaßstab wird sich an Kompetenzen orientieren, welche bei den Schülern entwickelt bzw. gefestigt werden sollen,
- die Qualität einer Aufgabe ist in der Regel nicht bereits durch ihren Aufgabentext festgelegt, sondern wird durch den Umgang des Lehrers und der Schüler mit der Aufgabe mit bestimmt.

2 Funktionen von Aufgaben

Der berufliche Alltag von Mathematiklehrern und der Lern-Alltag von Schülern wird wesentlich durch den Umgang mit Aufgaben geprägt. Aufgaben werden präsentiert

- in schriftlicher Form (z. B. durch Texte, Bilder, Diagramme in Schulbüchern, Arbeitsblättern, auf dem Bildschirm),
- in mündlicher Form (z. B. während des Unterrichtsgesprächs).

Mündlich gestellte Aufgaben können explizit im üblichen, d. h. auch in der schriftlichen Form verwendeten Aufgabenformat formuliert werden, z. B. beim Kopfrechnen oder der Kopfgeometrie. Häufig sind mündliche Aufgabenstellungen in ein Unterrichtsgespräch in Verbindung mit der gemeinsamen Bearbeitung einer Aufgabe eingebettet: Susi stellt an der Tafel ihre Aufgabenlösung vor und gerät ins Stocken. Mit der Frage der Lehrerin „Wer hilft weiter?“ wird den anderen Kindern implizit die Aufgabe gestellt, Susis Lösungsansatz aufzugreifen ggf. zu korrigieren und zu Ende zu bringen. Das Angebot eines Schülers „Ich hab das anders gerechnet“ dürfte in diesem Kontext wohl kaum zum Zuge kommen.

Aufgaben sind sowohl aus Lehrer - als auch Schülerperspektive mit vielfältigen Tätigkeiten und Bezügen verbunden.

Lehrer

- wählen Aufgaben für den Unterricht aus,
- bereiten Aufgaben vor,
- stellen didaktisches Material für die Aufgabenbearbeitung bereit,
- stellen - vielfach spontan - Aufgaben in mündlicher Form,
- beraten Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben,
- überprüfen und werten mündliche oder schriftliche Lösungen und Lösungswege,
- führen verschiedene Lösungsfragmente von Schülern zusammen,
- bewerten Aufgabenlösungen von Schülern, usw.

Schüler

- versuchen, Aufgaben zu lösen,
- versuchen, Lösungen anderer Schüler zu verstehen (oder „einfach“ zu übernehmen),
- schätzen Aufgaben nach ihrer Lösungschance ein,
- bearbeiten allein oder gemeinsam mit anderen (im Unterricht oder zu Hause) Aufgaben,
- bitten um Unterstützung bei der Aufgabenbearbeitung,
- stellen emotionale Bezüge zu Aufgaben und zur Aufgabenbearbeitung her (z. B.: „interessant/langweilig“, „mache ich gern/ungern“), usw.

Es wird sich zeigen, dass der prozessbezogene Umgang mit Aufgaben, um den es in diesem Text geht, Bezüge zu fast allen dieser Punkte aufweist.

Wenn wir im Folgenden von „Aufgaben“ sprechen, so sind damit fachbezogene Anforderungen an Schüler im Kontext von Fachunterricht, hier: Mathematikunterricht, gemeint mit der Intention, Lernprozesse in Gang zu setzen oder Lernergebnisse zu überprüfen. In diesem Sinne zählen dann auch mathematische Anforderungen, die in „Hausaufgaben“ gestellt werden zu dem hier verwendeten Konzept von Aufgabe, nicht aber z. B. die „Aufgabe“ an einen Schüler, in der nächsten Woche den Tafeldienst zu übernehmen.

Mit Blick auf die *Schüler* erfüllen Aufgaben im Mathematikunterricht somit zwei grundlegende didaktische Funktionen:

1. Durch die individuelle oder gemeinsame Bearbeitung von Aufgaben sollen bei den Schülern Lernprozesse zur Entwicklung und Konsolidierung von Kompetenzen angestoßen werden.
2. Mit Aufgaben soll der Leistungsstand der Schüler, d. h. ihre durch Lernen erreichten Kompetenzen festgestellt werden.

Mit Blick auf den *Mathematikunterricht* erhofft man sich von Aufgaben noch weitere Funktionen:

3. Gute Aufgaben können als Instrument der *Qualitätsentwicklung* von Mathematikunterricht dienen⁵. Insbesondere kann über das Vehikel „Aufgaben“ das kollegiale Gespräch über Mathematikunterricht (Konzeption, Qualität etc.) zwischen Lehrern in Gang gesetzt werden.
4. In der aktuellen Diskussion über Bildungsstandards dienen Aufgabenbeispiele als normatives Instrument der Qualitätssicherung dazu, das Wesentliche dieser Bildungsstandards an Aufgaben exemplarisch zu verdeutlichen. Gleichzeitig sollen Lehrer dafür sensibilisiert werden zu erkennen, dass in Aufgaben „dieses Typs“ das Potenzial zur Entwicklung von Kompetenzen steckt, wie sie die Bildungsstandards fordern.

Gerade die beiden letzten Punkte bilden gewissermaßen das Rückgrat dieses Moduls. Allgemeines Ziel des Projekts SINUS-Transfer Grundschule ist letzten Endes die weitere Qualitätsentwicklung von Mathematikunterricht. Aufgaben sind *ein* Instrument in diesem Prozess. Aufgaben, die sich hierfür in besonderer Weise eignen, nennen wir „gute“ Aufgaben. Um eine nähere inhaltliche Vorstellung von solchen Aufgaben zu bekommen, muss etwas über Qualitätsentwicklung von Mathematikunterricht in der Grundschule gesagt werden. Hierzu gibt es in der Literatur vielfältige Vorstellungen. Wir werden uns hier auf *einen*, durchaus traditionellen Bereich beschränken, nämlich Qualitätsentwicklung von Mathematikunterricht im Sinne

⁵ Vgl. hierzu Leuders, T.: Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag, Berlin 2001. Manches von dem, was Leuders über Aufgaben allgemein und Aufgaben als Instrument der Qualitätssicherung ausführt, lässt sich auch auf die Grundschule übertragen.

einer bewussteren Entwicklung *prozessbezogener Kompetenzen* bei Schülern im Unterricht. Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, dass der Blick auf Aufgaben unter dem Gesichtspunkt einer Entwicklung von prozessbezogenen Kompetenzen im Unterricht nur *eine* unter einer Vielzahl von Möglichkeiten ist⁶.

Lehrer, so hatten wir festgestellt, gehen tagtäglich in ihrem Mathematikunterricht mit Aufgaben um. Sie sind gewissermaßen Experten für Aufgaben. Daher kann es nur Ziel dieses Basisbeitrages zum Modul „Gute Aufgaben“ sein, vor dem Hintergrund der reichhaltigen Erfahrungen, die Lehrer zum Thema Aufgaben besitzen, die Aufmerksamkeit auf einige wichtige, mit der Entwicklung von prozessbezogenen Kompetenzen verknüpften Aspekte beim Umgang mit Aufgaben zu lenken.

Für eine vertiefte Auseinandersetzung mit der Thematik *Aufgaben und prozessbezogene Kompetenzen* mit dem Ziel, Ihren eigenen Mathematikunterricht davon profitieren zu lassen, ist es unerlässlich, selbst aktiv zu werden. Als Anregung hierzu sind die in den Text eingestreuten *Aktivitäten*, also Aufgaben für *Sie*, gedacht. Diese Aktivitäten sollen überdies als Anlässe für Diskussion, Ideen- und Materialentwicklung mit Kollegen dienen.

3 Prozessbezogene Kompetenzen als Perspektive von Qualitätsentwicklung

Richten wir zur Einordnung dieses Gedankens zunächst den Blick zurück. Mit seinem grundlegenden Aufsatz zu einem Sammelband „Beiträge zum Lernzielproblem“ hat Heinrich Winter vor gut 30 Jahren den entscheidenden Impuls für eine zeitgemäße, breite und nachhaltige Diskussion über Allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts gegeben⁷. Obwohl sich Winters damalige Überlegungen auf die Sekundarstufe I beziehen, hat sich sehr schnell ihre Fruchtbarkeit auch für die anderen Schulstufen, insbesondere die Grundschule, erwiesen. Unter „allgemeinen Lernzielen“ versteht Winter „Lernziele mittlerer Hierarchie, nämlich solche, die zwar spezifisch sind (...) für den Mathematikunterricht als Ganzes, die aber andererseits nicht

⁶ Vgl. das anregende Buch von Ruwisch, S. und Peter-Koop, A.: Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Mildenerger Verlag, Offenburg 2003.

⁷ Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Eine Schriftenreihe des Kultusministers NRW, Henn Verlag, Ratingen 1972, S. 67 – 95.

an Einzelinhalte gebunden sind ...“. Das Ziel, dass „Der Schüler soll natürliche Zahlen mit der Rundungsregel runden können“ ist ein Beispiel für ein an Einzelinhalte gebundenes Ziel.

Winter schlägt in diesem Beitrag die folgenden grundlegenden allgemeinen Ziele, als bei Schülern „anzustrebende Verhaltensweisen“ vor:

- *Fähigkeit zum Mathematisieren*, d.h. die Fähigkeit, eine inner- oder außermathematische Situation mit mathematischen Mitteln zu ordnen,
- *Kreativität*, sowie
- *Argumentationsfähigkeit*.

Statt von „anzustrebenden Haltungen“ bei den allgemeinen Lernzielen oder, diese in spezifischer Weise ergänzend, von „anzustrebenden intellektuellen Grundfertigkeiten“ (z.B. Klassifizieren, Ordnen, Formalisieren) zu sprechen, verwenden verschiedene Autoren heute Bezeichnungen, die deutlicher die Lernerseite betonen: *kognitive Strategien*⁸ bzw. *prozessbezogene Kompetenzen*⁹ (in Anhang 1 sind aus den Bildungsstandards für die Grundschule der dort benutzte Katalog prozessbezogener Kompetenzen wiedergegeben). Auch die Bezeichnung *Allgemeine Lernziele* ist noch in Gebrauch¹⁰.

Gewiss wird eine Reihe von Lesern bereits über mehr oder weniger differenzierte Vorstellungen zu den drei genannten prozessbezogenen Kompetenzen verfügen. Um aber eine gemeinsame, inhaltlich ausdifferenzierte Verständigungs- und Arbeitsgrundlage herzustellen, gebe ich im Folgenden (leicht verändert) die von Wittmann (vgl. Fußnote 8) vorgenommene Aufschlüsselung der oben genannten drei grundlegenden Kompetenzen (bzw. Kompetenzfelder) in prozessbezogene (Teil-) Kompetenzen wieder. Diese Aufgliederung zeigt zudem, dass die drei Kompetenzfelder Überschneidungen aufweisen.

Kompetenzen beschreiben das, was ein Lernender schließlich kann oder können sollte. Die Entwicklung und Festigung von Kompetenzen erfolgt über bestimmte Aktivitäten/Tätigkeiten des Lernenden. Die aufgeführten Unterpunkte können in diesem Sinne auch als Beschreibung

⁸ Wittmann, E. Ch.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg Verlag, Braunschweig 1981. In diesem Buch werden neben anderen Systemen von allgemeinen Lernzielen auch die Winterschen Vorschläge zu allgemeinen Lernzielen ausführlich erörtert.

⁹ Vgl. die Bildungsstandards im Fach Mathematik (Jahrgangsstufe 4).

¹⁰ Krauthausen, G.: Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Die Grundschulzeitschrift 119/1998, S. 54 – 61.

von sog. *prozessbezogenen Aktivitäten* aufgefasst werden, welche die Entwicklung und Festigung entsprechender Kompetenzen unterstützen.

I. Mathematisieren

Der Schüler soll lernen, Situationen (mathematischer und besonders auch real-umweltlicher Art) zu mathematisieren, das bedeutet:

- 1 Situation mit mathematischen Mitteln erfassen und darstellen
- 2 Daten gewinnen (Experimentieren, Zählen, Messen, Schätzen)
- 3 Strukturelle Zusammenhänge aufdecken und formulieren (m.a.W. Bildung einer mathematischen Struktur bzw. – im Fall einer Realsituation – eines mathematischen Modells)
- 4 Sachrelevante Problemstellungen aufgreifen bzw. selbst finden
- 5 Daten im Hinblick auf Lösung der Probleme verarbeiten
- 6 Lösungen und Lösungswege situationsadäquat interpretieren, diskutieren und darstellen

II. Kreativität

Der Schüler soll lernen, sich forschend-entdeckend und konstruktiv zu betätigen, also:

- 1 Vermutungen (z.B. über Beziehungen, Muster, Strukturen, ...) aufstellen
- 2 Lösungs- und Begründungsideen entwickeln, Lösungswege planen
- 3 Komplexe Handlungsabläufe sachadäquat in Teilschritte gliedern
- 4 Über die gegebene Information hinausgehen
- 5 Eine Situation bzw. Aufgabenstellung variieren, fortsetzen, übertragen
- 6 Verallgemeinerungen erkennen und formulieren
- 7 Probleme konstruieren

III. Argumentieren

Der Schüler soll lernen zu argumentieren, nämlich:

- 1 Sich an Vereinbarungen (Regeln, Definitionen) halten
- 2 Allgemeine Aussagen an Spezialfällen testen (Beispiele – Gegenbeispiele)
- 3 Begründen, Folgern, Beweisen
- 4 Begründungen auf Stichhaltigkeit prüfen, Scheinargumente aufdecken
- 5 Mathematische Überlegungen bezüglich ihrer Verständlichkeit, Prägnanz, Bedeutung diskutieren und bewerten

Mathematikunterricht, der in Verbindung mit der Entwicklung und Festigung von inhaltlichen Kompetenzen auch die Entwicklung und Festigung von prozessbezogenen Kompetenzen anstrebt, vermittelt ein an der Wissenschaft Mathematik orientiertes Bild von Mathematik, das gleichermaßen Mathematik als fertigen, abrufbaren und anwendbaren Bestand an begrifflichem Wissen und Verfahrenswissen, aber auch als ein durch Tätigkeit im Werden Befindliches einschließt. Mit dieser Zielsetzung harmoniert sehr gut eine Auffassung von Mathematik als Wissenschaft von den Mustern¹¹. Wie Winter dargelegt hat, korrespondieren diese prozessbezogenen Kompetenzen zudem mit grundlegenden Wesenszügen des Menschen (anthropologischer Bezug) und Zielsetzungen der allgemeinbildenden Schule¹², woraus sie u.a. ihre Rechtfertigung¹³ erfahren.

Inzwischen liegen in neueren Rahmenplänen für die Grundschule, in den „Bildungsstandards für die Grundschule“ und in anderen Veröffentlichungen¹⁴ unterschiedlich detaillierte und differenzierte Kataloge *prozessbezogener Kompetenzen* vor, deren Kern unverkennbar von den Winterschen Zielvorstellungen geprägt ist.

Wie oben bereits erwähnt, können prozessbezogene Kompetenzen nur in Verbindung mit mathematischen Inhalten entwickelt werden. Winter bringt dies in seinem Beitrag von 1972 so auf den Punkt: Es gibt kein Stricken ohne Wolle. Auch über die in der Grundschule zu vermittelnden *grundlegenden mathematischen Begriffe und Verfahren*, also die inhaltsbezogenen Kompetenzen, wie z.B. zu Zahlen, Zahlenmustern, Zahloperationen, Größen, geometrischen Figuren und Mustern besteht in Rahmenplänen und in den Bildungsstandards¹⁵ für die Grundschule trotz mancher terminologischer Unterschiede breite Übereinstimmung.

Es liegt im übrigen auf der Hand, dass das Ziel der Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen in einem sehr engen Zusammenhang mit der Thematik der beiden anderen Basismodule¹⁶ steht. Kreativität, Ideenreichtum, Ideenflüssigkeit und die Fähigkeit Situationen „mathematisch“ zu sehen, sind wichtige Bedingungen für entdeckendes, erforschendes Lernen im

¹¹ Dieser Aspekt wird ausführlich erläutert in Steinweg, A. S.: Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. LIT, Münster 2001.

¹² Winter, H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 7 (1975), S. 106 – 116.

¹³ Vgl. hierzu auch Wittmann, E. Ch.: Grundfragendes des Mathematikunterrichts. Vieweg Verlag, Braunschweig 1981, S. 54f.

¹⁴ Z.B. in dem vom Grundschulverband vertretenen „Leitkonzept zeitgemäßer Grundschularbeit“, insbesondere in den Ausführungen zum Fach Mathematik.

¹⁵ Vgl. die *inhaltlichen mathematischen Kompetenzen* in den Bildungsstandards.

Mathematikunterricht (vgl. Modul 2). Vorgehensweisen bei der inhaltlichen oder prozessbezogenen Öffnung von Mathematikunterricht (vgl. Modul 3) vermögen ein förderliches Klima für die Bearbeitung guter Aufgaben zu schaffen.

Aktivität 2. Vergleichen Sie die ausdifferenzierten Winterschen Lernziele mit den allgemeinen mathematische Kompetenzen der Bildungsstandards (Anhang 1)

4 Qualität von Aufgaben

Kommen wir zur Frage der Qualität von Aufgaben zurück. Vor dem skizzierten Hintergrund zu prozessbezogenen Kompetenzen legen wir fest:

Gute Aufgaben sind Aufgaben, welche bei Schülern in Verbindung mit grundlegenden mathematischen Begriffen und Verfahren die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen unterstützen.

Mit dieser zunächst etwas formal wirkenden Festsetzung soll deutlich gemacht werden, dass die Bewertung von Aufgaben mit dem Prädikat *gut* immer nur auf der Folie eines explizierten Qualitätsrahmens sinnvoll ist. Dadurch wird

- der Qualitätsrahmen transparent, diskutierbar und kritisierbar,
- und es kann zudem die Qualitätsbewertung von Aufgaben argumentativ vertreten werden.

Vor diesem Hintergrund vermeiden wir es auch von *schlechten* Aufgaben zu sprechen. Aufgaben, die im obigen Sinne nicht das Prädikat *gut* erhalten, können durchaus andere wichtige Ziele, wie z.B. die Routinisierung des Kleinen Einmaleins oder das gezielte Üben anderer Kenntnisse und Fertigkeiten verfolgen. Zur Abgrenzung von guten Aufgaben sprechen wir in diesen Fällen von *anderen Aufgaben*. Damit wird also zum Ausdruck gebracht, dass solche Aufgaben primär nicht die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen, sondern andere Zielsetzungen verfolgen.

¹⁶ Modul 2: Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Entdecken, erforschen und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Modul 3: Mathematikunterricht zwischen Offenheit und Zielorientierung.

5 Beispiele für gute und andere Aufgaben: Aufgabenanalyse

In diesem Abschnitt stellen wir einige Aufgabenbeispiele¹⁷ vor, von denen wir zeigen werden, dass es sich dabei im Sinne des obigen Kriteriums um gute Aufgaben handelt. Das grundlegende Instrument das dazu eingesetzt wird ist die *Aufgabenanalyse*. Wir führen an Hand der drei Aufgabenbeispiele exemplarisch das Instrument der Aufgabenanalyse ein. Die Analyse von Aufgaben hat insbesondere in den USA eine lange Tradition und kann unter den verschiedensten Zielsetzungen durchgeführt werden¹⁸. In diesem Kapitel soll Aufgabenanalyse dem folgenden Ziel dienen:

Mit der Analyse von Aufgaben soll ihr Potential ausgelotet werden, die Entwicklung bzw. Festigung von prozessbezogenen Kompetenzen zu unterstützen.

Zwei der Beispiele stammen aus Schulbüchern, das dritte wurde im Rahmen einer Unterrichtsstunde „geboren“. In den drei Beispielen aus der Arithmetik geht es um grundlegende Inhalte, nämlich die vier Grundrechenarten. Damit ist *eine* der oben genannten Bedingungen für gute Aufgaben erfüllt.

Aktivität 3. Analysieren Sie bitte alle im Text vorgestellten Aufgaben bezüglich ihrer spezifischen mathematischen Anforderungen an die Schüler. Dazu können Sie etwa den für Sie „zuständigen“ Grundschul-Rahmenplan oder die in den Bildungsstandards ausgewiesenen inhaltlichen mathematischen Kompetenzen heranziehen.

Zur zweiten Bedingung. Welche prozessbezogenen Kompetenzen können durch die Aufgaben unterstützt werden?

Zur exemplarischen Illustration der Aufgabenanalyse beziehen wir uns auf die o.g. prozessbezogenen Kompetenzen *Mathematisieren, Kreativität und Argumentationsfähigkeit* und deren Ausdifferenzierung in der Tabelle in Abschnitt 3. Wir werden bei den Beispielen zur Aufgabenanalyse die in der Tabelle genannten Punkte nicht „bürokratisch“ abarbeiten, sondern ver-

¹⁷ Gerne greifen wir bei den Aufgabenbeispielen in diesem und den folgenden Abschnitten auf Schulbücher zurück um zu zeigen, dass sich die vorgeschlagenen Ideen im alltäglichen Mathematikunterricht realisieren lassen.

suchen, an einigen Punkten das Wesentliche der Aufgabenanalyse zu illustrieren, um ein „Gefühl“ für dieses Instrument zu vermitteln. Selbstverständlich sind Sie gern eingeladen, die hier vorgestellten Aufgabenanalysen noch weiter zu detaillieren, oder zur Aufgabenanalyse auch andere Kataloge von prozessbezogenen Kompetenzen, etwa aus den Bildungsstandards, heranzuziehen.

Die Beispiele, an denen wir im Folgenden das Instrument der Aufgabenanalyse illustrieren, sind dem Bereich Arithmetik entnommen. Aufgaben aus der Geometrie, die Sie selbstständig analysieren können, finden Sie in Abschnitt 6 und in Anhang 2. Bei diesen Beispielen bezieht sich die prozessbezogene Kompetenz des Mathematisierens schwerpunktmäßig auf innermathematische Situationen. Das Mathematisieren außermathematischer Situationen, traditionelle Domäne des Sachrechnens, bleibt zunächst ausgeklammert. Auf diesen wichtigen Bereich gehen wir im Rahmen eines etwas umfangreicheren Beispiels am Ende von Abschnitt 6 ein.

Beispiel 1: Aus einem Schulbuch für die 2. Klasse

- 2** Finde weitere Aufgaben mit dem gleichen Ergebnis.
- | | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| a) $25 + 26 = 51$ | b) $17 + 71 = 88$ | c) $39 + 8 = 47$ | d) $17 + 80 = 97$ |
| $26 + 25 = 51$ | $77 + 11 = 88$ | $40 + 7 = 47$ | $27 + 70 = 97$ |
| $21 + 30 = 51$ | $71 + 17 = 88$ | $41 + 6 = 47$ | $37 + 60 = 97$ |
- e) Warum sind die Ergebnisse in einem Päckchen immer gleich?

Analyse zu Beispiel 1

Mathematisieren. In den Teilen a) bis d) müssen die Schüler in den gegebenen Aufgabenpäckchen mit mathematischen Mitteln eine Regelmäßigkeit, ein Muster bzw. strukturelle Beziehungen zwischen den Aufgaben jedes Päckchens herausfinden¹⁹. Bei a) kann die zweite Aufgabe als Tauschaufgabe der ersten, aber auch anders gedeutet werden (s.u.). Die dritte Aufgabe hängt mit der ersten bzw. der zweiten zusammen. Der erste Summand der dritten Aufgabe ist um 4 kleiner als der erste Summand der ersten Aufgabe; der zweite Summand der dritten Aufgabe ist um 4 größer als der zweite Summand der ersten Aufgabe usw. Bei den Päckchen c) und d) wächst der erste Summand von Aufgabe zu Aufgabe um 1 bzw. 10, der zweite Summand nimmt jeweils um die gleiche Zahl gegensinnig ab. In jedem Fall soll also

¹⁸ Z.B. Welche Wissensvoraussetzungen oder Grundvorstellungen sind für eine Aufgabebearbeitung erforderlich? Wie lösen Schüler tatsächlich eine Aufgabe (Empirische Aufgabenanalyse)?

¹⁹ Vgl. in Modul 2 den Abschnitt „Schöne Päckchen“.

eine innermathematische Situation, nämlich jeweils ein Päckchen mit drei Aufgaben mit mathematischen Mitteln geordnet werden.

Kreativität. Wenn sich die Schüler mit den Teilen a) bis d) beschäftigen, werden sie zunächst Vermutungen über ein Muster, eine Regelmäßigkeit in den Aufgaben, oder Beziehungen zwischen den Aufgaben aufstellen. Auf der Grundlage der entdeckten Regelmäßigkeiten in den Aufgaben sollen die Schüler durch Verallgemeinerung selbstständig Aufgaben entwickeln, die zu dem jeweiligen Muster passen. Nun müssen die Schüler Lösungswege planen, welches der Muster den Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung(en) abgeben soll.

Der Spielraum für die weitere Arbeit der Schüler ist beträchtlich: sie können in den einzelnen Aufgabenpäckchen, im Set der Päckchen, oder in beiden verallgemeinern und weitere Aufgaben mit gleichem Ergebnis konstruieren. Zudem können die Schüler in den beiden ersten Päckchen für ihre weiteren Konstruktionen (zumindest punktuell) den Aspekt Aufgabe – Tauschaufgabe berücksichtigen, oder als die dominierende Beziehung zwischen den Aufgaben das „Gesetz von der Konstanz der Summe bei gegensinniger Veränderung der Summanden um den gleichen Betrag“ nutzen.

Natürlich könnten die Schüler auch nach *eigenen Regeln* Aufgaben mit gleichem Ergebnis konstruieren.

Beispiele für Verallgemeinerungen von Päckchen a); der Summenwert 51 wurde weggelassen:

25	+	26	25	+	26	25	+	26
26	+	25	26	+	25	26	+	25
21	+	30	21	+	30	21	+	30
30	+	21	22	+	29	35	+	16
17	+	34	17	+	34	18	+	33
34	+	17	18	+	33			

Argumentationsfähigkeit. In Teil e) von Beispiel 1 sollen die Schüler begründen, warum die Ergebnisse in einem Päckchen immer gleich sind. Solche Begründungen müssen sich selbstverständlich auf die Regeln stützen, die dem Muster der Aufgaben zugrunde liegen, sowie auf einschlägige arithmetische Regeln (z.B. Vertauschungsgesetz oder das Gesetz von der Konstanz der Summe bei gegensinniger Veränderung der Summanden um den gleichen Betrag). Aus Berichten von Lehrern ist bekannt, dass von manchen Schülern in einer Situation, in der die Ergebnisse in einem Päckchen vorgegeben gleich sind oder in den selbst konstruierten Aufgaben gleich sind, keine Begründungsnotwendigkeit gesehen wird: „Die Ergebnisse *sind doch gleich*“. Hier könnte man z.B. ein „neues“ Päckchen nehmen, das noch nicht ausgerechnet wurde und dann die entsprechenden Schüler nach einer Begründung suchen lassen. Ansonsten werden sich die Argumente für die Gleichheit der Ergebnisse im Wesentlichen auf die oben herausgefundenen Regelmäßigkeiten stützen.

Wir halten außerdem fest, dass dieses Aufgabenbeispiel im Text *explizite Aufforderungen* enthält, die „in die Richtung“ von prozessbezogenen Kompetenzen gehen.

Wie aber die Aufgabe letztlich im Unterricht bearbeitet wird, ob also die Anregungen in Richtung prozessbezogener Kompetenzen im Unterricht umgesetzt werden, ist durch die äußeren Aufgabenmerkmale, z.B. den Aufgabentext oder zugehörige Bilder, selbstverständlich noch nicht bestimmt.

Man stelle sich folgendes Szenario vor: Ein Lehrer begnügt sich damit, dass die Schüler etwa zwei weitere Aufgaben mit dem gleichen Ergebnis angeben; der Zusammenhang mit den anderen Aufgaben, der Aspekt des Musters, der Struktur in den Aufgaben, also das, worauf es bei dem von uns eingenommenen Standpunkt schließlich ankommt, wird jedoch nicht weiter thematisiert. Damit würde das in der Aufgabe steckende Potential zur Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen nicht genutzt werden.

Beispiel 2: Aus einem Schulbuch für die 4. Klasse

c) Addiere immer die beiden Ergebnisse.

$450 + 80$	$450 + 120$
$450 - 80$	$450 - 120$
$450 - 65$	$450 + 145$
$450 + 65$	$450 - 145$

Analyse zu Beispiel 2

Hier gibt der Aufgabentext *keinen* Hinweis auf prozessbezogene Kompetenzen. Nachdem die Schüler jeweils die Ergebnisse für ein Aufgabenpaar ausgerechnet und addiert, und bei den vier Paaren jeweils 900 erhalten haben, ist die explizite Aufgabenstellung bearbeitet.

Jetzt liegt es wesentlich am Lehrer, ob er das in der Aufgabe steckende Potenzial zur Förderung prozessbezogener Kompetenzen erkennt und im Unterricht nutzt, um aus der Aufgabe eine gute Aufgaben entstehen zu lassen. Bildlich kann man in diesem Zusammenhang durchaus von einem Öffnen²⁰ von Aufgaben sprechen, um dieses Potenzial für die Schüler fruchtbar werden zu lassen.

Ein Ansatzpunkt ist doch die erstaunliche Tatsache, dass sich bei der Addition der Ergebnisse in jedem Paar stets die gleiche Zahl ergibt, nämlich 900.

Wieder stellt sich bei der mathematischen Betrachtung, also beim *Mathematisieren*, die Frage nach dem strukturell Gemeinsamen, dem Muster, das die Aufgaben verbindet. In jeder Aufgabe kommt die Zahl 450 vor. In jedem Paar wird zu 450 die gleiche Zahl addiert bzw. von 450 subtrahiert. Wie hängt die Zahl 900 mit Zahlen zusammen, die in den Aufgaben vorkommen?

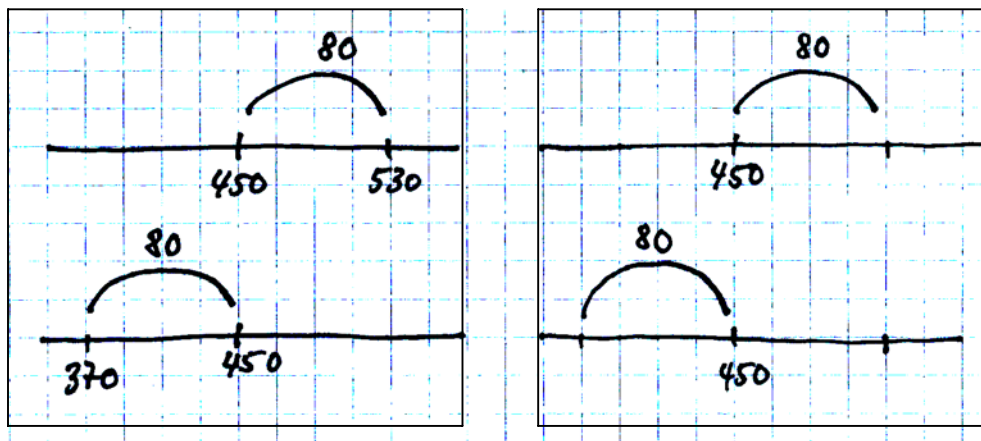
Die *Kreativität* der Schüler kann gefordert werden, wenn eigene Aufgabenpaare konstruiert werden sollen. Dabei wird zunächst wohl die Zahl 450 die Hauptrolle spielen. Vielleicht verallgemeinern Schüler aber schon, indem sie statt 450 andere Zahlen wählen und dabei entdecken, dass sie nach Addition ebenfalls das Doppelte der jeweiligen Zahl als Ergebnis erhalten. Ein neues Problem wird konstruiert, wenn in einer Variante der ursprünglichen Aufgabe Aufgabenpaare gefunden werden sollen, deren Ergebnissumme gegeben ist, z.B. 420. Grenzen der bisherigen Betrachtung können die Schüler erfahren, wenn eine ungerade Ergebnissumme, z.B. 421 vorgeschlagen wird.

²⁰ Vgl. Modul 3: Mathematikunterricht zwischen Offenheit und Zielorientierung.

Auf der Grundlage der gegebenen Aufgabenpaare und den Erkenntnissen aus ihrer bisherigen Arbeit haben die Schüler bereits eine Reihe von *Argumenten* um zu begründen, dass sich stets die Zahl 900 ergibt.

Formal: $450 + 80 + 450 - 80 = 900$, etc.,

oder mit dem Rechenstrich



Beispiel 3: Variation einer „anderen“ Aufgabe

Im Rahmen eines Praktikums in einer vierten Klasse wurde die Addition mit mehr als zwei Summanden geübt. Die Praktikantin hatte unter anderem folgende Aufgaben gestellt

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 3 \ 3 \\
 + \ 3 \ 3 \ 3 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7 \ 7 \ 7 \\
 \ 7 \\
 + \ 7 \ 7 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 888 + 88 + 8 =$$

Es fällt auf, dass die Summanden jeder Teilaufgabe jeweils *nur eine Ziffer* enthalten. Am nächsten Tag fiel mir folgende Variante der Aufgabe ein, die ich dann der Lehrerin übermittelte²¹.

²¹ Man könnte auch bei den ausgerechneten Summen dieser Aufgaben ansetzen und in diesem Kontext Potenzial für prozessbezogene Kompetenzen entdecken, vgl. Aktivität 4.

Kann man 100 als Summe von Zahlen schreiben, die nur die Ziffer 2 oder nur eine andere Ziffer enthalten?

Weil die Lehrerin diese Aufgabe als recht schwer einschätzte, arbeitete sie einen Tag später nur mit einer Gruppe von 6 Schülern aus der Klasse an der Aufgabe. Obwohl dies nicht die normale Situation des Mathematikunterrichts in der Klasse ist, wird das Ringen der Lehrkraft deutlich, zusammen mit den Schülern aus einer Aufgabe eine gute Aufgabe *entstehen* zu lassen. Um eine kurze Sprechweise zur Verfügung zu haben, führte die Lehrerin für Zahlen, die nur die Ziffer 3 bzw. die Ziffer 7 enthalten, die Bezeichnung Dreierzahlen, Siebenerzahlen, usw. ein.

Die folgende Darstellung gibt verkürzt den Gang der Untersuchung in dieser Stunde wieder. Obwohl auch die übrigen Kinder der Gruppe mitgearbeitet haben, konzentriere ich mich auf Hanna und Malte, die gewissermaßen die „Wortführerschaft“ übernommen hatten. (Die vorangestellten Zahlen bei Personen geben die zeitliche Abfolge an. Um Platz zu sparen, werden für die Darstellung zwei Spalten benutzt.)

1 Hanna: Nur die Zahlen 2 und 22 kommen in Frage

2, 22

100

2 Hanna: Und dann geht es so:

$$\begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ \hline 100 \end{array}$$

3 Lehrerin: Schön Hanna, das geht also.

4 Lehrerin: Geht es auch mit Fünferzahlen? (Hanna schreibt)

$$\begin{array}{r} 55 \quad 5 \\ + 5 \quad 5 \\ \hline 55 \quad 90 \\ + 5 \quad 100 \\ \hline 55 \\ + 5 \\ \hline 45 \\ \hline 90 \end{array}$$

5 Hanna: Ja.

6 Lehrerin: Sehr schön. Wer hat auch etwas herausgefunden? (Schaut sich Lösungen anderer Kinder an)

7 Lehrerin: So, und jetzt mit Siebenerzahlen. (Hanna schreibt)

$$\begin{array}{r} 77,7 \\ 100 \\ + 77 \\ \hline 23 \end{array} \text{ geht nicht}$$

8 Hanna: Nein, das geht nicht

Fortsetzung nächste Seite

9 Lehrerin: Wieso nicht?

10 Hanna: Die 23 ist zu viel.

11 Lehrerin: Was meinst du?

12 Hanna: Aber mit 21 und mit 28 würde es gehen.

13 Lehrerin: (Nach einiger Überlegung) Gut, oder geht es vielleicht doch?

14 Hanna:

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 3 \\ \hline 97 \\ - 10 \\ \hline 87 \\ - 10 \\ \hline 77 \\ - 10 \\ \hline 67 \\ - 10 \\ \hline 57 \\ - 10 \\ \hline 47 \\ - 10 \\ \hline 37 \\ - 10 \\ \hline 27 \\ - 10 \\ \hline 17 \\ - 10 \\ \hline 7 \end{array}$$

7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
7

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 7 \\ \hline 14 \\ + 7 \\ \hline 21 \\ + 7 \\ \hline 28 \\ + 7 \\ \hline 35 \\ + 7 \\ \hline 42 \\ + 7 \\ \hline 49 \\ + 7 \\ \hline 56 \\ + 7 \\ \hline 63 \\ + 7 \\ \hline 70 \\ + 7 \\ \hline 77 \\ + 7 \\ \hline 84 \\ + 7 \\ \hline 91 \\ + 7 \\ \hline 98 \\ + 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

15 Hanna: Nein, doch nicht.

16 Lehrerin: Hättet ihr das mit der Sieben eigentlich überprüfen müssen?

17 Aus der Gruppe: Ja, doch, weil mit Sieben könnte es vielleicht gehen.

18 Lehrerin: Gut. Wir haben jetzt aber herausgefunden, dass es mit Sieben nicht geht.

19 Lehrerin: Ihr dürft jetzt selbst solche Aufgaben stellen.

20 Malte: Geht es wohl mit Vieren?

21 Lehrerin: Du meinst, ob es mit Viererzahlen geht. Ja, das ist eine neue Aufgabe (Hanna schreibt)

$$\begin{array}{r} 44 \\ + 44 \\ \hline 88 \\ + 4 \\ \hline 92 \\ + 4 \\ \hline 96 \\ + 4 \\ \hline 100 \end{array}$$

22 Malte: (Guckt auf Hannas Blatt) Toll

23 Lehrerin: Prima Hanna

24 Malte: Dann geht es wohl auch mit Achten:
(Hanna schreibt)

$$\begin{array}{r} 88 \\ + 8 \\ \hline 96 \\ + 8 \\ \hline 104 \\ + 8 \\ \hline 112 \end{array}$$

25 Malte: Schade

An dieser Stelle stiegen die Schüler erschöpft aus der Untersuchung aus.

Hannas Meinung:

hat mir gefallen

Analyse zu Beispiel 3

Bei der anfangs vorgestellten „anderen“ Aufgabe verfügen die Schüler über ein Lösungsverfahren. Für die Bearbeitung der Aufgaben ist das sorgfältige, stellengerechte Aufschreiben der Zahlen, das mit dieser Aufgabe u.a. auch geübt werden soll, wichtig. Das besondere „Aussehen“ der Summanden spielt bei der Arbeit im Unterricht keine Rolle. Der Schwerpunkt der Stunde liegt bei der Festigung inhaltsbezogener Kompetenzen, was nach unseren eingangs gemachten Ausführungen selbstverständlich völlig legitim ist: Mit der Aufgabe wird eben eine andere Zielsetzung verfolgt.

Bei der variierten Aufgabe liegt der Schwerpunkt bei prozessbezogenen Kompetenzen und zwar in den Bereichen Kreativität und Argumentation. Beachten Sie aber bitte, dass *auch* bei der Variante gerechnet, also inhaltlich gearbeitet wird. Nur das Rechnen dient jetzt anderen, allgemeineren Zielsetzungen.

Kreativität. Da die Schüler zunächst nicht auf ein abrufbares Verfahren zurückgreifen können, müssen sie selbstständig Lösungsansätze generieren. Dabei eröffnet die Aufgabe die Möglichkeit, durch Probierstrategien zur Lösung zu kommen. Offensichtlich hätte man auf vielerlei Wegen die Startaufgabe „Schreibe 100 als Summe von Zahlen, die nur die Ziffer 2 enthalten“ lösen können. Wenn mehrere Lösungsvorschläge vorliegen, so können die Schüler diese vergleichen (was in der oben berichteten Unterrichtsstunde nicht bzw. nur zufällig geschehen ist).

In ganz natürlicher Weise bietet sich bei der weiteren Erzeugung von Aufgaben aus der Startaufgabe die Strategie der Verallgemeinerung an. So könnte man unmittelbar im Anschluss an die Startaufgabe (oder später, wie im Beispiel) die Schüler bitten, ähnliche Aufgaben zu entwickeln. Dabei kann die Erfahrung gemacht werden, dass man bei diesem Vorgehen auch auf – im mathematischen Sinne – unlösbare Aufgaben stoßen kann (z.B. Malte mit den Achterzahlen).

Argumentation. Die in der Startaufgabe gestellte Frage ist zu bejahen. Die Begründung besteht hier darin, eine passende Summe anzugeben. Um auf eine solche Summe zu kommen, kann man eine (additive) Probierstrategie verfolgen (vermutlich macht das Hanna). Man könnte auch Teilbarkeitsüberlegungen anstellen.

Diese Idee könnte zunächst bei Hannas Überlegungen (14) eine Rolle gespielt haben. Sie versucht 100 schriftlich durch 7 zu teilen, macht dabei aber einen Fehler, indem sie nicht ein Vielfaches von 7, sondern den durch Kopfrechnung bestimmten Rest 3 im ersten Divisions-schritt subtrahiert. Der errechnete Quotient 101 kommt ihr offenbar nicht geheuer vor, und sie versucht es daneben durch wiederholte Addition „zu Fuß“. Offenbar erkennen die Schüler nicht, dass der Fall „nur die Zahl 7“ bereits durch den Fall „77 und 7“ entschieden ist. An dieser Stelle hätte man noch nachhaken sollen.

Dass 100 nicht durch mehrfache Addition der Zahl 7 geschrieben werden kann, wird danach ebenfalls durch die additive Probiertategie begründet: 98 ist zu klein, $98 + 7$ zu groß.

Interessant ist nach Maltes Erfolg bei der Aufgabengenerierung „mit Vieren“ seine Vermutung (24), dass es auch „mit Achten“ gehen müsse. Dieser Schluss funktioniert aber nicht, wie Hanna demonstriert.

Bei einer rückschauenden Betrachtung der Arbeit mit dieser Aufgabe in der Gruppe fällt vor allem auf, dass einige Gelegenheiten nicht genutzt worden sind, noch stärker prozessbezogene Kompetenzen herauszufordern:

- Darstellung, Diskussion (Vergleich) von Lösungswegen auch anderer Schüler (*Mathematisieren, Argumentieren*),
- Argumente herausfordern, die auch das Verständnis bei anderen Kindern, z.B. von Lösungswegen, unterstützen, und sie an den Überlegungen Anderer teilhaben lassen könnten (Punkte 10 bis 13),
- Teilergebnisse miteinander argumentativ vernetzen (z.B.: Klärung, weshalb der Fall „nur die Zahl 7“ bereits im Punkt 8 „Siebenerzahlen“ mit erfasst ist, oder: Hanna hat herausgefunden, dass es mit Viererzahlen geht; *muss* es dann auch mit Zweierzahlen gehen?),
- Aufgreifen der Teilbarkeitsidee (14) zu einer *Mathematisierung* der Situation aus einer anderen (nicht auf Addition gründenden) Perspektive.

Aktivität 4. Wie bereitet die Lehrerin oben die Öffnung der Aufgabenstellung in Punkt 19 vor: „Ihr dürft jetzt selbst solche Aufgaben stellen“? Hätte diese Öffnung schon früher, z.B. in Punkt 4 erfolgen können, und mit welchen Konsequenzen?

Aktivität 5. Untersuchen und analysieren Sie: Lässt sich die Zahl 1000 als Summe von höchstens zehn Viererzahlen schreiben. Variieren Sie die Aufgabe (zur Aufgabenvariation s. unten).

Aktivität 6. Bei den ursprünglichen Additionsaufgaben von Beispiel 3 mit Dreier- bzw. Siebenerzahlen achten Sie nun bitte auf die Summen. Was fällt auf? Welche Ansatzpunkte für prozessbezogene Kompetenzen enthält die Aufgabe? Variieren Sie die Aufgabe (zur Aufgabenvariation s. unten).

Und noch eine Anregung: Was ergibt sich, wenn man die Summe aus Dreierzahlen durch drei, die der Siebenerzahlen durch sieben, usw. teilt? Variieren Sie die Aufgabe (s. unten).

6 Rückblick und Agenda: Etwas aus Aufgaben machen, gute Aufgaben als variable Objekte des Unterrichts

6.1 Rückblick

Bei den folgenden Aufgaben aus dem vierten Schuljahr – aus der Sicht des Verfassers Beispiele für „andere“ Aufgaben – geht es um das Üben von Grundrechenarten im vierten Schuljahr, und es kommt allein auf die korrekte Berechnung der Ergebnisse an. Im Vordergrund stehen inhaltsbezogene Kompetenzen. Jede dieser Aufgaben steht für sich, es ist kein struktureller Zusammenhang zwischen den Aufgaben zu erkennen²². Nahe liegende Ansatzpunkte für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen kann der Verfasser bei diesen Aufgaben nicht entdecken. Das schließt selbstverständlich nicht aus, dass sich etwa aus der Besprechung von Schülerlösungen „auf eigenen Wegen“ oder von fehlerhaften Lösungen doch solche Ansatzpunkte z.B. zum *Argumentieren* ergeben könnten.

Elementarisches Rechenbuch. U. Mentzel, Altona 1862


Multipliziere: 12×356 , 25×956 , 37×875 , 59×976 , 115×516 , 538×796 , 758×969 ,
 932×864 , 569×777 , 753×867 , 983×674 , 673×368 , 985×793 ,
 847×964 , 978×899 .

²² Zum Begriff des strukturierten Übens auf der Grundlage „Strukturierter Aufgaben“ vgl. Müller, G. N. und Wittmann, E. Ch.: Handbuch produktiver Rechenübungen (2 Bände). Klett, Schulbuchverlag, Stuttgart 1990.


Aus einem Rechenbuch Ende der 1970er Jahre

637 · 65 732 · 76 562 · 72 240 · 83 438 · 21 1103 · 84 2324 · 37
215 · 81 217 · 44 953 · 94 826 · 47 912 · 43 1017 · 68 1821 · 43
358 · 74 904 · 81 746 · 62 495 · 96 846 · 52 2109 · 24 3572 · 21

Aus einem aktuellen Rechenbuch der 4. Klasse

 Addiere die Zahlen. Zur Probe addiere von oben nach unten.

a) 638	b) 922	c) 418	d) 888
$+ 200$	$+ 466$	$+ 94$	$+ 150$
$+ 845$	$+ 735$	$+ 731$	$+ 74$

 Schreibe untereinander, dann addiere.

a) $738 + 917 + 435$	b) $674 + 58 + 613$
$624 + 49 + 958$	$978 + 76 + 735$
$473 + 381 + 97$	$823 + 94 + 987$

Aktivität 7. Überlegen Sie bitte in einem „didaktischen Gedankenexperiment“, wie sich aus der Besprechung von Schülerlösungen „auf eigenen Wegen“ oder von fehlerhaften Lösungen zu diesen/solchen Aufgaben doch Ansatzpunkte für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen ergeben könnten.

Ein deutlich anderes Bild zeigt sich bei unseren Beispielen für gute Aufgaben.

Beim *ersten Aufgabenbeispiel* enthält die Aufgabenstellung explizite Ansatzpunkte für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen. Bei den beiden anderen Beispielen ist das nicht der Fall.

Bei der *zweiten Aufgabe* müssen entsprechende Anregungen wohl zunächst von der Lehrkraft ausgehen. Außerdem wurden weitere Ansatzpunkte für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen durch eine kleine Variation der ursprünglichen Aufgabe gewonnen.

Das *dritte Beispiel* geht aus einer starken Variation einer „anderen“ Aufgabe hervor. Zu den Anregungen der Lehrkraft für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen ergeben sich auch Anregungen – zumindest potentiell – aus Bearbeitungsschritten oder Vorschlägen der Schüler. Hierdurch wird noch einmal deutlich, dass es für die unterrichtliche Umsetzung des Ziels der Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen durch Aufgaben wesentlich ist, *wie* im

Unterricht mit Blick auf solche Kompetenzen mit Aufgaben umgegangen wird, *was* aus Aufgaben „gemacht“ wird.

Dieser eigentümliche Sachverhalt, dass eine Aufgabe von der Lehrkraft und/oder den Schülern unter der Perspektive prozessbezogener Kompetenzen häufig erst zu einer guten Aufgabe entwickelt wird, macht deutlich, dass Aufgaben wie in den drei zuletzt aufgeführten Beispielen dieses Abschnitts nicht mehr nur ein zu bearbeitendes festes Gegebenes sind, sondern im beschriebenen Sinne zu variablen Objekten des Unterrichts werden²³.

Diese Variabilität wird „beobachtbar“, wenn sich verschiedene Lehrkräfte und Schülergruppen in der Regel auf unterschiedliche Weisen und mit unterschiedlichen Ergebnissen bemühen, die gleiche Aufgabe (als Text) zu einer guten Aufgabe zu machen.

6.2 Agenda

Wie schon mehrfach hervorgehoben, kommt es dabei auf der Seite des Lehrers wesentlich darauf an, auf der Folie seiner professionellen Kompetenzen das in einer Aufgabe oder in entsprechenden Schülerbeiträgen steckende Potential für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen zu erkennen und für den Unterricht fruchtbar zu machen.

Hier nun liegt die große Herausforderung für Lehrer, die mit diesem besonderen Umgang mit Aufgaben bisher nicht oder nur sehr wenig in Berührung gekommen sind. Es ist mit eines der zentralen Ziele dieses Moduls hierfür einen Einstieg zu eröffnen. Dies bezieht sich auf:

1. Die Methode der Aufgabenanalyse (im oben beschriebenen Sinn) und der Aufgabenvariation (s. unten),
2. Unterrichtsplanung und Umsetzung im Unterricht,
3. die Reflexion.

Die im ersten Punkt genannte Aufgabenanalyse ist eine notwendige theoretische Voraussetzung für die beiden anderen, auf die Unterrichtspraxis bezogenen Aktivitäten.

²³ Dieser Aspekt wird eingehend beleuchtet in Christiansen, B. und Walther, G.: Task and activity. In: Christiansen, B. et al.: Perspectives in Mathematics Teacher Education. D. Reidel Publishing Company, 1986, 243 – 307. Ferner in Walther, G.: Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker Verlag 1985, 28 – 42.

Die obigen Beispiele haben gezeigt, dass man in der Regel die Analyse von Aufgaben unter dem Aspekt prozessbezogener Kompetenzen nicht aus dem Ärmel schütteln wird. Da es sich bei der Bearbeitung von Aufgaben im Unterricht, die die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen unterstützen sollen, in der Regel um eine komplexe Tätigkeit handelt, empfiehlt sich eine sorgfältige Planung, die auch die Bedingungen der konkreten Klasse berücksichtigt. Außerdem muss überlegt werden, in welcher Weise man den Schülern in altersgemäßer Form (meta-) sprachlich die „neuen“ Kompetenzen und deren Sinn deutlich werden lässt²⁴ (vgl. Aktivität 8).

Darüber, wie *Sie Ihre Planung* schließlich im Unterricht umsetzen, kann sicher im Vorwege nichts gesagt werden. Gleichwohl hat die Forschung einige Merkmale und Tendenzen von Unterricht identifiziert, die sich auf die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen *hinderlich* auswirken können.

- Gute Aufgaben stellen durch ihre erhöhten kognitiven Anforderungen und durch den Aspekt der Offenheit für Schüler und Lehrer eine besondere Herausforderung dar. Wegen der Risiken beim Verlassen „eingespielter“ Aufgabenbearbeitungsprozeduren besteht im Unterricht eine Tendenz, solche Aufgaben in ihrer Komplexität zu reduzieren. Schüler drängen vielfach die Lehrkraft, Lösungshinweise zu geben. Seitens der Lehrkraft besteht dann häufig die Neigung, mit Hilfen gerade prozessbezogene Aspekte zu Gunsten von inhaltlichen Aspekten zu reduzieren und damit die Aufgabe in eine Routineaufgabe zu überführen. Wenn Hilfen nötig sind, sollten sie so sparsam wie möglich gegeben werden. Wenn möglich, sollten Hilfen den Schülern nur Orientierungen geben (Hilfen zur Selbsthilfe), aber keine Teillösungen verraten.
- Schüler brauchen zur Bearbeitung von guten Aufgaben genügend Zeit. Sie brauchen Zeit zum Nachdenken, zum Untersuchen einzelner Beispiele, zum Gedankenaustausch mit anderen Schülern, zur Darstellung ihres Lösungsweges, usw. In einer Unterrichtsstunde kommt es nicht auf die Anzahl der „durchgenommenen“ Aufgaben an, sondern auf die Qualität des Umgangs mit guten Aufgaben.
- Wichtig ist es, sicher zu stellen, dass die Schüler die Aufgabe verstanden haben, dass also z.B. das erforderliche Vorwissen verfügbar ist.

²⁴ Ein Studienanfänger berichtete einmal, er habe im 11. Schuljahr „Induktionsrechnung“ gehabt. Worum es dabei „eigentlich“ geht, wusste er nicht. Es wäre fatal, wenn sich bei Grundschulern z.B. so etwas wie „Begründungsrechnen“ festsetzen würde.

- Wichtig ist auch, dass Materialien, die zur Aufgabenbearbeitung nötig sind, bereitgestellt sind.

Spontan im Unterricht, insbesondere im Unterrichtsgespräch, auftretende Aufgabensituationen entziehen sich einer vorbereitenden Planung. Um hier neben der Ebene der inhaltlichen Kompetenzen spontan auch die Ebene der prozessbezogenen Kompetenzen zu berücksichtigen ist, in besonderem Maße die Erfahrung der Lehrkraft im Umgang mit prozessbezogenen Kompetenzen gefragt.

Im dritten Punkt geht es zunächst darum, die *eigene Erfahrung* im Unterricht im Hinblick auf die gesteckten Ziele zu reflektieren und ggf. Alternativen zu entwickeln. In einem weiteren Schritt könnte man auch an wechselseitige Hospitation mit Kollegen denken und sich mit diesen dann über die Umsetzung im Unterricht austauschen. Der weitest greifende Schritt wäre schließlich die Videoanalyse des eigenen Unterrichts.

Aktivität 8. Sammeln und entwickeln Sie bitte altersgemäße Sprechweisen (im Sinne von Arbeitsanregungen), die in Verbindung mit Aufgaben zu Kreativität, zum Argumentieren zum Mathematisieren anregen.

Beispiele: Wie könnte es weitergehen? Weshalb gilt das? Was fällt auf?

In diesen Erläuterungen zu Modul 1 beschränke ich mich zunächst auf den ersten Punkt. Die beiden anderen Punkte sind gewissermaßen eine auf die Zukunft gerichtete Gemeinschaftsaufgabe, deren Bearbeitung stark vom Austausch zwischen und der Zusammenarbeit mit den an SINUS beteiligten Grundschullehrkräften abhängt.

Zum ersten Punkt „Methode der Aufgabenanalyse und Aufgabenvariation“ möchte ich skizzenhaft folgende Vorgehensweise vorschlagen:

In einer *ersten Phase* werden möglichst in Zusammenarbeit mit anderen Kollegen in unserem Sinne gute Aufgabenbeispiele, bei denen die Aufgabenstellung *explizite Ansatzpunkte* für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen enthält (vgl. Beispiel 1), aus Schulbüchern, (leicht) zugänglichen Grundschulzeitschriften, Büchern, Materialsammlungen, oder Internet

zusammengetragen²⁵. Während oder nach der Aufgabenbearbeitung tauschen sich die Kollegen darüber aus, welche prozessbezogenen Kompetenzen in welcher Weise gefördert werden können. Zudem wird erörtert, ob in der Aufgabe noch weiteres Potenzial für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen steckt.

Zweite Phase. Nachdem in der ersten Phase jede der beteiligten Lehrkräfte eine gewisse Basis und einen „Blick“ für die Aufgabenanalyse entwickelt hat, werden mit diesem Instrumentarium nun auch Aufgaben auf ihr Potenzial für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen untersucht, bei denen die Aufgabenstellung dazu *keine expliziten Ansatzpunkte* enthält (vgl. Beispiel 2), aber kleine Variationen der Aufgabe weiterhelfen.

Da generell die Aufgabenvariation²⁶ unter der Perspektive des Mathematisierens sowohl für Schüler als zumeist auch für Lehrer eine kreative Handlung ist, soll dieser Aspekt des Umgangs mit Aufgaben ebenfalls in dieser Phase bearbeitet werden. Um bei diesen Aktivitäten nicht „im eigenen Saft zu schmoren“ und stattdessen zu einem konstruktiven Ideenaustausch zu kommen, ist auch hier die Kooperation mit Kollegen dringend zu empfehlen.

Um von der „Materialeseite“ her den Einstieg in die Aufgabenanalyse zu erleichtern, haben wir im Anhang 2 einige Aufgaben aus Schulbüchern und dem eigenen Aufgabenbestand zusammengestellt.

Die Ergebnisse aus der Arbeit in beiden Phasen können Sie in einem *Aufgabenportfolio* sammeln. Laut Brockhaus (1996) versteht man unter einem Portfolio „...eine Kapitalanlage in langfristigen Wertpapieren (...), die von der erwarteten Rendite und/oder der Aussicht auf Kursgewinne bestimmt wird“. Auf die vorliegende Situation übertragen, bedeutet dies in (sehr) freier Interpretation: Das Einlassen auf den hier oder von anderen Autoren vorgeschlagenen analytischen und konstruktiven Umgang mit Aufgaben ist eine Investition in die eigene Professionalität als Lehrer; den Ertrag erhofft man sich in einer Qualitätsverbesserung des Unterrichts.

²⁵ Unterstützung kann hier auch durch Koordinatoren, das SINUS-Team oder durch andere Personen gegeben werden.

²⁶ Vgl. hierzu auch das hauptsächlich auf die Sekundarstufen bezogene Buch von Schupp, H.: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Franzbecker Verlag 2002.

6.3 Fragmente zum Schwerpunkt Aufgabenvariation, Aufgabenweiterentwicklung

So wie wir oben die Methode der Aufgabenanalyse an Beispielen erläutert haben, werden wir nun auch exemplarisch in die *Methode der Aufgabenvariation* einführen.

Was hat die Aufgabenvariation mit unserem Thema „Gute Aufgaben“ zu tun? Wir haben oben festgestellt, dass Aufgaben unter der Perspektive prozessbezogener Kompetenzen in der Regel durch den besonderen Umgang mit ihnen zu variablen Objekten des Unterrichts werden. Prozessbezogene Aktivitäten ergeben sich vielfach in Verbindung mit der Variation von Aufgaben (s. oben Beispiel 2, Beispiel 3). Das (systematische) Instrument der Aufgabenvariation kann Lehrkräften helfen, Aufgaben zu erzeugen oder die Erzeugung von Aufgaben anzustoßen, mit denen bei den Schülern prozessbezogene Aktivitäten angeregt werden können.

Wenn Schüler (ohne systematischen Hintergrund, also spontan) im Unterricht eigene Aufgabenvarianten²⁷ entwickeln, so ist das z.B. in der Regel eine *kreative* Tätigkeit.

Bei den folgenden Aufgabenvorschlägen handelt es sich um Fragmente, insofern als jeweils ein *Aufgabenkern* vorgestellt wird, der durch die Methode der Aufgabenvariation erst weiter entwickelt werden soll.

Aktivität 9. Führen Sie bei den Aufgabenkernen dieses Abschnitts eine Aufgabenanalyse durch mit dem Ziel, das Potenzial für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen zu identifizieren.

Überlegen Sie sich dann (weitere) Varianten zu diesen Aufgaben.

Auch diese Varianten sollten dann unter dem Ziel der Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen analysiert werden.

²⁷ Im englischen Sprachraum ist dies in Ergänzung zum Problemlösen, problem solving, seit langem unter dem Stichwort problem posing bekannt. Das Entwickeln eigener Aufgabenstellungen im Unterricht ist hierzulande insbesondere aus dem Sachrechnen bekannt.

Beispiel 4

Wähle eine zweistellige Zahl, z.B. 24. Füge zwischen den Ziffern 2 und 4 eine Null ein; du erhältst die Zahl 204.

Subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl! Nimm jetzt die Zahl 27 als Ausgangszahl und gehe wie eben vor.

$$\begin{array}{r} 204 \\ - 24 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 207 \\ - 27 \\ \hline 180 \end{array}$$

Auch diesmal ergibt sich als Differenz die Zahl 180. Das ist auffällig!

Der wichtigste Schritt bei der Aufgabenvariation ist die Identifizierung variierbarer *Bestimmungselemente (Parameter)* der Aufgabe.

In unserem Beispiel etwa:

1. die Ausgangszahl,
2. die Anzahl der Stellen der Ausgangszahl,
3. die Anzahl der eingefügten Nullen,
4. die Differenz.

Zu 1.: Man stellt fest, dass sich nicht bei jeder zweistelligen Ausgangszahl auf diese Weise die Differenz 180 ergibt. Wovon hängt das ab?

Zu 2.: Verallgemeinert man die ursprüngliche Aufgabenstellung und geht von einer dreistelligen Ausgangszahl, z.B. 124 aus, so gibt es zwei Möglichkeiten, die Null einzufügen (die dritte Möglichkeit wäre die Null anzuhängen): 1024 und 1204. Nun kann man wieder untersuchen, unter welchen Bedingungen sich die gleiche Differenz ergibt.

Zu 3.: Geht man von einer zweistelligen Ausgangszahl, z.B. 24 aus und fügt zwei Nullen ein, so ergibt sich 2004.

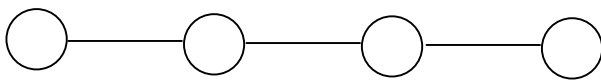
Zu 4.: Welche Differenzen kommen bei zweistelliger Ausgangszahl und *einer* eingefügten Null vor, usw.

An diesem Beispiel wird auch deutlich, dass die Aufgabenparameter in der Regel nicht unabhängig voneinander variiert werden können, sondern direkt oder vermittelt über andere Parameter zusammenhängen. Die Identifizierung von Aufgabenparametern gibt also nur eine grobe Richtung für die Variation von Aufgaben.

Beispiel 5

Trage die Zahlen von 1 bis 4 in die vier Kreisfelder ein.

Zahlen, die durch eine Linie verbunden sind, müssen sich um mindestens 2 unterscheiden.



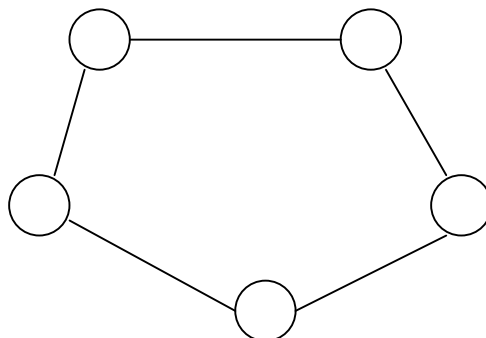
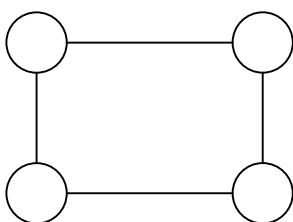
Als nahe liegende Parameter der Aufgabe erkennt man:

1. die auf die Kreisfelder zu verteilenden Zahlen,
2. die Anzahl der Kreisfelder,
3. die Anordnung der Kreisfelder,
4. die Bedingung für Zahlen auf benachbarten Kreisfeldern.

Zu 1.: Man könnte auch andere Zahlen wählen. Für Zahlen, bei denen sich je zwei um mindestens 2 unterscheiden ist die Aufgabenlösung besonders leicht.

Zu 2.: Die Schüler sollen versuchen 5 aufeinander folgende Zahlen auf 5 Felder zu verteilen usw.

Zu 3.: Man könnte z.B. eine ringförmige Anordnung der Kreisfelder mit 4, 5 usw. Feldern wählen.

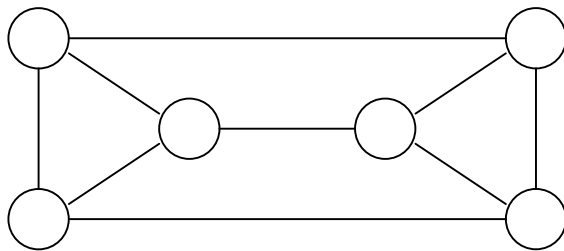


Mit 4 Feldern ist die Bedingung: Unterschied von Zahlen auf benachbarten Kreisfeldern ist mindestens 2, nicht zu erfüllen. Bei 5 Feldern klappt es.

Bezüglich der gegenseitigen Lage der Kreisfelder kann man auch an ganz andere Anordnungen denken:

Trage die Zahlen von 1 bis 6 in die sechs Kreisfelder ein.

Zahlen auf Feldern, die durch eine Linie verbunden sind, müssen sich um mindestens 2 unterscheiden.

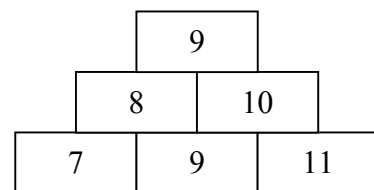
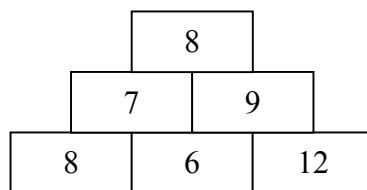
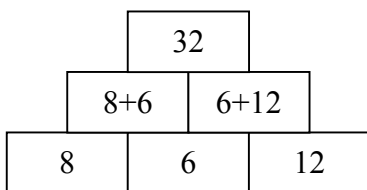


Zu 4.: Zahlen auf Feldern, die durch eine Linie verbunden sind, müssen sich um genau 2, mindestens 3, usw. unterscheiden.

Beispiel 6

Das Aufgabenformat *Zahlenmauer* mit seinen vielfältigen Möglichkeiten zur Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen dürfte bekannt sein:

Ab der zweiten Schicht ist die Zahl auf jedem Stein gleich der Summe (in *einer* Variante: gleich dem Produkt) der Zahlen auf den beiden darunter liegenden Steinen. Die Zahlen für die Steine der untersten Reihe sind vorgegeben oder werden aus den Zahlen anderer Steine berechnet (vgl. Zahlenmauer links).



Von den vielfältigen Variationsmöglichkeiten greifen wir eine „radikale“ heraus, nämlich die Veränderung der Verknüpfung der Zahlen in der Zahlenmauer. Ab der zweiten Schicht soll die Zahl auf jedem Stein gleich der Hälfte der Summe der Zahlen auf den beiden darunter liegenden Steinen sein (mit anderen Worten: das arithmetische Mittel der Zahlen auf den beiden darunter liegenden Steinen). Die Zahlen für die Steine der untersten Reihe sind wieder vorgegeben oder werden aus den Zahlen anderer Steine berechnet.

Als weitere Bedingung kann man (zunächst) fordern: Auf den Steinen der neuen Zahlenmauern sollen nur natürliche Zahlen vorkommen.

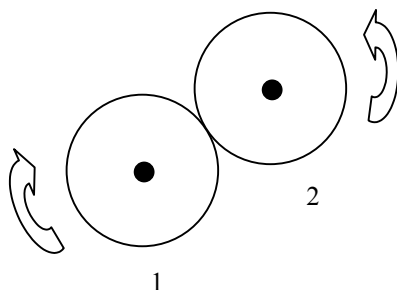
Mit der neuen Verknüpfung können nun die Schüler vom Lehrer vorgegebene oder von „normalen“ Zahlenmauern übernommene Aufgabenstellungen bearbeiten, die prozessbezogene Aktivitäten anregen.

Bei den folgenden Beispielen und Anregungen zur Aufgabenvariation geht es inhaltlich um die für die Orientierung im Raum grundlegenden geometrischen Richtungs-Konzepte *links* und *rechts*.

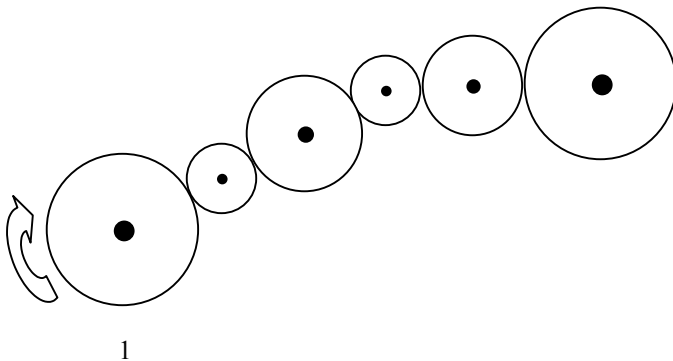
Beispiel 7

„Dynamische“ Geometrie

Legt man zwei kreisrunde „Räder“, z.B. aus Pappe mit rauem Rand (kreisförmige Bierdeckel) aneinander und dreht das eine Rad (1) etwa nach rechts, so wird das zweite Rad in entgegengesetzter Richtung mitgenommen und dreht sich nach links.



Das ist eine Kette aus Rädern. Rad 1 wird nach rechts gedreht. In welche Richtung dreht sich das letzte Rad der Kette?



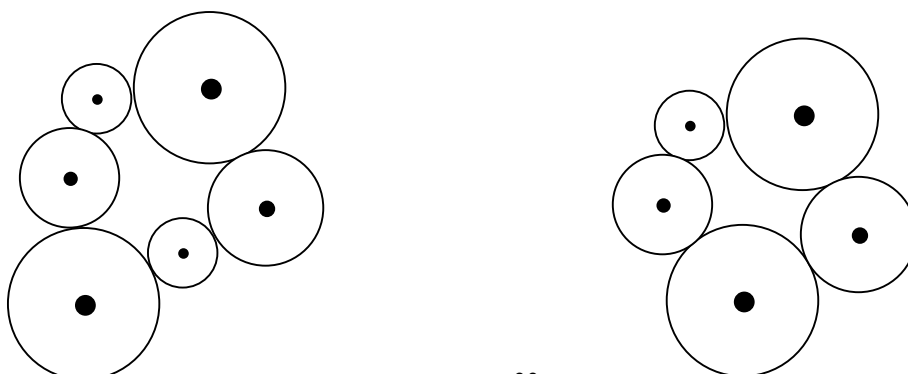
Folgende Parameter der Aufgabe erkennt man auf Anhieb:

1. die Anzahl der Räder,
2. den Drehsinn von bestimmten Rädern,
3. die Anordnung der Räder.

Zu 1.: In der Einstiegssituation sind zwei Räder gegeben, in der daran anschließenden Aufgabe sechs Räder. Man könnte nun die Anzahl der Räder variieren und untersuchen, in welche Richtung sich das letzte Rad dreht.

Zu 2.: Hier liegt zunächst nahe, den Drehsinn des „Antriebsrades“ zu verändern und die Auswirkung auf den Drehsinn des letzten Rades zu untersuchen. Selbstverständlich könnte auch der Drehsinn von anderen Rädern in der Kette studiert werden. Eine Verbindung zu geraden und ungeraden Zahlen wird hergestellt, wenn man fragt, welche Räder sich in einer Kette nach rechts bzw. nach links drehen.

Zu 3.: Oben sind die Räder in einer Kette angeordnet. Eine interessante Variation ergibt sich, wenn man die Räder ringförmig anordnet. In dieser neuen Situation können nun wieder die unter den beiden ersten Punkten vorgenommenen Variationen untersucht werden.



Diese Variation eröffnet ein weites Feld für interessante Aufgabenstellungen.

Beispiel 9

Eines der zentralen Ziele des Sachrechnens ist es, Schülern die Anwendungsfähigkeit von Mathematik zur Klärung von Fragestellungen in Sachsituationen ihres außerschulischen Alltags erfahren zu lassen²⁸. Sachrechnen in seiner Funktion Umwelt zu erschließen, muss sowohl die Sache als auch das Mathematische ernst nehmen. H. Winter fordert in diesem Zusammenhang²⁹: „Sachsituationen sind hier nicht nur Mittel zur Anregung, Verkörperung oder Übung, sondern selbst der Stoff, den es zu bearbeiten gilt. Sachrechnen ist damit ein Stück Sachkunde. Die Schüler sollen befähigt werden, umweltliche Situationen durch mathematisches Modellieren klarer, bewusster und auch kritischer zu sehen.“

Wir gehen von folgender Aufgabe³⁰ aus

1. Tim hat 5 Bretter gekauft. Jedes Brett ist 2 m lang. Zu Hause stellt Tim fest, dass er nur noch 1 m lange Bretter braucht. Wie viele 1-Meter-Bretter kann sich Tim zurechtsägen?

und variieren sie (vgl. Fußnote 30)

2. Tim hat 4 Bretter gekauft. Jedes Brett ist 2,5 m lang. Zu Hause stellt Tim fest, dass er nur noch 1m lange Bretter braucht. Wie viele 1-Meter-Bretter kann sich Tim zurechtsägen?

Beide Aufgaben scheinen sich auf den ersten Blick kaum zu unterscheiden. Bei näherer Betrachtung wird man jedoch einen gravierenden Unterschied feststellen.

In der ersten Aufgabe ist eine durchaus realitätsnahe Situation beschrieben, so etwas könnte es tatsächlich geben. Die angegebenen Daten sind so gewählt - man könnte auch sagen „zu-

²⁸ Eine umfassende und aktuelle Darstellung des Themas Sachrechnen enthält das Buch von Franke, M.: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Spektrum Verlag, Heidelberg 2003.

²⁹ Winter, H.: Sachrechnen in der Grundschule, Cornelsen 1992.

³⁰ Leicht veränderte und übersetzte Aufgaben aus: Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E.: Making Sense of Word Problems. Sweets & Zeitlinger, 2000.

rechtgemacht“ -, dass die Schüler mit den ihnen aus dem Unterricht bekannten Begriffen des Messens und den Grundrechenarten³¹ die Aufgabe in einem oder mehreren Schritten lösen können.

Verschiedene Untersuchungen zeigen jedoch, dass nur ein kleiner Anteil von Kindern am Ende der Grundschule (etwa 20 Prozent) und in fünften Klassen (etwa 16 Prozent) ihr Alltagswissen aktivieren, um die zweite Aufgabe korrekt zu lösen. Die übrigen Kinder rechnen so, wie bei der ersten Aufgabe³².

Worin unterscheidet sich nun die zweite Aufgabe von der ersten?

Die der ersten Aufgabe zugrunde liegende Situation und ihre Daten sind in dem Sinne „glatt“, als unmittelbares/direktes Anwenden des Standardschemas *Aufteilen* bzw. *Messen* mit der Einheit 1 m auf eine durch einfaches Vervielfachen gewonnene Gesamtlänge zum Ziel führt.

Bei der zweiten, variierten Aufgabe müssen – bevor „losgerechnet“ werden kann – zusätzliche inhaltliche, auf die Sache bezogene Überlegungen angestellt werden, um herauszufinden, wie die durch die Realität gewissermaßen diktierten Bedingungen erfüllt werden können. Solche Überlegungen könnten sicher auch in einem zweiten Durchlauf (des Mathematisierungszyklus) in Gang gesetzt werden, wenn sich die Schüler die praktischen Konsequenzen ihrer Rechnung klar machen. Der Prüfstein Realität würde z. B. in dem Augenblick sehr deutlich spürbar werden, wenn Tim tatsächlich zehn 1-Meter-Bretter benötigen würde.

Für die oben skizzierten Befunde zu den Lösungen der Schüler bei der zweiten Aufgabe werden in der Literatur zahlreiche Erklärungen vorgeschlagen³³. Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Vermutung, dass Sachrechenaufgaben des zweiten Typs im Mathematikunterricht allenfalls sporadisch vorkommen. Schüler haben es also nicht gelernt, solche Aufgaben zu bearbeiten. Auch in Schulbüchern sind sie wohl eher selten vertreten.

Andererseits ist deutlich geworden, dass bereits eine kleine Variation der Daten in der ursprünglichen Aufgabe zu mehr Realitätsnähe und zu einer stärkeren Herausforderung der Aktivität des sachbezogenen, nicht schematischen *Mathematisierens* geführt hat.

³¹ Zu den Grundrechenarten zähle ich auch die Vergleichsoperationen von Zahlen und Größen.

³² Vgl. Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E.: Making Sense of Word Problems. Sweets & Zeitlinger, 2000.

³³ Vgl. Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E.: Making Sense of Word Problems. Sweets & Zeitlinger, 2000.

Zurück zu unserer Frage. Aufgaben des zweiten Typs sind schlichtweg ein wenig näher am „Ernstfall“ Realität. Schüler können an solchen Beispielen die Notwendigkeit erkennen, die „Logik der Sache“ zu berücksichtigen. Um dies aber zu tun, ist eine tiefere kognitive Auseinandersetzung erforderlich als das Abarbeiten des für die Lösung erforderlichen Rechenverfahrens. Dass es nun tatsächlich *auch* um die Sache geht und diese nicht nur eine Alibifunktion hat, könnte zudem die Motivation der Schüler für die Bearbeitung solcher Aufgaben verstärken. In der Regel muss dann nämlich auch die Sache erörtert werden, woraus sich für die Schüler Anlässe ergeben, hierzu eigene Erfahrungen mit einzubringen.

Untersuchungen haben gezeigt, dass dem Ziel der Entwicklung und Festigung der prozessbezogenen Kompetenz Mathematisieren außermathematischer Situationen im Rahmen des Sachrechnens eine Reihe von Barrieren im Wege stehen.

Sachrechnen im Kontext von Schule ist durch eine Vielzahl von „stillschweigend“ wirkenden Bedingungen, Annahmen und „Spielregeln“ geprägt³⁴. Es ist zu vermuten, dass zwischen diesen Spielregeln und den Aufgaben des ersten Typs eine enge Beziehung besteht. Einerseits favorisieren diese Regeln Aufgaben des ersten Typs, andererseits sind solche Regeln Konsequenz des Vorherrschens von solchen Aufgaben.

Eine dieser Spielregeln wurde oben bereits erwähnt:

- Sachrechenaufgaben können durch unmittelbares (ggf. wiederholtes) Anwenden von Grundrechenarten auf die gegebenen Daten gelöst werden. Die in der Aufgabe präsentierte Sachsituation braucht nicht weiter überdacht zu werden. Worauf es ankommt, ist korrektes Rechnen. Die Sachsituation dient in den meisten Fällen nur als „Einkleidung“ für eine Rechnung.

Darüber hinaus gilt:

- Vom Lehrer formulierte oder im Schulbuch enthaltene Sachrechenaufgaben sind per se sinnvoll und mit den gerade zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln eindeutig lösbar.

³⁴ Vgl. Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E.: Making Sense of Word Problems. Sweets & Zeitlinger, 2000.

- Die in einem Schulbuchabschnitt auftretenden Sachrechenaufgaben beziehen sich in der Regel hauptsächlich auf den mathematischen „Stoff“ dieses Kapitels.
- Die in einer Sachrechenaufgabe enthaltenen Informationen reichen zur Lösung der Aufgabe aus. Weil es in erster Linie um das Mathematische geht, braucht die Sachsituation nicht weiter analysiert, hinterfragt, durchdacht oder gar verändert zu werden. Auch die Veränderung bzw. zeitgemäße Anpassung von Daten insbesondere in Sachrechenaufgaben aus älteren Schulbüchern ist nicht zulässig.

Sachrechenaufgaben, die sich in den Rahmen dieser traditionellen Spielregeln einfügen, sind in der Regel „kurztaktik“, d.h. jede einzelne Aufgabe mit „klein proportionierten Sachverhalten“³⁵ ist in verhältnismäßig kurzer, dem 45-Minuten-Rhythmus der Unterrichtsstunde angepassten Zeit zu bearbeiten, und der Sachkontext wechselt vielfach von Aufgabe zu Aufgabe. Allein diese Kurztaktik schränkt die Schüleraktivität im Wesentlichen auf das Ausrechnen ein.

Ein Beispiel hierzu aus einem Mathematikbuch für das 4. Schuljahr: Ein Tag hat 1440 Minuten. Prüfe nach. Wie viele Minuten hat eine Woche? Bei dieser Sachaufgabe geht es wohl weniger um die Sache, denn es ist kein Kontext vorhanden, in dem die gegebenen oder noch zu berechnenden Daten von Bedeutung wären, als um das Einüben des Rechnens mit Zeiteinheiten und der schriftlichen Multiplikation.

Bender kritisiert an solchen Aufgaben, dass dabei das Sachrechnen zur „Dienstmagd des Arithmetikunterrichts“ degeneriere (vgl. auch Winter 1997).

Wenn diese Spielregeln, die sich mit zunehmender Beschulungsdauer bei Schülern zu verfestigen scheinen, den Umgang mit Sachrechenaufgaben im Unterricht steuern, dann wundert es eigentlich nicht,

- wenn Schüler im Kontext Schule auch sinnlose, sog. Kapitänsaufgaben³⁶ „lösen“,
- wenn bei Schülern, die im Unterricht Sachrechenaufgaben auf eigenen Wegen, außerhalb der o.g. Spielregeln lösen, der defizitorientierte Blick mancher Lehrkräfte eher das

³⁵ Bender, P.: Der Primat der „Sache“ im Sachrechnen (der Primarstufe). In: Beitr. z. Mathematikunterricht 1984, 75 – 78.

³⁶ Baruk, S.: Wie alt ist der Kapitän? Birkhäuser Verlag, Basel 1989. Selzer, Ch., Spiegel, H.: Wie Kinder rechnen. Klett Grundschulverlag, Leipzig 1997.

Abweichen vom „rechten Weg“ registriert als die Kompetenz zur eigenständigen, mit eigenen Mitteln erreichten Lösung der Aufgabe,

- wenn Schüler außerhalb von Schule bei der rechnerischen Bewältigung von Sachsituationen des „wirklichen Lebens“ auf eigenen, ganz anderen als den in der Schule vermittelten Wegen erfolgreich sind.

Aktivität 10

1. Wie ist Ihre Meinung zu den beiden Aufgabentypen, was spricht für/gegen den jeweiligen Aufgabentyp?
2. Suchen Sie in Schulbüchern Sachrechenaufgaben zu den beiden Typen.
3. Wir haben gesehen, wie aus der ersten Aufgabe dieses Beispiels eine „realistischere, das Mathematisieren stärker herausfordernde“ Variante gewonnen werden konnte. Versuchen Sie, aus geeigneten Aufgaben solche Varianten zu konstruieren.
4. Nehmen Sie sich bitte in Schulbüchern für verschiedene Klassenstufen die Sachrechenaufgaben zu einzelnen Kapiteln vor und schätzen Sie ein ob und in welchem Ausmaß die Wintersche Forderung erfüllt wird:
„Sachsituationen sind hier nicht nur Mittel zur Anregung, Verkörperung oder Übung, sondern selbst der Stoff, den es zu bearbeiten gilt. Sachrechnen ist damit ein Stück Sachkunde. Die Schüler sollen befähigt werden, umweltliche Situationen durch mathematisches Modellieren klarer, bewusster und auch kritischer zu sehen.“

Weiteres Material für die Aufgabenvariation finden Sie unter den Aufgaben in Anhang 2.

7 Statt einer Zusammenfassung: Vorschlag für ein Unterrichtsbeispiel

Sie haben in diesem Modul zwei grundlegende Instrumente für die Unterrichtsplanung kennen gelernt, nämlich *Aufgabenanalyse* und *Aufgabenvariation*, um bei Ihren Schülern die Entwicklung und Festigung wichtiger prozessbezogener Kompetenzen (und deren Ausdifferenzierung), wie *Mathematisieren*, *Kreativität* und *Argumentieren*, anzuregen.

Im Folgenden möchte ich Ihnen zum themenbezogenen Sachrechnen aus dem Umweltbereich Zeit/Kalender einen Vorschlag für ein Unterrichtsbeispiel machen, zu dessen detaillierter Ausarbeitung das oben genannte Instrumentarium eingesetzt werden soll. Ziel ist es also, mit der Bearbeitung im Unterricht bei den Schülern prozessbezogene Aktivitäten zu initiieren.

Startpunkte zu einem Unterrichtsbeispiel: Freitag, der 13.

Hintergrund

Raum und Zeit sind die zentralen Grundkategorien unserer Welterfahrung. Deshalb kommt diesen Konzepten bereits in der Grundschule eine fundamentale Bedeutung zu. Eines der grundlegenden Orientierungsinstrumente in der Zeit ist neben der Uhr der Kalender.

Um was geht es?

Das Datum Freitag, der 13. scheint tief im „Volksglauben“ verankert zu sein. Wen man auch mit dem Stichwort „Freitag, der dreizehnte“ konfrontiert: Stets erfährt man etwas über Meinungen, Gefühle, Erfahrungen zu diesem „besonderen“ Datum. Häufig sind die Äußerungen kontrovers: Freitag, der dreizehnte als Pech- bzw. als Glückstag, als häufiger bzw. als seltener und manchmal überhaupt nicht im Jahr auftretender Tag. Freitag, der dreizehnte als Tag wie jeder andere, als Aberglaube.

In natürlicher Weise bietet das Thema Ansätze zu fächerübergreifendem Arbeiten mit den Schülern. Kontroverse Schüler- und Erwachsenenmeinungen über die Häufigkeit von Freitagen, die in einem Jahr auf den Monatsdreizehnten fallen, führen zu dem Sachproblem:

Kommt in jedem Jahr mindestens einmal Freitag, der 13. vor?

Es wird sich zeigen, dass es sich bei diesem Beispiel um ein komplexes, auf unsere Umwelt bezogenes Problem handelt. Der Problemcharakter der Fragestellung ergibt sich für die Schüler wohl hauptsächlich daraus, dass ihnen nach einer Phase der Klärung zwar das anzustrebende Ziel vor Augen stehen dürfte, sie aber auf kein unmittelbar abrufbares Lösungsverfahren zurückgreifen können³⁷. Der Realitätsbezug ist offensichtlich: Unterschiedliche Vermu-

³⁷ Zur begrifflichen Unterscheidung von Sachaufgabe, Sachproblem, Sachkontext vgl. Winter, H.: Aufgaben, Probleme, Kontexte – zur grundsätzlichen Problematik des Sachrechnens in der Grundschule. In: Sachunterricht u. Mathematik in der Primarstufe 8 (1992), S. 350, S. 363-369.

tungen von konkreten Schülern bzw. Erwachsenen sowie die Anbindung des Sachproblems an den realen Kalender sorgen sogar für dessen Authentizität. Die Komplexität dieses Sachproblems beruht vor allem auf der Vielzahl und Vielfalt der zu seiner Bearbeitung erforderlichen Aktivitäten.

Bei unserem Sachproblem wird die Sache nicht zum Vehikel instrumentalisiert, um Mathematik schmackhaft zu machen, vielmehr sind Sache und Mathematik grundlegend aufeinander bezogen. Mathematik dient hier in substantieller Weise dazu, eine Fragestellung aus unserer Umwelt zugänglich zu machen, zu bearbeiten und aufzuklären.

Dabei können die Schüler den Nutzen von Mathematik aber auch deren Grenzen, etwa bei nicht durch Mathematik aufzulösenden abergläubischen Einstellungen, erfahren. Die bei der Bearbeitung des Problems auch wirksam werdenden Übungseffekte für mathematische (und sachkundliche) Begriffe und Verfahren werden gern „mitgenommen“, stehen aber nicht im Zentrum.

Einstiege

1. Mit Material aus den Medien. Wenn der Freitag tatsächlich auf den 13. eines Monats fällt, so ist das immer wieder Anlass für einige Zeitungen, sich zu diesem „besonderen“ Datum zu äußern. Solche Zeitungsnotizen müssen nicht unbedingt ganz aktuell sein. Die Tatsache, dass sich – vielleicht vor ein paar Jahren – Zeitungen dieses Themas angenommen haben, belegt die Authentizität des Themas.

Am Freitag, dem 13. September 1996 etwa, erschien passend zum Datum im Magazin der

Sehr verbreitet ist bei uns die Furcht vor der Dreizehn, von der einer Allensbacher Umfrage zufolge jeder vierte Deutsche heimgesucht wird. Wenn sich diese Unglückszahl gar wie heute mit dem Freitag verbindet, passen die Abergläubischen ganz besonders auf.

Glück im Unglück scheint für die derart Geplagten zu sein, daß diese unwillkommene Paarung von Zahl und Tag wenigstens nur „alle paar Schaltjahre“ vollzogen wird. Was kaum jemand

Frankfurter Allgemeinen Zeitung ein Artikel von François Fricker mit der Überschrift „Die kleine Mathematik des Teufels oder gute Gründe für den Aberglauben“ (vgl. den abgebildeten Zeitungsausschnitt). Der Autor des Beitrages setzt sich mit Zahlenmystik auseinander, insbesondere mit dem Aberglauben und der Angst, die sich um die Zahl 13 und das Datum Freitag, den 13., ranken. Wie sieht es mit Meinungen,

Erfahrungen der Schüler zu diesem Datum aus?

Und was heißt das nun, diese „unwillkommene Paarung von Zahl und Tag“ werde nur „alle paar Schaltjahre“ vollzogen?

Wenn man in der Presse nicht fündig wird, so kann man sich mit Suchmaschinen im Internet viele authentische Einstiege in das Thema verschaffen³⁸.

2. Mit Schüleräußerungen. Schüler verschiedener Klassenstufen haben die Frage „Was fällt dir zu Freitag, dem 13., ein?“ so beantwortet:

Was denke ich über Freitag den 13. :
Ich denke es ist ein Pechtag wo alles schief geht.
Jeder Mensch hat an diesem Tag ein Unglück.
Es findet einmal im Jahr diesen Tag.

"Freitag der 13. ist ein Pechtag", sagen viele.
Ich denke nicht so!! Für mich ist der Donnerstag davor ein Pechtag
~~Dienstag~~

Freitag der 13
Ist ein Aberglaublicher Unglückstag
Es gibt nicht jeden Jahr einen Fr. den 13.
Meinen hat man gar kein Unglück

³⁸ Auch am Freitag, dem 13. August 2004, erschienen in der Presse (Übersicht im Internet) zahlreiche Artikel zu diesem Datum.

Freitag dem 13.
Die Leute sagen, dass Freitag dem 13. ein Pechtag ist. Eigentlich stammt dieser Tag aus dem Mittelalter. Man sagt, wenn dir eine Schneise flüchtig vor rechts nach links läuft bringst du das Pech.

Man könnte einen dieser Texte nehmen und die Schüler fragen, was *sie* zu „Freitag, dem 13.“ meinen.

Bei näherer Beschäftigung mit dem Thema wird auch sein *fächerübergreifendes Potenzial* deutlich. Der *sprachliche Bereich* ist gefordert, wenn Schüler ihre eigene Meinung zu diesem „besonderen“ Datum artikulieren, fixieren und z.B. Erkundigungen dazu bei anderen Menschen einholen, die Ergebnisse der Erkundigungen fixieren, usw. Aus der Sicht des Faches *Religion* könnten Begriffe wie Schicksal, Glaube, Aberglaube, Volksglaube erörtert und präzisiert werden.

Literatur

Baruk, S.: Wie alt ist der Kapitän? Birkhäuser Verlag, Basel 1989.

Bender, P.: Der Primat der „Sache“ im Sachrechnen (der Primarstufe). In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker Verlag, Hildesheim 1984, S. 75 - 78.

Christiansen, B. und Walther, G.: Task and activity. In: Christiansen, B. et al.: Perspectives in Mathematics Teacher Education. D. Reidel Publishing Company, 1986, p. 243 – 307.

Franke, M.: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Spektrum Verlag, Heidelberg 2003.

Fricke, F.: Die kleine Mathematik des Teufels oder gute Gründe für den Aberglauben. In: FAZ Magazin vom 13. 9. 1996.

KMK. Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik (Jahrgangsstufe 4). Entwurf (Stand: 23.04.04).

Krauthausen, G.: Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Die Grundschulzeitschrift 119/1998, S. 54 – 61.

Leuders, T.: Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag, Berlin 2001.

Müller, G. N. und Wittmann, E. Ch.: Handbuch produktiver Rechenübungen (2 Bände). Klett, Schulbuchverlag, Stuttgart 1990.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., Ebeling, A.: Handbuch für den Mathematikunterricht – 1. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1996.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., Ebeling, A.: Handbuch für den Mathematikunterricht – 2. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1998.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., Ebeling, A.: Handbuch für den Mathematikunterricht – 3. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1999.

Schipper, W., Dröge, R., Ebeling, A.: Handbuch für den Mathematikunterricht – 4. Schuljahr. Schroedel, Hannover 2000.

Ruwisch, S. und Peter – Koop, A.: Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Mildener Verlag, Offenburg 2003.

Schupp, H.: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Franzbecker Verlag, Hildesheim 2002.

Selter, Ch., Spiegel, H.: Wie Kinder rechnen. Klett Grundschulverlag, Leipzig 1997.

Steinweg, A. S.: Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. LIT, Münster 2001.

Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E.: Making Sense of Word Problems. Sweets & Zeitlinger, 2000.

Walther, G.: Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker Verlag, Hildesheim 1985, S. 28 – 42.

Walther, G.: Mathematik rund um den Kalender, ein integrierendes Thema für den Mathematikunterricht. In: Praxis Schule 5 - 10, 3(1995), S. 7 - 13.

Walther, G.: Mathematik themenorientiert. In: Grundschule 7/8 (1998), S. 15 –17.

Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Eine Schriftenreihe des Kultusministers NRW, Henn Verlag, Ratingen 1972, S. 67 – 95.

Winter, H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 7 (1975), S. 106 – 116.

Winter, H.: Mathematik entdecken – neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule. Scriptor, Frankfurt 1987.

Winter, H.: Aufgaben, Probleme, Kontexte – zur grundsätzlichen Problematik des Sachrechnens in der Grundschule. In: Sachunterricht u. Mathematik in der Primarstufe 8 (1992), S. 350, S. 363-369.

Winter, H.: Problemorientierung des Sachrechnens in der Primarstufe als Möglichkeit, entdeckendes Lernen zu fördern. In: Bardy, B. (Hrsg.): Mathematische und mathematikdidaktische Ausbildung von Grundschullehrerinnen/-lehrern ...Beltz Verlag, Weinheim 1997.

Winter, H.: Sachrechnen in der Grundschule, Cornelsen 1992.

Wittmann, E. Ch.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg Verlag, Braunschweig 1981.

Weitere Literaturhinweise zum Mathematikmodul G1

„Gute Aufgaben“

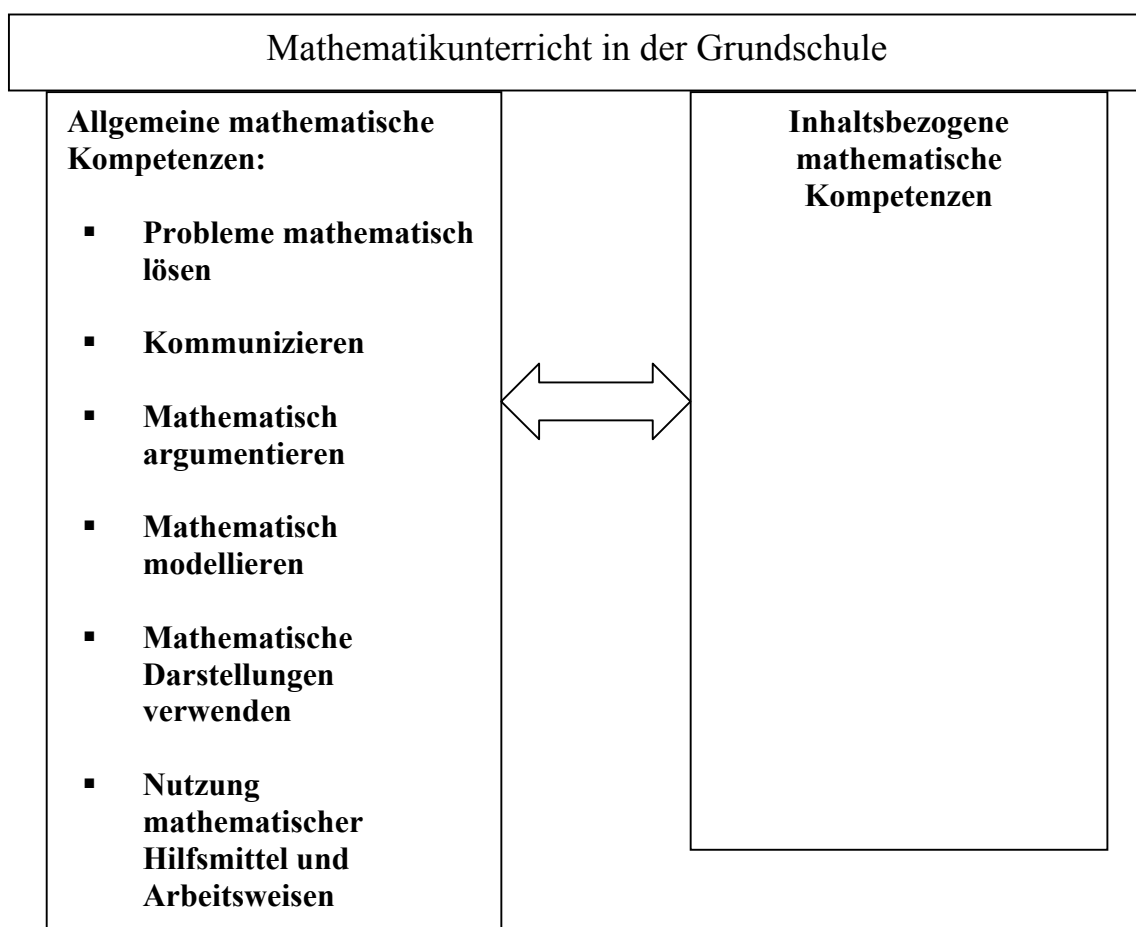
- Erichson, CH. (2004). Simulation und Authentizität – Wie viel Realität braucht das Sachrechnen? In M. Baum & H. Wielpütz, Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch (S.185-194). Seelze: Kallmeyer.
- Schipper, W. (1998). Prozessorientierte Leistungsbewertung im Mathematikunterricht. In Grundschulunterricht 11, S.21-24.
- Walther, G. (1998). Mathematik: themenorientiert. In Grundschule 7-8, S.15-17.
- Winter, H. (1994). Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. In Grundschule 3, S.10-13.
- Winter, H. (2004). „Gute Aufgaben“ für das Sachrechnen. In M. Baum & H. Wielpütz, Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch (S.177-183). Seelze: Kallmeyer.

Modul 1: Gute Aufgaben. Anhang 1

2 Allgemeine mathematische Kompetenzen im Fach Mathematik (nach den Bildungsstandards im Fach Mathematik, Jahrgangsstufe 4, S. 9-10)

Allgemeine mathematische Kompetenzen zeigen sich in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik und auf die gleiche Weise, in der tätigen Auseinandersetzung, werden sie erworben.

Die angestrebten Formen der Nutzung von Mathematik müssen daher auch regelmäßig genutzte Formen des Mathematiklernens sein. Von zentraler Bedeutung für eine erfolgreiche Nutzung und Aneignung von Mathematik sind vor allem die folgenden sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen:



Diese lassen sich für Schülerinnen und Schüler am Ende der 4. Jahrgangsstufe wie folgt konkretisieren:

Probleme mathematisch lösen

- mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten anwenden und beim Lösen mathematischer Probleme nutzen
- inner- und außermathematische Probleme lösen
- für die Lösung von Problemen geeignete Strategien finden und nutzen
- den Prozess der Lösung mathematischer Probleme sprachlich und mit anderen Mitteln darstellen, reflektieren und kontrollieren

Kommunizieren

- Sachtexten und anderen Darstellungen die relevanten Informationen entnehmen und mit anderen darüber kommunizieren
- die Vorgehensweisen von Mitschülern beim Lösen von Aufgaben nachvollziehen und einschätzen
- mit Mitschülern und Lehrkräften Ideen für die Lösung von Problemen entwickeln und Vor- und Nachteile verschiedener Vorgehensweisen einschätzen
- mathematische Fachbegriffe verwenden

Mathematisch argumentieren

- mathematische Aussagen neugierig und kritisch hinterfragen
- Argumente nachvollziehen und reproduzieren
- mathematische Zusammenhänge beschreiben
- mathematische Begründungen entwickeln und verstehen

Mathematisch modellieren

- Mathematik in Sachkontexten erkennen und anwenden
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen in der Lebenswirklichkeit prüfen ("Anwendungsorientierung")
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren

Mathematische Darstellungen verwenden

- mathematische Sachverhalte auf verschiedene Weise darstellen
- eine Darstellung in eine andere übertragen
- für das Lösen mathematischer Probleme geeignete Darstellungen auswählen und nutzen

Nutzung mathematischer Hilfsmittel und Arbeitsweisen

- fachspezifische Zeichen und Sprechweisen verwenden
- geeignete Kontrollverfahren ausführen
- mit Gleichungen, Termen, Platzhaltern, Diagrammen und Tabellen arbeiten
- Hilfsmittel verwenden

Modul 1: Gute Aufgaben. Anhang 2

Aktivitäten. Anregungen zur Aufgabenanalyse (Schwerpunkt: prozessbezogene Kompetenzen)

Beispiel 1

4 Schöne Päckchen. Beschreibe das Muster. Setze fort.

a) 99 – 11	b) 66 – 55	c) 70 – 35	d) 53 – 30	e) 73 – 38
88 – 22	72 – 50	71 – 34	60 – 37	74 – 38
77 – 33	78 – 45	72 – 33	65 – 42	74 – 37
66 – 44	84 – 40	73 – 32	68 – 45	75 – 37

Beispiel 2

- 1.** Lege mit den Ziffernkarten 2 4 6 8 zwei zweistellige Zahlen und multipliziere sie.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

- a. Finde weitere Aufgaben.
- b. Lege die Aufgabe mit dem kleinsten Ergebnis.
- c. Lege die Aufgabe mit dem größten Ergebnis.

Beispiel 3

1 Rechne geschickt. Überlege bei jeder Aufgabe.

a) 17 + 62	b) 18 + 29	c) 38 + 19	d) 67 + 19	e) 89 + 7
24 + 38	17 + 62	18 + 39	36 + 11	79 + 8
28 + 34	28 + 19	43 + 31	57 + 29	78 + 9
12 + 67	67 + 12	41 + 33	31 + 16	87 + 9

f) Kontrolliere: Je zwei Ergebnisse in einem Päckchen sind gleich. Warum?

2 Finde weitere Aufgaben mit dem gleichen Ergebnis.

a) 25 + 26 = 51	b) 17 + 71 = 88	c) 39 + 8 = 47	d) 17 + 80 = 97
26 + 25 = 51	77 + 11 = 88	40 + 7 = 47	27 + 70 = 97
21 + 30 = 51	71 + 17 = 88	41 + 6 = 47	37 + 60 = 97

e) Warum sind die Ergebnisse in einem Päckchen immer gleich?

Beispiel 4

Große Summen

1. Wie groß ist die Summe aller Zahlen der Hundertertafel?

a. Berechne zuerst die Summe der Zahlen in der ersten Zeile, dann in der zweiten, dritten Zeile usw.

Was fällt dir bei den Zeilen-Summen auf?

Kannst du es begründen?

Welche weiteren Zeilen-Summen vermutest du?

Addiere am Schluss alle Zeilen-Summen.

b. Findest du noch andere Möglichkeiten, um die Summe aller hundert Zahlen zu berechnen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Wie groß ist die Summe aller Zahlen von 1 bis 1 000?

Beispiel 5

9. Streiche nacheinander in der Hundertertafel durch:

Zahlen der 2er-Reihe

Zahlen der 5er-Reihe

Zahlen der 3er-Reihe

Zahlen der 7er-Reihe

10. Prüfe nach: die Zahlen der 4er-Reihe sind schon durchgestrichen. Warum? Prüfe auch die 8er-Reihe.

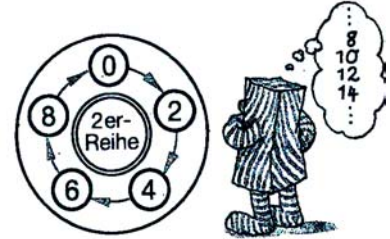
11. Warum brauchst du die Zahlen der 6er-Reihe (der 9er-Reihe) nicht mehr durchzustreichen?

1	2	3	4	5	6
11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46

Beispiel 6

6. Schreibe die ersten 15 Zahlen der 2er-Reihe auf. Bei jedem neuen Zehner beginne eine neue Zeile. Was fällt auf?

7. Kirsten: „Bei den Zahlen der 2er-Reihe wiederholen sich die Endziffern immer wieder.“ Sie schreibt sie als Kreisel.



8. Welche Zahlen sind durch 2 teilbar (gehören zur 2er-Reihe)? Schreibe dazu auch die mal-Zerlegung. Beispiel: $34 = 2 \cdot 17$
 34 45 68 22 90 65 57 101

9. Untersuche die 4er-Reihe. Kannst du auch hier die letzten Ziffern als Kreisel schreiben?

10. Kannst du auch Kreisel mit den Endziffern der 6er-Reihe und der 8er-Reihe schreiben?

11. Welche Zahlen lassen sich ohne Rest durch 3 teilen? Schreibe: $24 : 3 = 8$
 24 12 25 9 18 14 27 5 16 12 29 21

12. Welche Zahlen aus Aufgabe 11 lassen sich ohne Rest durch 4 (durch 6) teilen?

13. Bei welchen Zahlen kannst du sofort sagen, daß sie beim Teilen durch 4 (durch 6, durch 8) einen Rest lassen. Bei welchen Zahlen mußt du erst nachrechnen?
 45 62 19 70 56 88 90 91 87 35 100 89

14. Gibt es auch einen Kreisel für die 3er-Reihe? Für die 7er-Reihe? Was fällt auf?

15. Die Kreisel für die 5er-Reihe und für die 10er-Reihe sind besonders einfach. Warum?

16. Welche Zahlen sind durch 10 teilbar? Welche durch 5?
 18 25 61 70 105 200 201 205 250 502 520

Zahlen, die mit 0 oder mit 5 enden, sind durch 5 teilbar.
 Zahlen, die mit 0, 2, 4, 6 oder 8 enden, sind durch 2 teilbar.

Beispiel 7

13. Rechne, was fällt auf? Kannst du selber noch ein Päckchen schreiben?

$50 \cdot 6$	$3 \cdot 70$	$90 \cdot 4$	$3 \cdot 20$	$50 \cdot 8$	$4 \cdot 30$	$40 \cdot 2$
$60 \cdot 5$	$7 \cdot 30$	$40 \cdot 9$	$2 \cdot 30$	$80 \cdot 5$	$3 \cdot 40$	$20 \cdot 4$

Beispiel 8

7 a. $25 \cdot 25$	b. $32 \cdot 32$	c. $13 \cdot 13$	d. $29 \cdot 29$	e. $23 \cdot 23$	f. $47 \cdot 47$
$24 \cdot 26$	$31 \cdot 33$	$12 \cdot 14$	$28 \cdot 30$	$22 \cdot 24$	$46 \cdot 48$

Beispiel 9



a) Denke dir eine Zahl zwischen 100 und 200. Multipliziere die Zahl mit 75, anschließend das Ergebnis mit 64. Dividiere dann erst durch 80 und dann noch durch 60.

(In diesem Beispiel wurde aus Platzgründen gegenüber dem Original nur die Positionierung zwischen Bild und Text geändert).

Beispiel 10

Die übliche Hundertertafel ist bekannt. Die unten abgebildete Hundertertafel ist eine Variante der üblichen Hundertertafel (zur Variation von Aufgaben vgl. 6.3) Die Zahlen 0, 1, 2, ..., 100 sind nach einer bestimmten Regel in einer Zahlentafel aufgeschrieben.

Ergänze in den abgebildeten Ausschnitten aus der Zahlentafel die fehlenden Zahlen.

0	2	4	6	8
1	3	5	7	9
10	12	14	16	18
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
...		

		56
53		

			69

83		

61			

Fortsetzung

Dies ist ein quadratischer Ausschnitt aus der Zahlentafel (oben)

12	14
13	15

Vergleiche die Summen der Zahlen die direkt untereinander (nebeneinander) stehen:

$$12 + 13 = 25, 14 + 15 = 29$$

Vergleiche die Summen der Zahlen die quer gegenüber stehen:

$$12 + 15 = 27, 14 + 13 = 27.$$

Vergleiche die Produkte der Zahlen die direkt untereinander (nebeneinander) stehen:

$$12 * 13 = 156, 14 * 15 = 210.$$

Vergleiche die Produkte der Zahlen die quer gegenüber stehen:

$$12 * 15 = 180, 14 * 13 = 182.$$

Stelle diese Vergleiche für einen anderen quadratischen Ausschnitt der Zahlentafel an.

Die Summe aller Zahlen in dem oben gezeigten quadratischen Ausschnitt ist

$$12 + 14 + 13 + 15 = 54$$

Vergleiche mit der Summe eines anderen quadratischen Ausschnitts.

2
3
12

Die Summe der Zahlen in dieser Dreierstange ist

$$2 + 3 + 12 = 17$$

Vergleiche mit den Summen von anderen

Dreierstangen.

12	
13	15

14	
15	17

Dies sind L-förmige Ausschnitte aus dem Zahlenfeld. Sie liegen im Zahlenfeld nebeneinander.

Die Summe der Zahlen im linken L ist

$$12 + 13 + 15 = 40$$

Die Summe der Zahlen im L daneben ist

$$14 + 15 + 17 = 46$$

13	
22	24

15	
24	26

Diese L-förmigen Ausschnitte aus dem Zahlenfeld liegen unmittelbar unter den beiden Ls (oben).

Die Summe der Zahlen im linken L ist

$$13 + 22 + 24 = 59$$

Die Summe der Zahlen im L daneben ist

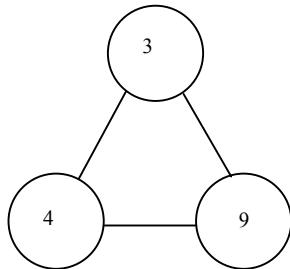
$$15 + 24 + 26 = 65$$

Wie hängen die errechneten Summen zusammen?

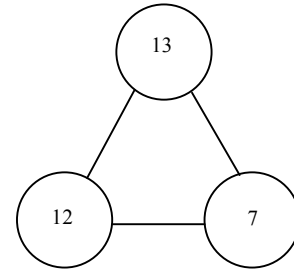
Beispiel 12

Rechendreieck

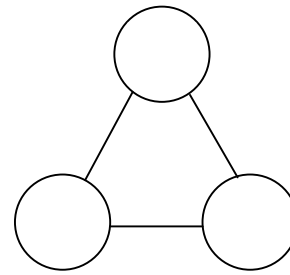
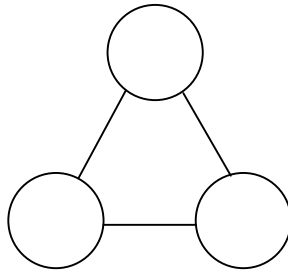
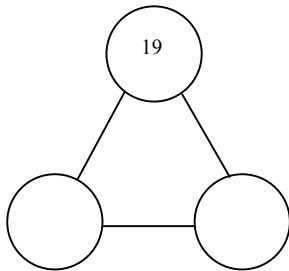
Auf den drei Feldern des ersten Dreiecks stehen die Zahlen 3, 4, 9.



Die Zahlen des zweiten Dreiecks werden so gebildet: Jeweils zwei Zahlen im vorherigen Dreieck werden addiert und die Summe in das gegenüber liegende Feld des zweiten Dreiecks geschrieben.

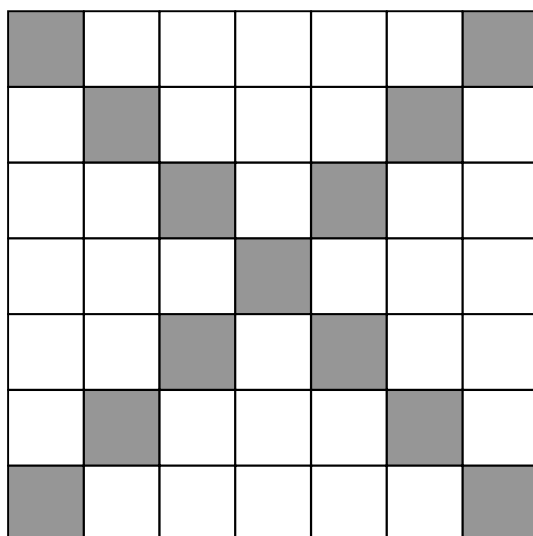


Trage die fehlenden Zahlen in die nächsten Dreiecke ein.



Beispiel 13

In dem Quadrat mit Seitenlänge 7 sind die kleinen Quadrate auf den beiden Diagonalen grau gefärbt. Wie viele kleine weiße Quadrate enthält das Siebenerquadrat?



Beispiel 14

Vergilbte Zeichnungen

Links in Bild 1 ist die Originalfigur zu sehen. In den Bildern 2, 3, 4 ist jeweils ein Teil der gedrehten Originalfigur gezeichnet. Ergänze die fehlenden Linien oder begründe, wenn es nicht geht.

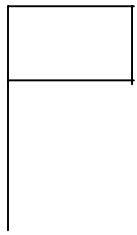


Bild 1

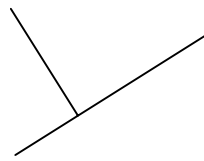


Bild 2

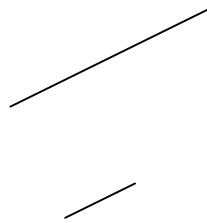


Bild 3



Bild 4

Analoge Aufgabe für die Originalfigur in Bild 5

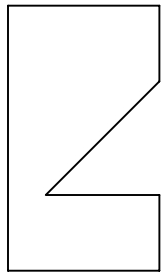


Bild 5

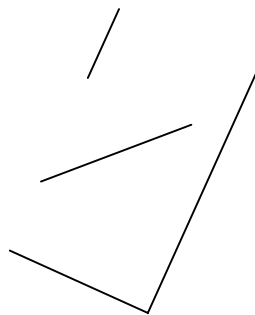


Bild 6

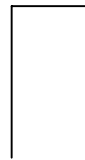


Bild 7

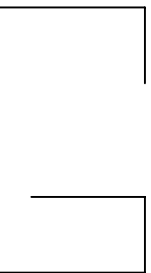
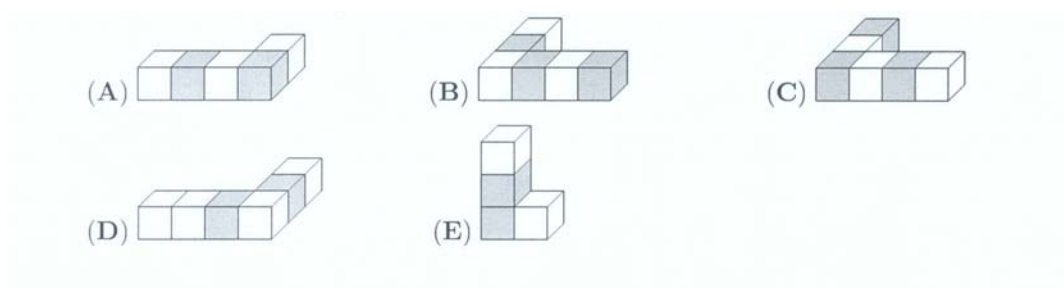


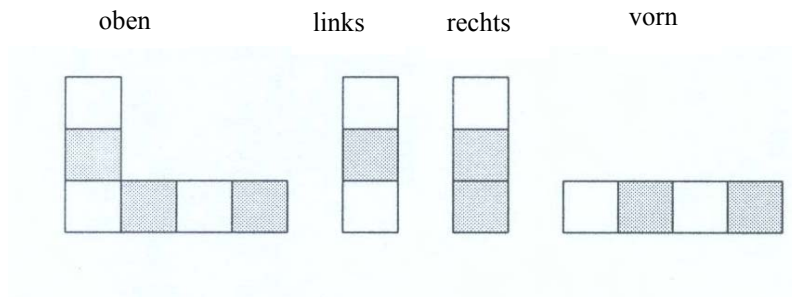
Bild 8

Beispiel 15

Jana baut aus schwarzen und weißen Würfeln folgende Figuren



Anschließend hat Jana von einer der Figuren gezeichnet, was man sieht, wenn man von



darauf guckt. Welche Figur ist es?

Beispiel 16

Dies ist ein Wegegitter (Bild 1), auf dem sich Karl, der Roboter auf den gezeichneten Linien von einem schwarzen Feld zum andern bewegen kann.

Karl startet z.B. auf dem Feld S, muss dann auf seinem Weg *alle* schwarzen Felder besuchen und auf das Feld S zurückkehren. Dabei darf er, mit Ausnahme von S jedes Feld nur einmal besuchen. Nur auf S kommt Karl zweimal: beim Start und bei der Rückkehr.

Wie ein solcher Rundweg aussehen kann zeigt Bild 2 (dick gezeichnet).

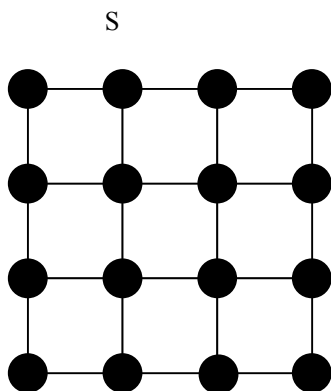


Bild 1

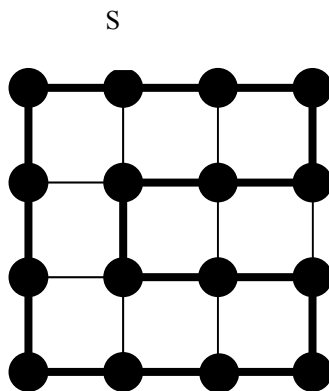


Bild 2

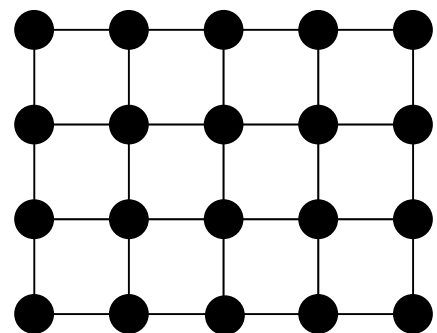


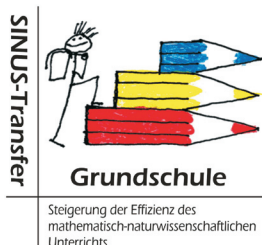
Bild 3

Es fällt in Bild 2 auf, dass Karl nicht alle zur Verfügung stehenden Wege benutzt (dünne Linien). Wie viele Wege benutzt Karl auf seinem Rundweg nicht?

Bearbeite die gleiche Frage für das Wegegitter mit 20 schwarzen Feldern (Bild 3).



Programmträger: IPN, Kiel
 Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
www.ipn.uni-kiel.de



SINUS-Transfer Grundschule
 Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
 Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-grundschule.de

Ministerium für Bildung
 und Frauen
 des Landes Schleswig-Holstein



Programmkoordination für die Länder durch das
 Ministerium für Bildung und Frauen des Landes Schles-
 wig-Holstein (MBF)
 MR Werner Klein (SINUS-Transfer Grundschule)
<http://landesregierung.schleswig-holstein.de>



Landeskoordinatorenausbildung durch das
 Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
 StD Christoph Hammer; gemeinsam mit dem IPN
www.isb.bayern.de



UNIVERSITÄT
 BAYREUTH

Serverbetreuung: Zentrum zur Förderung des mathema-
 tisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts der Universität
 Bayreuth (Z-MNU)
 Leitung: Prof. Dr. Peter Baptist
<http://zmnu.uni-bayreuth.de>

Hinweis: Die Modulbeschreibungen sind während der
 Laufzeit des Programms SINUS-Transfer Grundschule
 (2004-2009) entstanden.
 Die Liste der Kooperationspartner galt für diesen Zeit-
 raum. Im Nachfolgeprogramm *SINUS an Grundschulen*
 sind die Kooperationen anders strukturiert.

ISBN für diese Modulbeschreibung (Mathematik G1)
 978-3-89088-180-5